ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS.

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME DIX-HUITIÈME
1934

L'HORLOGE À PENDULE
OU À BALANCIER DE 1666 À 1695.
ANECDOTA.





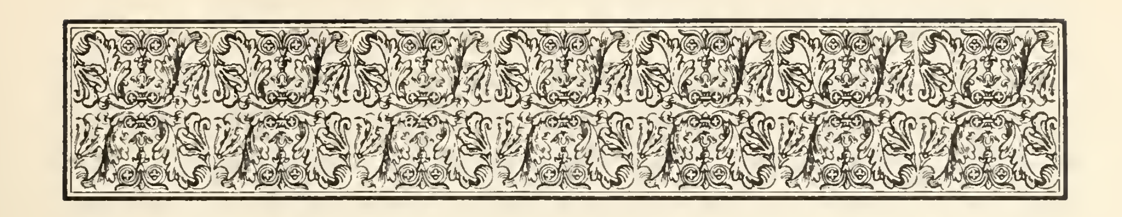
SWETS & ZEITLINGER N.V.
AMSTERDAM - 1967

Réimprimé avec le consentement de la Société Hollandaise des Sciences



L'HORLOGE À PENDULE
OU À BALANCIER DE 1666 À 1695.
ANECDOTA.

L'HORLOGE À PENDULE OU À BALANCIER DE 1666 À 1695.



Avertiſſement.

Les Tomes qui précèdent contiennent à peu de choſe près [1]) les travaux de Huygens depuis ſa jeuneſſe juſqu'à ſon départ pour Paris en 1666. Les principales Pièces qui y manquent ſont les Journaux de Voyage de 1660-1661 et 1663 — d'ailleurs ſouvent cités; voir p. e. les p. 69—71 du T. XV — que nous inſérerons dans la biographie finale [2]). Mentionnons auſſi une collection encore inédite dans ſon enſemble de proverbes et maximes tirés par le jeune Huygens de Cicéron et de quelques autres auteurs anciens grecs et latins. Quelques-unes de ces citations, dont le choix eſt évidemment caractériſtique pour Huygens, ont été publiées en 1929 [3]). On trouvera dans les Journaux de Voyage — voir d'ailleurs ſur deux paſſages du premier Journal où il eſt queſtion des horloges les notes 7 de la p. 159 [4]) et 2 de la p. 246 du T. XVII —

---

[1]) Voir sur un sujet non encore traité jusqu'ici le premier alinéa de la p. 265 du T. XVII. Le lecteur futur qui dispose de tous les Tomes pourra trouver dans les „Varia" quelques figures se rapportant à la période qui se termine en 1666, et aussi une Pièce de 1658 sur la voix humaine commençant par les mots: „Diversitas tonorum fit arctatione laryngis majori minorive". Quant aux travaux de Huygens sur les corps oscillants qui sont traités dans le Tome XVI (p. 385—391 et 414—555), ceux qui s'intéressent spécialement à ces calculs, trouveront encore quelque chose à glaner dans les Manuscrits B et C.

[2]) Ces Journaux de Voyage — comparez la fin de la note 5 qui suit — seront d'ailleurs fort probablement publiés par Mons. H. L. Brugmans en 1934 avant la fin de l'impression du présent Tome; voir à ce sujet les Additions et Corrections qui suivent.

[3]) Dans le T. VII du périodique „Christiaan Huygens" (éd. F. Schuh, Noordhoff, Groningen)

le récit des relations perſonnelles de Huygens avec diverſes perſonnes en France et en Angleterre; et l'on y remarquera à Paris ſa préſence en pluſieurs réunions ſcientifiques qui conduiſirent tout naturellement à la création d'une Académie officielle à l'inſtar de la „Royal Society". En devenant membre de cette Académie — nous réſervons les détails ſur ce ſujet pour la biographie, nous bornant ici à dire qu'Iſmaël Boulliau dans une lettre inédite appelle Huygens „omnium caput" [5]) — il fut, comme on le comprend, amené à s'occuper de quelques ſujets nouveaux pour lui. Toutefois (comme cela reſſort auſſi clairement des T. XIII et XV) ce fut en premier lieu à pourſuivre ſes études anciennes qu'il s'appliqua. Il y a notamment une parfaite continuité entre ſes recherches ſur les horloges — et ſur les ſujets mathématiques qui s'y rattachent — antérieures à 1666 (T. XVII) et celles appartenant à la période françaiſe de 1666 à 1681 [6]) et à la deuxième période hollandaiſe de 1681 à 1695. Nous vouons donc le préſent Tome à ces travaux-là ſans inſiſter ſur l'influence du milieu.

dans un article intitulé „Christiaan Huygens, eenige citaten en beschouwingen naar aanleiding van den driehonderdsten gedenkdag zijner geboorte".

4) Observons en passant que l'horloger „Martinet" s'appelait en réalité „Martinot", comme Huygens l'écrit dans son Journal.

5) Boulliau écrit à Hevelius le 18 février 1667: „Ne tamen præcipua nomina hujus collegii te lateant, nota mihi adscribam. Omnium caput est Ill.mus Christian Hugenius, qui ex Batavia evocatus sex millium florenorum Polonicorum annua pensione fruitur; ſequuntur Robervallius etc.". Cette lettre qui se trouve à Paris à la Bibliothèque Nationale nous a été signalée par Mons. Harcourt Brown de Canada, de qui un travail sur la genèse des sociétés scientifiques en Europe au dix-septième siècle — lequel contiendra plusieurs passages inédits du Journal de Voyage de 1660—1661 de Huygens — paraîtra dans le cours de l'année suivante (1934); voir à ce sujet les Additions et Corrections qui suivent.

6) Cette „période française" fut d'ailleurs interrompue par deux ſéjours prolongés en Hollande (1670—1671 et 1676—1678).

L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

L'ordre chronologique que nous avons obſervé dans la partie du T. XVII vouée à l'horloge à pendule de 1656 à 1666 nous amène à parler ici de l'hiſtoire de cette même horloge, en tant qu'elle regarde Huygens, de 1666 à 1673.

I. Horloges marines.

Comme nous l'avons dit à la p. 177 du T. XVII, l'horloge marine fut patentée en France peu avant le 4 mars 1665, grâce à l'influence du père Conſtantijn auprès de Louis XIV. Le 13 février Conſtantijn écrivit de Paris à Chriſtiaan (qui venait de préſenter au Roi la Requête qui conſtitue notre Appendice I): „C'eſt une excellente preuve des Pendules, que celle de Holmes [1]). Je la feray veoir au Roy et parleraij pour avoir icij le Privilège"; et le 27 février: „J'ay leu dans ma derniere Audience au Roij, tout du long la copie de votre lettre de Mons.r Morraij [2]) qu'il a entendue avec plaiſir, comme aujourd'huy Monſieur Frère du Roy en preſence de ſa femme, m'en a fort bien ſceu repeter le contenu. Pour le Roy, quand je lui ay parlé du privilege, il m'a dit qu'il le donneroit"[3]).

Chriſtiaan qui ſe trouvait encore en Hollande donna le 20 mai 1665 plein pouvoir à Chapelain pour diſpoſer du privilège: l'horloger Iſaäc Thuret (comparez la note 2 de la p. 235 du T. XVII) était venu voir Chapelain déjà en mars pour le prier d'offrir ſes ſervices à Huygens pour la conſtruction des dites horloges et pour leur vente et diſtribution [4]). Voici le texte de la

Procuration.

gegroſſeert [5])

---

[1]) Comparez la p. 223 du T. V.

[2]) Voir à ce sujet la p. 230 du T. XVII.

[3]) Le 13 mars 1665 Constantijn écrivit: „Je trouve votre inſtruction marino-pendule [T. XVII, p. 199—235] fort nette et claire". Ces fragments de lettres sont inédi's. Ils sont tirés d'un „Memorie [d'ailleurs peu important] raekende de verblijven van de Heer Christiaen Huygens in Engelandt", qui se trouve dans l'un des deux portefeuilles „Varia". Évidemment la famille, ou d'autres personnes à qui elle les avait confiées, possédaient au dix-huitième siècle une collection de lettres échangées entre Constantijn et ses fils qui se sont égarées plus tard. Toutefois il ne paraît pas absolument impossible que ces lettres existent encore aujourd'hui.

L'auteur du „Memorie" n'est pas nommé, mais un membre de la famille qui appelle Chr. Huygens son grand-oncle dit avoir reçu cette pièce, ainsi que des pièces et lettres ayant appartenu au dit grand-oncle, de la veuve du professeur G. J. 's Gravesande, éditeur des Oeuvres de Huygens au dix-huitième siècle, lequel mourut en 1742.

[4]) T. V, p 267. Voir aussi à la p. 357 du T. V la lettre de Huygens du 21 mai à Chapelain qui accompagna la Procuration à laquelle Huygens ajouta encore la Pièce No. 1409 (T.V, p. 358).

[5]) C. à. d. copié. Nous empruntons cette copie à la f. 206 du No. 277 des archives notariales (arch. communales) de la Haye.

Par devant moij Martin Beeckman notaire publicq admis par la Cour Provinciale d'Hollande residant à la Haije, & devant les tesmoins soubsignez fust present en sa personne Monsieur Christian Huijgens de Zulichem, demeurant dans ce lieu de la Haye lequel a declaré avoir fait et constitué son Procureur general & special le Sieur Jean Chapelain Conseiller du Roy en ses conseils demeurant à Paris, luy donnant plein pouvoir & authorisation de pour luy et en son nom, disposer du privilege que le dit Sr. Constituant a obtenu de sa Maj.té Tres Chrestienne dans cette annèe 1665 de sa nouvelle Invention d'horologe à pendule [1]) lequel privilege ledit Sieur Chapelain a entre ses mains, — Et le pourra vendre, et transporter à telle, ou telles conditions que ledit Sr. le trouvera a propos, faire dresser, et passer pour cest effect des Contracts et Escripts à ce necessaires, recevoir les deniers qui en proviendront, donner quittance Et generallement agir et gerer comme ledit Sr. Constituant faire pourroit ij estant mesme en personne, promettant ledit Sieur Huijgens de ratifier, tenir ferme et irrevocable tout ce qu'en vertu de cettes sera fait et contractè par le dit Sieur Chapelain, sous obligation de renonciation comme de droit à ce requis. Ainsy fait et passè à la Haye en Hollande le vingtiesme de May mil six cens soixante cincq en la presence de Corneille van Broeck et Guillaume Bronsvelt tesmoins dignes de foy a ce requis.

Chr. Hugens de Zulichem

C. van Broeck 1665

G. Bronsvelt

A. Beeckman Nots. Publ. 1665.

A la suite de cette procuration, Chapelain entra en négociations avec Thuret. Se souvenant du projet qu'il avait envoyé à Huygens d'un remontoir à ressorts à remontage d'heure en heure [2]), Thuret avait quelque soupçon que l'horloge de Huygens serait une construction de ce genre [3]). Thuret construisit en outre dans le cours de 1665 un remontoir à ressorts à remontage fréquent qu'il montra à Chapelain [4]). Huygens, à qui Chapelain communiqua les propos de Thuret, répondit qu'il avait également fait construire à la Haye, indépendamment de Thuret, une montre à deux ressorts à remontage fréquent et qu'il considérait cette invention comme une dépendance de la sienne, c. à. d. du remontoir à poids à remontage fréquent [5]). Il faut croire que Thuret montra son invention à Chapelain avant d'avoir vu les remontoirs à poids moteurs à remontage fréquent de S. Oosterwijck destinés à de Montmort et à de Carcavy, lesquels arrivèrent à Paris avant le

---

[1]) Il s'agit apparemment du remontoir à poids moteurs à remontage fréquent qui était destiné à l'usage sur mer; voir la Fig. 73 de la p. 178 du T. XVII. Toutefois le privilège s'appliquait, paraît-il, aux „montres a Pendule sur mer" en général; voir la p. 177 du T. XVII.

[2]) Voir sur les remontoirs à ressorts de ce genre la troisième ligne d'en bas de la note 3 de la p. 10 et les p. 181—182 du T. XVII.

[3]) T. V, p. 371; T. XVII, p. 181—182.

[4]) T. V, p. 511.

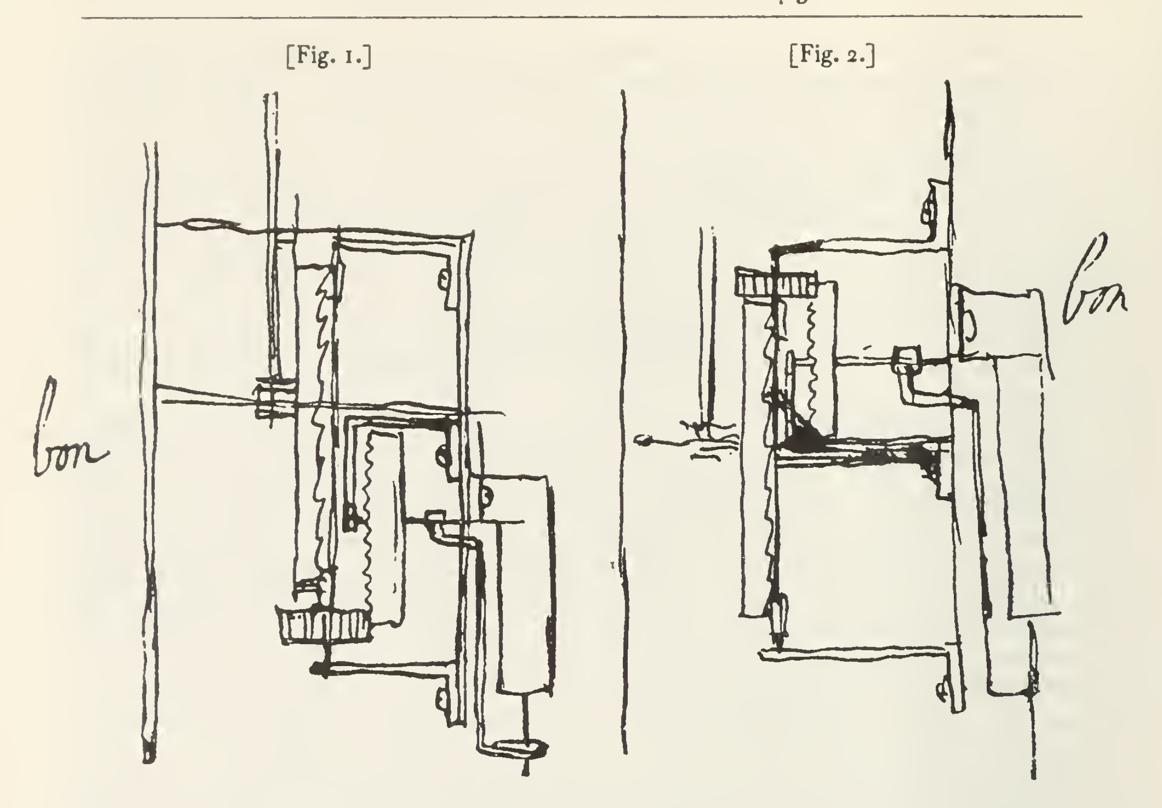
[5]) T. V, p. 525; T. XVII, p. 182.

20 août 1665 et qu'il eut l'occafion d'examiner [6]). Il eft vrai que la lettre de Chapelain dans laquelle celui-ci dit avoir vu la nouvelle montre de Thuret date du 23 octobre fuivant [7]), mais dans cette lettre il dit que Thuret n'attendit pas „a descouvrir fon inuention qu'il euft vu l'execution de la voftre". Cela étant, il faut admettre que Thuret — à moins qu'il n'ait appris par une autre voie que dans l'horloge de Huygens il y avait un remontage fréquent — a eu, indépendamment de Huygens, l'idée d'introduire le remontage fréquent dans fes montres à refforts. Ce qui eft certain c'eft que peu de temps après avoir confidéré l'horloge marine envoyée de la Haye à de Montmort, Thuret a exprimé des doutes fur le fuccès de ce remontoir-là. Nous rappelons que le capitaine Holmes n'avait pas encore eu à fa difpofition ce remontoir dont la conftruction n'avait eu lieu qu'après fon départ [8]). L'horloger parifien dit „que les chaisnettes de [la] machine [de Huygens, c. à. d. du remontoir nommé] eftoient d'un artifice moins fimple que le fien, et plus fujet a arreft" [4]). De l'autre côté Huygens émit l'opinion que les refforts ne doivent pas „operer toufjours de mefme force" [9]).

En juin 1665 Huygens fut invité par Colbert à venir demeurer à Paris comme membre de l'Académie des Sciences [10]). Bientôt Chapelain ceffa par conféquent de négocier avec Thuret, difant que Huygens s'ajufterait fans doute beaucoup mieux auec lui perfonnellement que par autrui [11]). Tel fut évidemment le cas; nous ignorons toutefois les particularités de l'accord conclu fans doute en 1666. Ce n'eft qu'en avril 1667 [12]) que Huygens parle de trois horloges faites à Paris „par mon ordre, mais au depens du Roy, pour fervir au voyage de Madagafcar". Il ajoute: „A celles la je ne fais point adjouter l'invention de la chaifnette, parce que je vois qu'elle donne trop d'embarras" [13]). Dans une lettre de décembre 1667 à fon frère Lodewijk [14]) il nous apprend que les horloges nouvellement conftruites „ne font pas avec la chainette en dedans, mais fimplement comme les pendules ordinaires". Il eft poffible que les Fig. 1 et 2 [15]), lefquelles font défignées par Huygens par le mot bon repréfentent avec plus ou moins de fidélité des horloges réellement conftruites en 1667. La verge à palettes y eft verticale comme dans le modèle de 1658 [16]). Cette pofition de la verge dans une horloge munie d'arcs cycloïdaux et conftruite après 1659 eft quelque peu étonnante: voir les p. 93—96 du T. XVII. Il faut cependant remarquer que la conftruction diffère de celle de 1658. Il n'eft d'ailleurs pas abfolument certain qu'il s'agit ici d'horloges marines. La verge à palettes eft apparemment horizontale dans une autre figure [Fig. 3] à côté de laquelle fe trouvent les mots „de Thuret" [17]). Ce qui eft certain c'eft qu'en ce temps ni la conftruction de 1664 de Huygens ni celle de 1665 de Thuret n'avait prévalu: on ne fit ufage ni d'un remontoir à poids ni

6) T. V, p. 439, 474, 476, 511.
7) T. V, p. 510. La lettre précédente de Chapelain est du 27 août.
8) T. XVII, p. 194, 234.
9) T. V, p. 525 (5 novembre 1665); T. XVII, p. 182.
10) T. V, p. 375.
11) T. V, p. 510.
12) T. VI, p. 129.
13) Comparez la p. 396 du T. VI, où l'on voit aussi que Huygens apporta à Paris les deux remontoirs construits pour lui par S. Oosterwijck (T. XVII, p. 183, Fig. 75).
14) T. VI, p. 167.
15) Manuscrit C, p. 136. Cette page date de février 1667.
16) T. XVII, p. 43, Fig. 8.
17) Manuscrit C, p. 142 (février 1667).

[Fig. 1.] [Fig. 2.]



d'un remontoir à reſſorts dans l'expédition de Madagaſcar; et il en fut de même dans celle de Candie de 1668—1669 [1]). Les „pendules ordinaires" employés étaient à poids moteurs puiſque Huygens dit que dans les horloges à chaînette „il falloit un contrepoids trois fois ſi grand qu'autrement" et que dans le cas du voyage de Candie le „contrepoids" eſt expreſſément mentionné à la p. 502 du T. VI ainſi que dans l'„Horologium oſcillatorium" (voir la p. 118 qui ſuit).

Dans la lettre de 1667 à Lodewijk, Huygens parle de plus de deux nouveaux types d'horloges, dont le dernier eſt achevé ou peu ſ'en faut: „l'un avec un pendule qui tourne en rond, et l'autre d'une façon trop longue a deduire, qui pourtant n'eſt nullement embarraſſée".

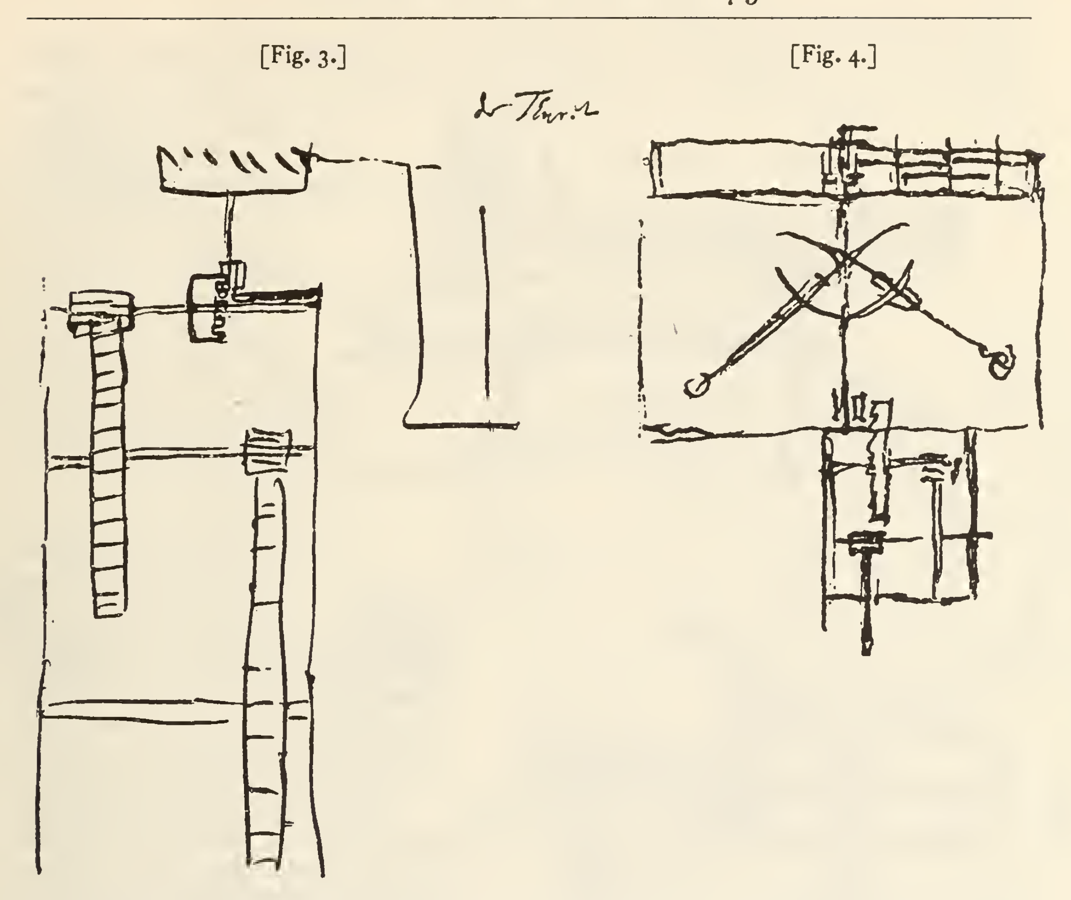
La Fig. 4 [2]) repréſente l'horloge à pendule conique dont nous ignorons ſi dans la penſée de Huygens elle eût pu ſervir ſur mer. Une horloge à pendule conique fut conſtruite en 1668 (T. VI. p. 267).

---

[1]) Dans cette dernière expédition (voir les p. 116—119 qui suivent) le duc de Beaufort n'eut à sa disposition qu'une seule horloge (T. VI, p. 501).

[2]) Manuscrit C, p. 112 (novembre ou décembre 1666). On y trouve encore quelques autres figures du même genre. Comparez la p. 360 qui suit d'après laquelle plusieurs horloges à pendule conique furent construites avant 1673.

[Fig. 3.] [Fig. 4.]



Le deuxième type mentionné par Huygens nous eſt inconnu. Il eſt poſſible qu'il ſ'agiſſe, comme en 1664 et 1665 [3]), de pendules enfermées dans de lourdes boîtes, telles qu'elles ſont repréſentées dans les Fig. 5 et 6 datant de 1668 [4]). Ce qui eſt nouveau ici (outre peut-être la conſtruction des pendules — voir la fin du préſent alinéa — inviſibles dans les figures) c'eſt que la ſolive à laquelle les pendules ſont attachées eſt dans l'une des deux figures [Fig. 6] ſuſpendue à la Cardan. On lit dans la Fig. 5: „poutre du vaiſſeau [5]). — 10 pouc. — fer large de 2 pouces et mince qui faſſe un peu de reſſort. — fer large de meſme. — petite ſolive de 3 pouces en quarrè. — double charniere afin que les horologes ne tournent point [6]). — les pen-

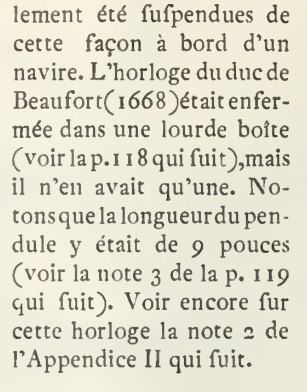
[3]) Voir la Fig. 75 à la p. 183 du T. XVII.

[4]) Manuscrit C, p. 258, datant de mai ou de juin 1668.

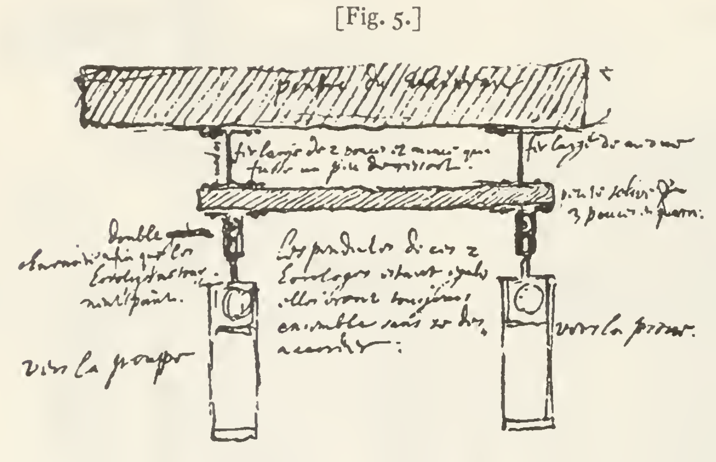
[5]) En 1665 (voir le deuxième alinéa de la p. 162 du T. XVII) il était aussi question d'attacher les horloges „a quelque poutre", mais le contexte fait voir qu'il s'agissait là de les attacher à une poutre, sans doute verticale, de telle manière qu'elles ne pouvaient balancer.

[6]) Comparez le premier alinéa de la p. 162 du T. XVII.

dules de ces 2 horologes eſtant egales elles iront touſjours enſemble ſans ſe deſaccorder [1]). — vers la pouppe. — vers la proue". Rien n'indique que des horloges aient réellement été ſuſpendues de cette façon à bord d'un navire. L'horloge du duc de Beaufort (1668) était enfermée dans une lourde boîte (voir la p. 118 qui ſuit), mais il n'en avait qu'une. Notons que la longueur du pendule y était de 9 pouces (voir la note 3 de la p. 119 qui ſuit). Voir encore ſur cette horloge la note 2 de l'Appendice II qui ſuit.

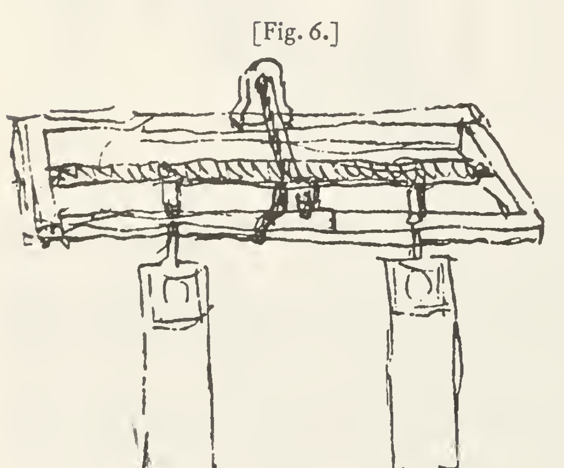


[Fig. 5.]



C'eſt de 1671 ou 1672 que date l'horloge marine à reſſort moteur et à pendule triangulaire [2]) avec ſuſpenſion à la Cardan — comparez la phraſe de l'Appendice III qui ſuit ſur la „hauteur" du „point de ſuſpenſion" — ſur laquelle on peut conſulter les p. 120—123 qui ſuivent. En 1673 cette horloge n'avait pas encore été miſe à l'épreuve [3]).

[Fig. 6.]



Nous reproduiſons ici [Fig. 7] ce pendule tel que le Manuſcrit D le repréſente pour la première fois [4]), ainſi que quelques ſuſpenſions de l'horloge antérieures (?) à la ſuſpenſion nommée et dont rien ne démontre qu'elles aient été réaliſées [Fig. 7bis [5]) et 7ter [5])].

Huygens écrit [4]): „Il faut, pour avoir le pendule [Fig. 7] d'environ 6 pouces, que les 5 vibrations faſſent 2 ſecondes. Ce qui ſera ainſi en donnant 15 dents a la roue de rencontre [6]), et la faiſant tourner 5 fois dans une minute".

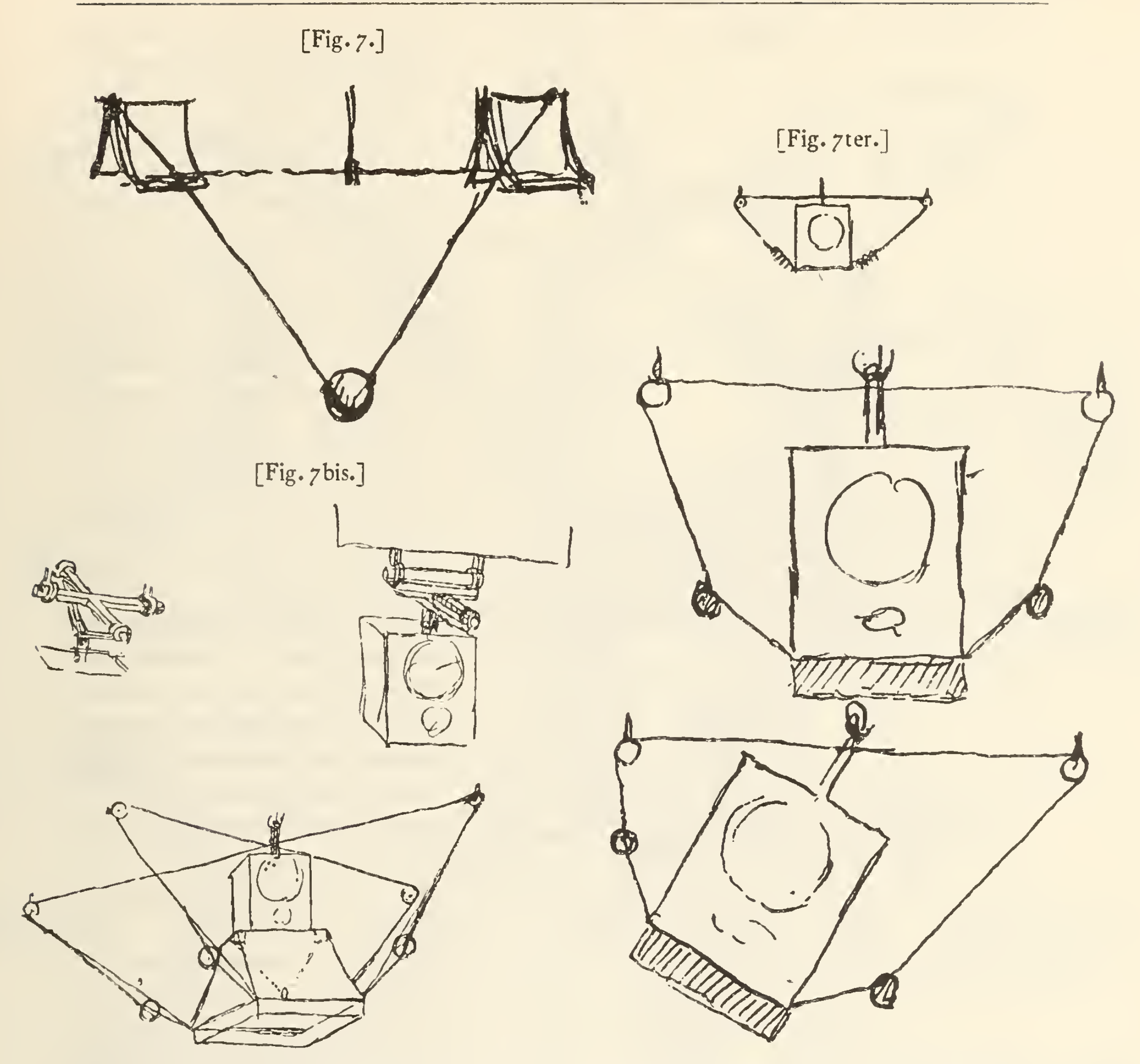
[1]) Voir les p. 183—186 du T. XVII (ſympathie des horloges).

[2]) Nous avons déjà dit au T. XVII (p. 168 et ſuiv.) que l'horloge à pendule triangulaire de 1671 ne doit pas être confondue avec le „drykantig ſlingerwerck" de 1663.

[3]) Voir la note 3 de la p. 14 qui ſuit. Comparez les p. 142 et 210 du T. VII.

[4]) P. 289. La p. 287 du Manuſcrit D porte la date du 29 ſeptembre 1671.

[5]) Manuſcrit D, p. 293.



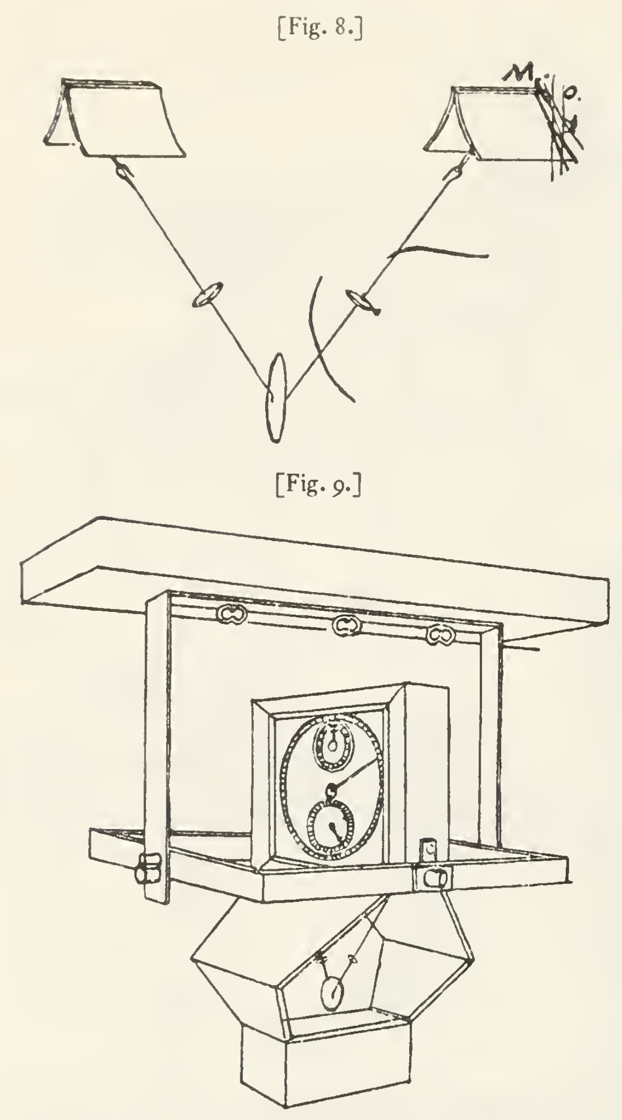
Nous reproduisons aussi [Fig. 8] le dessin plus achevé du même pendule, où le poids n'est plus sphérique et où le fil porte deux poids curseurs, ainsi que celui de l'horloge entière [Fig. 9] qui se trouvent l'un et l'autre sur la feuille détachée déjà mentionnée au T. XVII[7]). Ces deux figures

---

[6]) Nous avons dit à la p. 547 du T. XVII que le nombre des dents de la roue de rencontre doit de préférence être impair; il n'en était pas toujours ainsi, comme cela ressort aussi de ce que Huygens dit à la p. 491 du T. VI sur la verge à palettes ou „eguille du balancier" (comparez la note 6 de la p. 9 du T. XVII).

[7]) T. XVII, p. 142. Il s'agit du feuillet 158—159 des „Chartæ mathematicæ". La p. 323 du Manuscrit D porte un dessin au crayon du même genre.

[Fig. 8.]



[Fig. 9.]

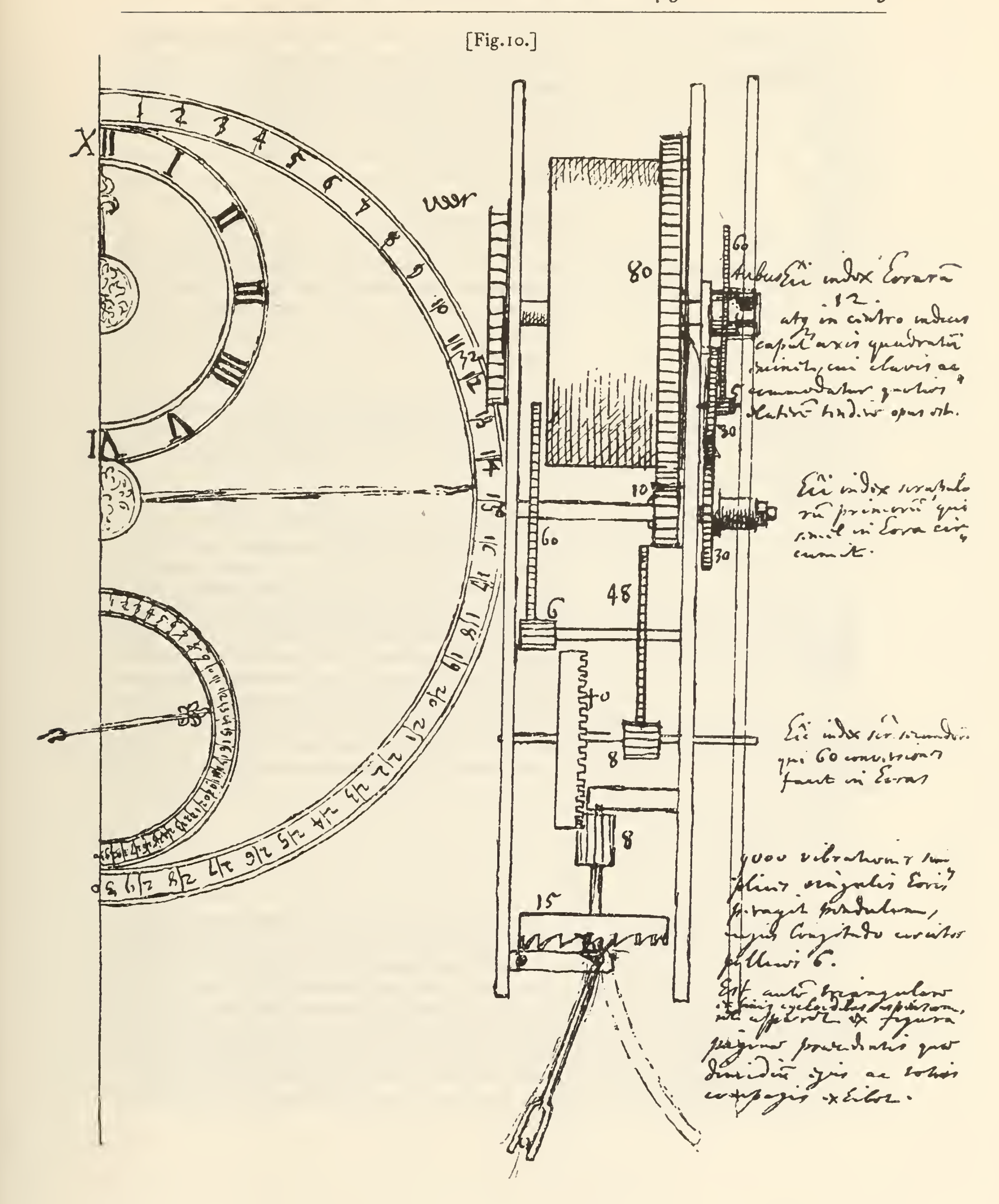
reſſemblent beaucoup aux figures correſpondantes de l'„Horologium oſcillatorium" [1]). Mais ce dernier livre ne contient pas de deſcription de l'intérieur de cette horloge marine [Fig. 10], lequel a été eſquiſſé en 1672 par Huygens, avec la moitié du cadran, dans le Manuſcrit D [2]), où ſe trouve auſſi une figure [Fig. 11] faiſant voir e. a. la poſition, par rapport au pendule et aux roues qui mènent les aiguilles, de quelques boulons [3]). Le fait que dans la Fig. 11 il n'y a pas de poids curſeurs ſur le fil du pendule eſt peu important. D'après la Fig. 11 le poids du pendule est apparemment une lentille. Dans la Fig. 10 une des parties ſupérieures du fil du pendule eſt ſeule repréſentée: elle porte à ſon extrémité la boucle par laquelle doit paſſer le crochet qu'on voit dans la Fig. 11. On lit dans la Fig. 10: „Mon Horologe pour les Longitudes. — hîc index horarum 12. atque in centro indicis caput axis quadratum eminet, cui clavis accommodatur quoties elaterem tendere opus eſt. — hîc index ſcrupulorum primorum qui ſemel in hora circumit. — hîc index ſcr. ſecundorum qui 60 converſiones facit in horas. — 9000 vibrationes ſimplices ſingulis horis peragit pendulum, cujus longitudo circiter pollices 6. — Eſt autem triangulare ex binis cycloidibus ſuſpenſum, ut apparet ex figura paginæ præcedentis [Fig. 11] quæ dimidium ejus ac totius compagis exhibet".
Dans la Fig. 10 Huygens a indiqué les nombres des dents de toutes les roues ainſi que ceux des pignons.

[1]) Fig. 21 et 22 des p. 120—121 qui ſuivent.

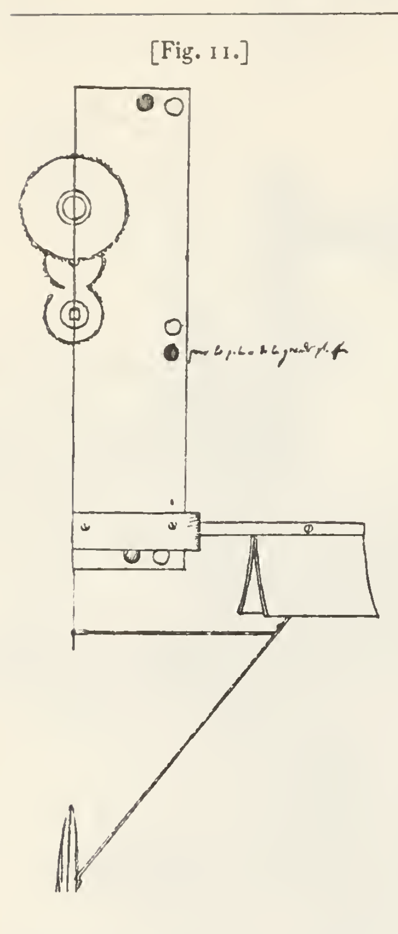
[2]) P. 320—321. La p. 316 porte la date du 16 août 1672.

[3]) On lit dans cette dernière figure auprès d'un des boulons les mots: „pour le pilier de la grande plaque".

[Fig.10.]



[Fig. 11.]



On trouve, écrits au crayon, les mots tubus à droite près de „index horarum 12" et veer [reſſort] à gauche à la hauteur du tambour à droite qui contient le reſſort moteur. L'horloge n'a apparemment qu'un reſſort unique, comme nous l'avons déjà dit à la p. 182 (l. 12—13) du T. XVII. Il eſt vrai que dans l'„Horologium oſcillatorium", comme ailleurs, Huygens ne dévoile pas tous ſes ſecrets; comparez les notes 2 et 6 des p. 246—247 du T. XVII; pour ſaire voir qu'il n'y a qu'un reſſort il ne ſuffit donc pas de citer la phraſe (p. 123 qui ſuit): „Motus rotarum omnium non à pondere ſed à chalybea lamina, tympano incluſa, principium habet". Mais dans la figure rien n'indique que le grand reſſort ſervirait à remonter un deuxième reſſort plus petit. La roue (?) à „32" dents (?), placée en dehors de l'eſpace compris entre les deux platines, et auprès de laquelle ſe trouve le mot „veer" écrit au crayon, eſt ſans doute aſſez myſtérieuſe, mais nous ne penſons pas qu'il puiſſe s'agir d'un deuxième reſſort placé en cet endroit [1]). Remarquons encore qu'il n'y a pas de ſuſée dans l'horloge de 1672 [2]).

Les arcs cycloïdaux, fruit principal des recherches théoriques de Huygens [3]), reſtèrent en uſage. La p. 12 du T. VII de 1670 ſuffirait pour ſaire voir combien il était convaincu de leur utilité pratique [4]). Dans l'horloge à pendule triangulaire ces arcs ſont fort larges à cauſe de l'obliquité des fils qui doivent s'y appliquer. Il faut bien remarquer, ce que Huygens ne fait pas dans l'„Horologium oſcillatorium", qu'en vérité la démonſtration de l'„iſochroniſme de la cycloïde" n'eſt pas applicable au cas de fils obliques, de ſorte que, ſi les arcs peuvent avoir eu quelque valeur ce qui eſt douteux [5]), ce n'eſt pas parce qu'ils poſſédaient une forme théoriquement correcte. Quant au fil, c'était probablement déjà en 1672 un fil de ſoie: beaucoup plus tard [6]) Huygens parle expreſſément d'un fil de ſoie rouge.

---

[1]) Dans la première montre à ressorts à remontage fréquent de 1665 de Huygens le deuxième ressort se trouvait „sur l'axe mesme de la roue de rencontre"; et dans la deuxième sur „l'axe de la roue suivante" (T. V, p. 525). Dans la montre de Thuret de la même année (T. V, p. 511) le deuxième ressort était également „engagé dans le tour intérieur de la roue qui meut celle de rencontre". On peut aussi le placer ailleurs. R. T. Gould („The Marine Chronometer" p. 140) dit: „The remontoire [c.à.d. le deuxième ressort (ou le deuxième poids) du remontoir] may be, and has been, installed at any point in the train. It will be recalled that Huygens fitted his in the crown-wheel [c.à.d. dans la roue de rencontre, comparez la fin du deuxième alinéa de la p. 15 du T. XVII; ceci est exact pour la première montre dont nous venons de parler; il est

Les remontoirs à poids moteurs de 1664—1665 ne furent-ils donc jamais essayés sur mer? Nous n'oserions l'affirmer. En 1668 l'amiral hollandais van Gent paraît s'être servi d'une ou de plusieurs horloges marines[7]). Ce qui est certain c'est que D. Suerius en eut une ou plusieurs en 1672[8]); celles-ci peuvent avoir été des remontoirs de S. Oosterwijck qui les vendait (à moins qu'il n'ait vendu d'autres horloges marines) avec l'Instruction de Huygens de 1665[9]).

II. Horloges astronomiques.

En 1666 Huygens apporta à Paris, outre ses deux remontoirs (note 13 de la p. 9), ses horloges astronomiques sur lesquelles on peut consulter la note 10 de la p. 31 du T. XVII: ce fut „une pen-

vrai que l'auteur ne parle pas de cette montre, mais d'un remontoir à poids], Sully in the centre wheel, etc.... a patent taken out by Weber in 1854 covers the use of a remontoire [ressort] in the great wheel itself (in lieu of a fusee)". Voir pour l'expression „great wheel" (et aussi pour l'expression „centre wheel") les notes 1 et 2 de la p. 75 du T. XVII, où il s'agit d'une horloge à poids moteur unique. Dans la Fig. 10 ici considérée la „grande roue" est celle qui fait corps avec le tambour (comparez la p. 72 du T. XVII), mais, comme nous le disons aussi dans le texte, nous ne pensons pas qu'il puisse être question ici d'un deuxième ressort coäxial avec la grande roue.

²) Dans les horloges à pendule astronomiques et de chambre la fusée fut déjà supprimée en 1657 (p. 72 du T. XVII). Huygens la réintroduisit plus tard dans son horloge marine (voir la note 12 de la p. 31 du T. XVII). Remarquons dès maintenant qu'en ce temps (1686) il y est question de deux ressorts; il y avait „dubbele ontsluijtingh" (T. IX, p. 74): cette horloge était un remontoir où le remontage avait lieu deux fois par minute. Les termes de l'Instruction ne font malheureusement pas connaître la position du petit ressort.

³) Voir p.e. les p. 345 et 392—413 du T. XVI et 95—96 du T. XVII.

⁴) Nous saisissons cette occasion pour remarquer que dans les horloges de chambre néerlandaises du dix-huitième siècle on trouve encore parfois des arcs cycloïdaux.

⁵) Voir dans le livre „The Evolution of Clockwork etc." de J. Drummond Robertson (comparez sur ce livre la p. 546 du T. XVII) la critique des arcs cycloïdaux des horloges marines par R. Hooke (p. 167—173). Nous pouvons toutefois remarquer à ce propos qu'un des célèbres time-keepers de Harrison (1693—1776) du dix-huitième siècle (T. XVII, p. 180), également destiné à la mer, a encore des arcs de ce genre. Il y a également des arcs cycloïdaux dans les horloges marines construites en France par H. Sully (1680—1728); voir les p. 28 et suiv. de „The Marine Chronometer" par R. T. Gould.

⁶) Manuscrit F, p. 216, datant de 1685 ou 1686. On trouvera ce passage plus loin dans le présent Tome; voir à ce sujet les Additions et Corrections.

⁷) T. VI, p. 171, 187. Voir encore sur lui la note 3 de la p. 176 du T. VII.

⁸) T. VII, p. 192, 195, 210. D'après ce dernier endroit le succès fut médiocre. Il est peut-être aussi question d'une horloge marine d'Oosterwijck aux p. 84—85 du T. VII.

⁹) T. V, p. 491. Voir aussi la p. 129 du T. VI. En avril 1667 (T. VI, p. 125) Boulliau pria Huygens de faire venir de la Haye une horloge à pendule de son invention sonnant l'heure et fabriquée par son „ouurier".

dule de M. Hugens" (T. VI, p. 59) dont on se servit dans l'observation d'une éclipse du soleil du 2 juillet 1666 [1]).

L'horloge, de 1672 [2]) ou de plus tôt, par la représentation de laquelle l'„Horologium oscillatorium" débute [Fig. 17 de la p. 71 qui suit], est évidemment aussi une horloge astronomique, puisque c'est après en avoir donné la description que Huygens s'apprête (p. 115) à parler de „illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum investigandarum gratià, formam". Le privilège de Huygens (note 1 de la p. 8) ne s'appliquait qu'aux horloges marines. Nous pouvons toutefois être assurés que les horloges astronomiques se fabriquaient aussi, sans doute depuis 1666, surtout chez Thuret: c'est son nom qui figure sur la vieille horloge de l'Observatoire de Leiden — voir la p. 19 — presque conforme à celle décrite dans l'„Hor. osc." et couramment appelée „horloge de Huygens".

Dans sa Dédicace au Roi (p. 77) Huygens dit qu'il y avait des horloges de sa façon, „nec pauca", dans l'Observatoire de Paris bâti en 1667—1672 [3]). Les horloges astronomiques sont mentionnées aussi par Jean Picard dans son „Voyage d'Uranibourg": Picard partit de Paris en juillet 1671, emportant „deux horloges à pendule, l'une à secondes, & l'autre à demy-secondes, toutes deux à contrepoids" [4]). À la p. 83 il donne à l'une d'elles le magnifique témoignage que voici: *La grande horloge à secondes qui estoit restée dans la Tour* [astronomique de Copenhague], *alloit si régulièrement, que durant plus de deux mois elle demeura dans un mesme estat à l'égard du moyen mouvement sans varier d'une seconde*". Les arcs cycloïdaux contribuèrent sans doute à la régularité de la marche.

Il est d'ailleurs difficile d'admettre que Picard n'exagère pas quelque peu. Il faut, s'il dit vrai, que durant ces deux mois la température dans la Tour soit restée sensiblement constante — à moins qu'on n'ait déplacé de temps en temps le poids curseur, ce dont Picard ne dit rien — car, comme nous l'avons déjà remarqué [5]) les horloges de Huygens n'étaient pourvues d'aucun dispositif pour compenser automatiquement la dilatation des métaux, qu'il ne connaissait d'ailleurs pas avant 1667 et à laquelle il ne croyait pas encore, ou tout au plus à demi, en 1690 [6]), malgré l'expérience probablement faite sur ce sujet à l'Académie des Sciences sur laquelle on peut consulter l'Appendice IV qui suit. Picard peut avoir pris des précautions pour assurer cette constance de la température dans le cas considéré, puisqu'il connaissait l'influence du temps sur la marche des horloges (même Appendice).

Jean Richer à la p. 6 de ses „Observations astronomiques et physiques faites en l'isle de Caïenne" [7]) dit de même que déjà en 1671 avant d'entreprendre son voyage il était en possession de „deux

---

[1]) Du moins nous jugeons peu probable qu'on se soit servi en cette occasion d'un remontoir ou „horloge à remontage continuel d'un petit contrepoids" (horloge marine), comme le dit la p. 642 du T. VI.

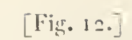
[2]) Voir à la p. 84 qui suit le Privilege du Roy du 4 novembre 1672 pour l'impression de l'„Horologium oscillatorium".

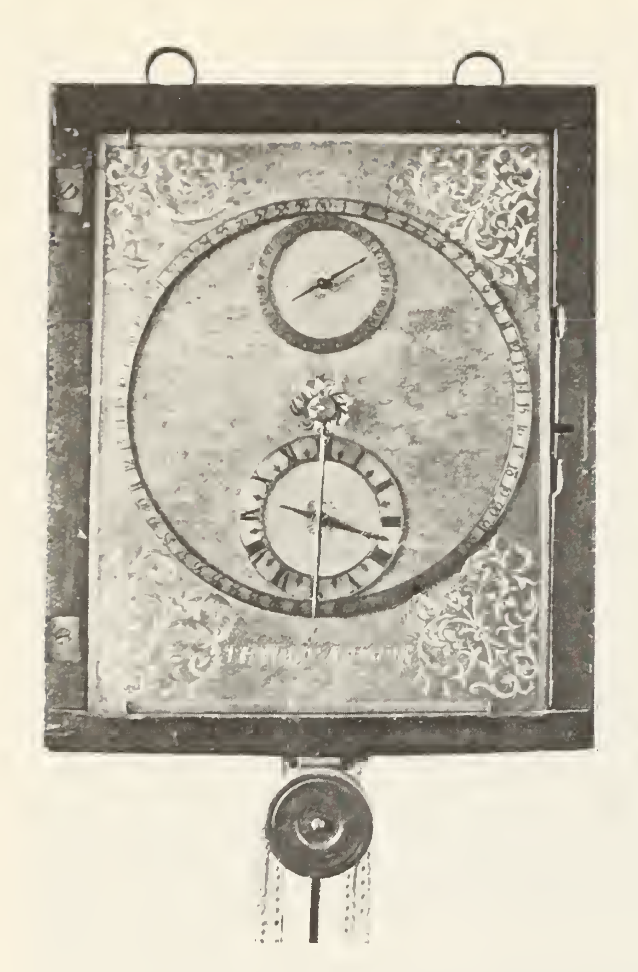
[3]) Les horloges à pendule, mentionnées dans la même Dédicace, qui se trouvaient dans le palais de Louis XIV ont probablement aussi été fabriquées par Thuret qui était „Horloger ordinaire du Roy" (voir la suite du texte). Voir sur ces horloges le dernier alinéa de la p. 103 du T. XVII.

[4]) P. 64 et 68 du „Voyage d'Uranibourg" dans la Première Partie du T. VII des „Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699" (Paris, Cie des Libraires, MDCCXXIX).

[5]) T. XVII, p. 11, note 5 et p. 237, note 3.

[6]) T. XVII, p. 66, note 2.


[Fig. 12.]









Horloges à pendule, dont l'une marquoit les fecondes, & l'autre les demi-fecondes", lefquelles „avoient efté faites par le fieur Thuret Horloger ordinaire du Roy, qui par fon exactitude et la délicateffe de fes ouvrages, a furpaffé jufques à prefent tous ceux qui fe meflent de la fabrique des Montres & des Horloges à pendule".

En 1667 (T. VI, p. 155) Huygens dit généralement que les „pendulifices" parifiens travaillent „pour le moins auffi bien que chez nous".

Nous repréfentons ici [Fig. 12] l'horloge aftronomique, que nous venons de mentionner, de l'Obfervatoire de Leiden, quoiqu'il foit impoffible de dire fi elle a été conftruite avant ou après 1673, ce qui a d'ailleurs peu d'importance vu l'accord presque complet avec celle de l'„Horologium ofcillatorium" datant d'avant 1673. D'après F. Kaifer („Gefchichte der Sternwarte in Leiden", 1868) cette horloge eft mentionnée dans un catalogue de B. de Volder datant d'environ 1705. Toutefois cette lifte d'inftruments appartenant à l'Obfervatoire en 1706 (voir les Réfolutions manufcrites des Curateurs de l'Univerfité de Leiden, ou bien P. C. Molhuyfen „Bronnen tot de Gefchiedenis der Leidfche Univerfiteit", IV, p. 108 *) ne parle que de „Twee horologien wijfende feconden", de forte qu'il n'eft pas démontré que l'horloge en queftion fe trouvait à l'Obfervatoire déjà en ce temps. Les nombres des dents des roues et des pignons font exactement les mêmes que ceux de la Fig. 17 de l'„Hor. ofc.", excepté dans le cas des roues correfpondant à H et I, lefquelles ont, dans l'horloge de Leiden, refpectivement 40 et 20 dents au lieu de 48 et 24. Le poids du pendule de l'horloge de Leiden a la forme d'une lentille; le pendule pèfe 648 gr. (poids) + 45 gr. (verge)[8]; quant à la verge, nous croyons pouvoir admettre qu'elle date de plus tard; c'eft une bande flexible ne portant pas de poids curfeur mais pouvant être allongée ou raccourcie au moyen d'une vis, comme on le voit plus ou moins dans la Fig. 12. L'horloge va toujours bien; lorfqu'elle eft réglée auffi bien que poffible l'erreur ne dépaffe guère 1″ par jour. Sufpendue à hauteur d'homme, elle marche plus de 24 heures[9]), vu qu'en ce temps le poids moteur defcend de 155 cm. L'amplitude des ofcillations eft d'environ 12°.

---

[7]) „Mémoires de l'Académie des Sciences, etc." T. VII (voir la note 4).

[8]) D'après la p. 98 qui suit, le poids de l'horloge de la Fig. 17 pesait trois livres. La livre de ce temps ne différait pas beaucoup de la nôtre; comparez la note 4 de la p. 151 du T. XVII.

[9]) D'après les p. 98—100 qui suivent „dans les meilleures horloges que nous avons jusqu' aujourd'hui, le poids moteur est réduit à six livres" et „suspendue à hauteur d'homme [l'horloge] marche 30 heures".

APPENDICE I

À L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

[1665.][1]

Le Sieur Chrestien Huygens de Zuijlichem, Gentilhomme Hollandois, ayant inventé une nouvelle et très exacte manière d'Horloges à Pendule ajûstées en sorte qu'elles peuvent estre portées sur mer, sans que leur mouvement s'altere par les plus rudes secousses de la tempeste, et en suitte servir à trouver toutes Longitudes, comme desjà la preuve tres-certaine en a esté faicte en des voyages de Long cours, supplie très humblement le Roy, qu'en consideration des peines et fraix qu'il a fallu supporter en travaillant à perfectionner cette Invention tant importante, laquelle d'ailleurs venant à estre mal imitée pourroit causer de grands préjudices et inconveniens à La Navigation, Il plaise à S. M. les gratifier d'un Privilège, en vertu duquel il soit ordonné, que dans les Royaumes[2]) de S. M. personne ne puisse faire ni contrefaire soit entierement ou[3]) en partie, La dite Invention, ni généralement faire des Pendules de la façon qu'il faut pour estre d'usage sur[4]) la Mer, sans la permission du dit Exposant, sur peine de confiscation desdits ouvrages et amendes de . . . Livres Tournois, applicables au prouffit de l'inventeur susdit, et ce pour l'espace de vingt ans.

---

[1]) Le texte de cette Requête (comparez la p. 7 qui précède) a été emprunté au Vol. 127, „Mélanges Colbert", de la Bibliothèque Nationale à Paris. Cette Pièce figure ici comme Appendice, puisque nous ne l'avons reçue qu'après le commencement de l'impression du présent Tome. Elle nous semble être de la main de Constantijn Huygens père.

Ce même texte, avec quelques variantes dans l'orthographie, a été imprimé déjà en 1867 par A. Jal à la p. 695 de son „Dictionnaire critique de Biographie et d'Histoire" (Paris, H. Plon), avec la note: „Bibl. Imp. Lettres reçues par Colbert, 5 fév. 1665". La date du 5 février 1665, sans doute exacte, ne se trouve pas sur le document de la Bibliothèque Nationale.

[2]) A. Jal écrit: „le royaume".

[3]) A. Jal écrit: „soit".

[4]) A. Jal écrit: „à".

APPENDICE II

À L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

[AOÛT OU SEPT. 1668][1]).

CHOSES A CORRIGER AUX PENDULES DE MER[2]).

Mettre des cordes de ſoye au lieu de chaiſnes qui ſe caſſent, et s'accrochent en ſorte qu'elles arreſtent le mouvement de l'horologe.

Je crois qu'avec les cordes le poids deſcendra un peu plus dans 24 heures qu'avec les chaines, a quoy il faudra avoir egard en faiſant les boetes plus longues.

Faire les boetes plus larges afin que le pendule ne puiſſe y heurter.

Mettre plus de poids aux horologes afin que les vibrations du pendule ſoient plus grandes, car eſtant petites, il arrive quelque fois que les palettes donnent contre le coin des dents de la roue de rencontre.

Il faudra que les cycloides ſoient un peu plus eſtendues, afin que le filet plie tousjours contre leur courbure.

Faire les boetes plus fortes et ſur tout la ſeparation entre les poids. Et empeſcher qu'ils ne balottent.

Pour la ſuſpenſion, que l'ouverture du cylindre de cuivre[3]) ſoit plus grande, afin que dans les grandes inclinaiſons du vaiſſeau l'horologe puiſſe demeurer perpendiculaire.

Je crois que ſi le col de la boule[3]) eſtoit plus long, le pendule ſouffriroit moins des tranſports ſubits du vaiſſeau.

---

[1]) L'Appendice II est emprunté à la p. 19 du Manuscrit D. La p. 17 date du mois d'août et la p. 37 de sept. 1668.

[2]) Cette Pièce fut écrite pendant l'expédition du duc de Beaufort (comparez la p. 12 qui précède) qui était parti vers la fin de mars 1668 (T. VI, p. 200) et dont Huygens avait reçu des nouvelles avant le 11 mai 1668 (T. VI, p. 218). Il y avait eu une grande tempête. Les corrections proposées par Huygens sont peut-être une conséquence de certaines remarques (voir le dernier alinéa de la p. 120 qui suit) faites par le duc ou plutôt par de la Voye qui l'accompagnait (voir les p. 226 et 379 du T. VI). Le rapport de 1669 de de la Voye n'existe plus à ce qu'il paraît; nous ne possédons que quelques remarques de Huygens sur ce rapport (voir la note 5 de la p. 117 qui suit).

[3]) Voir le dernier alinéa de la p. 167 ainsi que le No. 12 de la p. 173 du T. XVII. L'expression

Il faut que la boule [3]) ſoit bien arrondie, et il faudra l'uſer dans un creux de grais, ou en y appliquant ce creux quand elle eſt ſur le tour.

Il faut attacher le cylindre de cuivre par 3 vis au fer d'en haut, parce qu'autrement cela balotte comme ſur deux pivots. Et ces eſcrous doivent eſtre plus forts.

Il faut trouver moyen que l'eguille des minutes et des ſecondes ſoient fermement attachees, parce qu'autrement elles ſont ſujettes a demeurer derriere en montant, et avancer plus qu'il ne faut en deſcendant.

Il faut que le crochet au ſommet du pendule ſoit plus profond afin qu'il ne puiſſe facilement ſe decrocher [4]).

Demander les pendules qu'a M. du Seuil qu'il les embale et mette les morceaux de plomb [5]) qu'il doit toutes [ſic] oſter dans la petite caiſſe apart comme de la Voie luy a fait entendre et qu'il decroche les pendules et les enveloppe enſemble dans du papier. Et qu'il face charger les balots ſur un cheval.

„la boule" porte à croire que l'horloge n'était pas suspendue à deux boules mais à une seule (comparez le No. 7 de la p. 26 du T. VII).

[4]) Il est possible qu'une horloge ainsi corrigée fut employée dans l'expédition „vers l'Amérique" dont il est question en avril 1669 (T. VI, p. 428). L'horloge avait été corrigée avant le 13 mars 1669 (T. VI, p. 379). En ce temps la traduction française du „Kort Onderwijs" de 1665 était prête ou peu s'en faut (voir la p. 195 du T. XVII). La liste des corrections est suivie par une Pièce qui se rapporte à cette Instruction; voir les p. 371—372 qui suivent. La suite du texte, qui est écrite en marge, parle peut-être d'un transport de l'horloge corrigée.

En mai 1670 le frère Lodewijk (T. VII, p. 26) parle de divers changements qui peuvent fort bien ne pas avoir été récents. Il dit e. a. qu'il n'y a plus de „bride" au-dessous des arcs cycloïdaux; en d'autres termes le deuxième bras de la „lettre F renversée" de Bruce avait été abolie (voir les p. 166—167 du T. XVII, ainsi que la p. 116 qui suit). D'après la lettre de Lodewijk l'horloge ainsi corrigée fut employée par Richer dans son voyage au Canada etc. de 1670; voir la note 6 de la p. 27, ainsi que les p. 54—55 du T. VII, d'après lesquelles le succès fut médiocre.

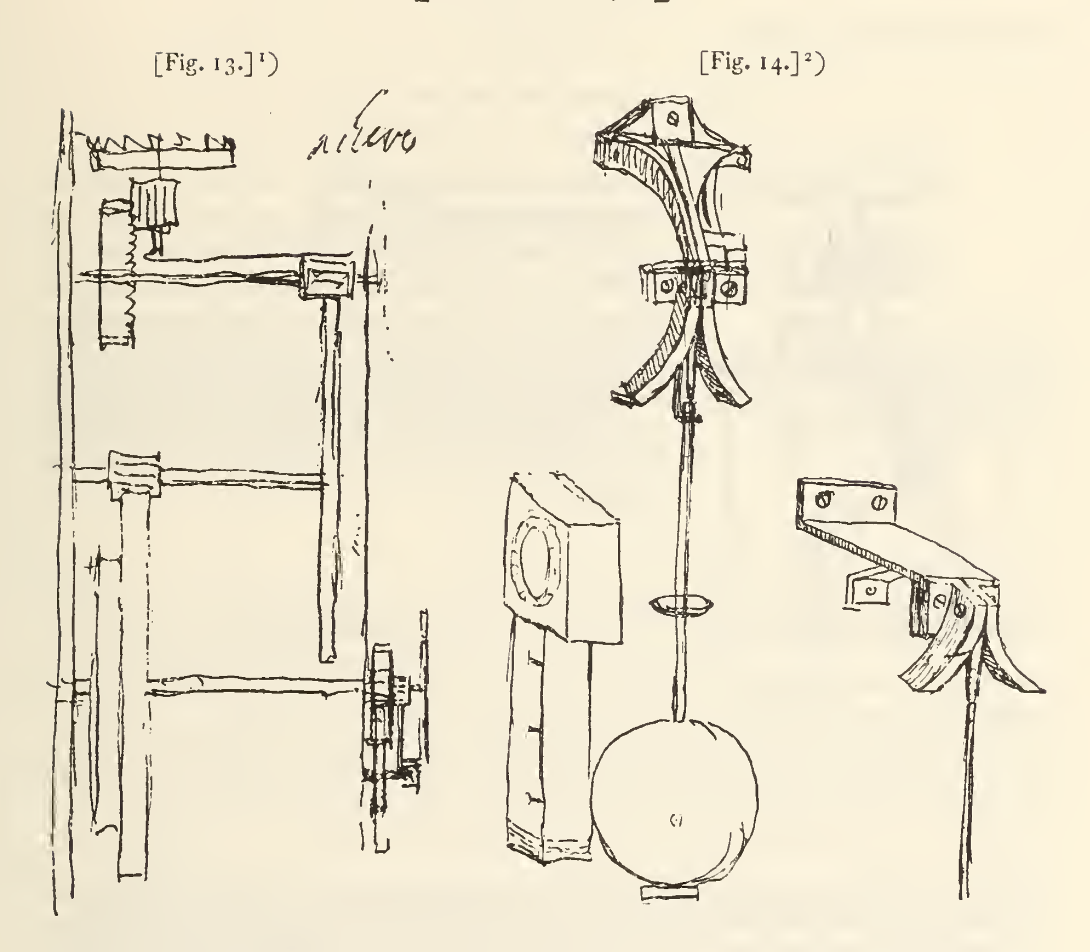
[5]) Leçon alternative: contrepoids.

APPENDICE III

À L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

[1668—1670]

[Fig. 13.] 1) [Fig. 14.] 2)



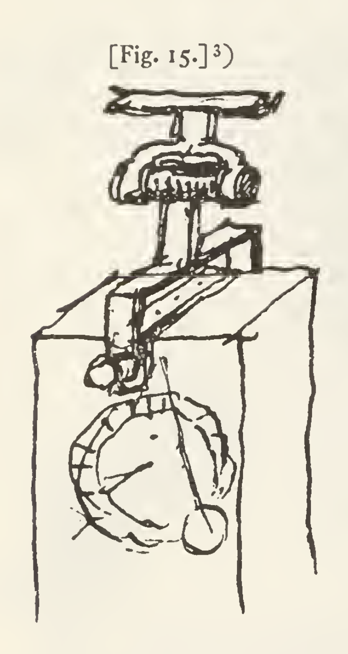
4 pieds de haut [Fig. 14].
14 pouces de large.
lentille de $\frac{1}{2}$ livre.
poids coulant de $\frac{1}{56}$ de livre.
$9\frac{1}{2}$ pouces de pendule.
poli a l'huile pour empefcher la rouille du cuivre.

faire la grande platine plus forte.
arcbouter la piece qui porte les cycloides.
augmenter le poids du pendule.
faire que la suspension de la boete viene directement au-dessus du pendule.

$\frac{1}{360}$ d'une ligne sur la longueur de ce pendule de $9\frac{1}{2}$ pouces fait 1″ seconde de difference en 24 heures.

boete echancree 2 portes.

[Fig. 15.][3]



faire le pendule tres pesant, de 8 ou 10 livres. ou s'il estoit de 3 pieds, le faire de 40 ou 100 livres puis qu'il est d'autant plus juste qu'il est pesant. Les Cycloides fortes a proportion. Mais il faudroit, afin que la boete ne fut point esbranlee, faire l'un des aissieux qui est pour le mouvement a costè, à mesme hauteur que le point de suspension du pendule, comme dans cette figure [Fig. 15]. Il faudroit que ces pieces de fer fussent bien fortes et grosses pour ne pas faire ressort.

[1]) La Fig. 13, où on lit „achevé" date de 1668: elle est empruntée à la p. 36 du Manuscrit D, dont la page suivante porte la date du 21 sept. 1668. Sur cette p. 37 se trouve la figure que nous avons reproduite dans le T. VI entre les p. 260 et 261, de l'horloge envoyée à Estienne à Chartres.

En février 1668 une horloge avait été envoyée à „l'amy de M. de Combes en Canada" (T. VI, p. 190—192).

[2]) La Fig. 14 et le texte qui l'accompagne sont empruntés à la p. 181 du Manuscrit D (février ou mars 1669). Voir encore „une de nos bonnes horologes" vis-à-vis de la p. 491 de 1669 du T. VI.

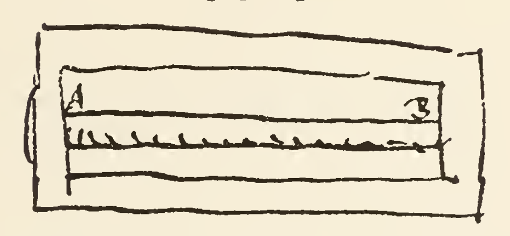
[3]) La Fig. 15 et le texte qui l'accompagne sont empruntés à la p. 254 du Manuscrit D qui porte la date du 15 janvier 1670.

APPENDICE IV [1])

À HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

[1675 ?]

[Fig. 16.]



Pour voir la force de l'extenſion des corps par la chaleur. AB [Fig. 16] cylindre de fer verre marbre ou autre corps dur, que l'on chaufera par le milieu eſtant arreſtè par les bouts dans un chaſſi de fer ou de bois que l'on n'echauffera point, pour voir avec quelle force les coſtez du chaſſi ſeront pouſſez.

---

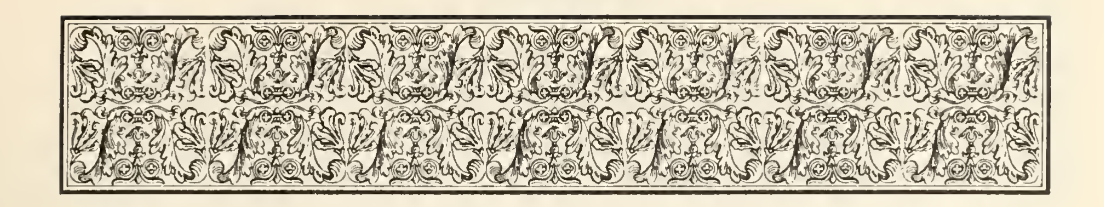
[1]) Cet Appendice est emprunté à une feuille détachée qui se trouve dans le portefeuille „Physica Varia". C'est la feuille à laquelle nous avons déjà emprunté la Fig. 18 de la p. 168 du T. XVI. La date 1675 se trouve à son revers.

Des expériences de ce genre peuvent avoir été faites — l'époque restant toutefois incertaine — à l'Académie des Sciences, puisqu'en 1690 (T. IX, p. 485) Huygens parle à propos de la question de savoir „si sa longueur [c. à. d. la longueur de la verge d'un pendule] s'accroit [par la chaleur] de quelque chose de perceptible", des „experiences que nous fimes a Paris dans l'Academie des Sciences si j'ay bonne memoire". Les derniers mots portent à croire que les expériences, si réellement elles ont été faites, n'ont pas occupé longtemps les membres de l'Académie.

Quoique l'influence de la température sur la longueur d'une verge métallique n'ait pas été étudiée par Huygens, il savait cependant déjà en 1659 que la marche d'une horloge n'est pas absolument indépendante du temps; voir p. e. la note 2 de la p. 66 du T. XVII. Picard, dont nous avons mentionné (p. 18) le voyage d'Uranibourg de 1671, le savait également; voir les p. 9—10 de sa „Mesure de la Terre" de 1671 (Mémoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699, Tome VII, Première Partie, Paris, Cie des Libraires, 1729). Il était accoutumé à observer exactement la marche des horloges (voir la p. 440 du T. VI).

Le fait que Huygens en 1669 ne croyait pas à la dilatation de la verge du pendule est nettement prouvé par sa remarque (T. VI, p. 379) que ses horloges ne sont pas „sujettes aux changements du temps" puisqu'il a „remediè a cela par les Cycloïdes".

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM DE 1673.



Avertiſſement.

Nymphes de Schéveningue habitant l'onde pure,
Vous qui de ces pays protégez la ſtructure [1]),
Délices de tous ceux qui fréquentent vos plages,
Bien aimées de Phébus, eſprits gracieux et ſages,
Veuillez me ſecourir et inſpirer mes chants.
Qu'en revanche ni Pan ni ſes Faunes hideux
Ne ſe puiſſent jamais approcher de ces lieux
Et ſouiller la blancheur de vos flots écumants [2]).

Toi que la Gloire élève au-deſſus du ciel même,
Daigne prêter l'oreille, Huygens, à ce poème
Ecrit en ton honneur, en l'honneur de ton père,
De tes frères auſſi et de ta race entière

---

[1]) En latin (leçon du manuscrit): „Finitimûm tutela". Puisque la mer apporte le sable qui forme les dunes, on peut dire qu'elle protège elle-même la côte et ses habitants. On voit les dunes dans le dessin de Schéveningue par Chr. Huygens par lequel débute le T. XVII.

[2]) Voir la note 6 de la p. 31. Les mots „bien aimées de Phébus" (en latin: „Dilectæ Phoebo") évoquent l'image de la plage ensoleillée.

Dont tu es le fleuron. Tes ſublimes penſées [1])
Dans un cadre mythique ici ſeront placées.
Puiſſe ainſi des anciens la riche fantaiſie
Orner de ſes ſplendeurs la noble aſtronomie.

Qu'on nous pardonne de commencer cet Avertiſſement par une traduction, néceſſairement peu littérale, du début de la „Hadriani Vallii Daphnis Ecloga ad Chriſtianum Hugenium Zulichemium, Conſtantini F." que Huygens a fait imprimer conformément à l'intention de Vallius [2]) dans ſon ouvrage de 1673 [3]). Nos ancêtres du dix-ſeptième ſiècle goûtaient plus que nous les imitations des bucoliques claſſiques [4]). Suivant beaucoup de commentateurs la cinquième églogue de Virgile célèbre Jules Céſar ſous le maſque du héros Daphnis; pareillement chez Vallius ou van der Wall la figure de Daphnis prend de plus en plus les traits de Huygens. Toutefois ce n'eſt pas ſeulement chez Virgile ou d'autres auteurs latins que van der Wall a cherché ſon inſpiration: il mentionne auſſi le poète Aratos, imbu de la ſageſſe d'Eudoxe et de Théophraſte, dont les Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα, fort connus au dix-ſeptième ſiècle, ſont voués en majeure partie à la deſcription des conſtellations [5]).

---

[1]) En latin: „præclara reperta". L'expression „sublime" ne nous paraît pas trop forte. Dans le „Siècle de Louis XIV", Chap XXXI, Voltaire parle de la „géométrie sublime" de Huygens: „On doit à Huygens, sinon la première invention des horloges à pendule [comparez la note 4 de la p. 13 du T. XVII et la p. 60 qui suit], du moins les vrais principes de la régularité de leurs mouvements, principes qu'il déduisit d'une géométrie sublime". Viviani dans une lettre de juillet 1673 (T. VII, p. 286) parle à propos de l'horloge de Huygens de la „sublimità della sua inventiva".

[2]) Voir sa lettre de mars 1665, T. V, p. 291. Consultez sur Vallius (van der Wal, Wall, Walle) la note 8 de la p. 234 du T. II. Huygens lui envoya en 1654 son „De Circuli Magnitudine inventa" (T. I, p. 287, note 4).

[3]) Nous avons déjà publié ce poème datant de 1665 dans le T. V (p. 292—299), où l'on trouve aussi les corrections apportées en 1673 par v.d. Wall suivant le désir de Huygens (dont la lettre fait défaut; voir la réponse de v. d. Wall de mars 1673 à la p. 257 du T. VII). Des trois vers insérés en 1673 en l'honneur de la France et de Louis XIV (voir la p. 34 qui suit) on n'en trouve qu'un et demi dans le manuscrit de v.d. Wall: il paraît par conséquent probable que ces vers soient de Huygens.

Dans la traduction nous avons omis les vers 4—5 (il y faut lire „Pervigilem" au lieu de „Per vigilem"), où il est annoncé que le poème consistera pour la plus grande partie en un discours prononcé par le marin Ancon. Tandis que les noms Thestylis et Corydon sont empruntés à Virgile, Ancon est peut-être une paraphrase de Vallius, puisque le mot ἄγκος signifie vallée.

[4]) Voir p. e. la note 1 de la p. 34 qui suit.

Ce qui nous frappe dans le poème conſidéré — et c'eſt là la raiſon pour laquelle nous accordons aux premiers vers ici traduits une place d'honneur — c'eſt que l'auteur en chantant la louange de Huygens le range du côté de Phébus Apollon [6]) par oppoſition à Pan: c'est dire qu'il le glorifie comme un héros intellectuel recherchant en premier lieu la ſcience pure, la ſcience dans le ſens le plus élevé du mot.

Il convient en effet, puiſque l'„Horologium oſcillatorium" eſt un des chefs-d'œuvre de Huygens, de faire reſſortir, comme nous l'avons auſſi fait brièvement en d'autres occaſions [7]), que le but le plus élevé qu'il ſe propoſe c'eſt d'abord l'étude rationnelle de la géométrie — appelée fort juſtement à la p. 77 qui ſuit „pars multò præcipua" de l'ouvrage de 1673 —, enſuite celui d'approfondir „experientia ac ratione" [8]) la ſtructure de l'univers. On peut dire qu'au fond ces deux études n'en font qu'une: pour Huygens et ſes contemporains la conformité de la géométrie euclidienne avec l'eſpace réel et les objets qu'il contient eſt au-deſſus de tout ſoupçon [9]). Huygens ſe ſent κοσμοθέωρος, pour employer le mot forgé par lui vers la fin de ſa vie. C'eſt pour mieux connaître la ſtructure de l'univers qu'il taille des lentilles, qu'il calcule la marche des rayons dans les lunettes, qu'il s'applique à perfectionner les horloges. Les queſtions pratiques ont leur importance et l'obſervation eſt indiſpenſable. Il n'en eſt pas moins vrai qu'il nous faut auſſi, qu'il nous faut même avant tout [10]), auſſi bien pour les découvertes que pour les inventions, les yeux de l'eſprit; nous avons cité cette expreſſion ſhakeſpearienne dans la note 14 de la p. 343 du T. XVII; nous la rencontrons en 1686 ou 1687 chez Huygens lui-même: à la p. 259 du Manuſcrit F il dit en parlant de la forme ſphéroïdale aplatie que la terre doit avoir en vertu de ſa rotation: „Ad hæc mentis oculos ægrè et quasi caligantes plerique attollunt haud aliter atque ad lucis radios ii qui è diuturnis tenebris emerſere". Ceci ne rappelle pas ſeulement Shakeſpeare, mais ſurtout la fameuſe caverne de Platon [11]).

---

5) Le nom d'Aratos ne se trouve pas dans le poème, mais l'auteur parle (v. 12) des „Commenta Solensia". Or, Soli était le lieu de naissance d'Aratos.

6) Rappelons qu'Apollon est le dieu du soleil et que le mot φοῖβος signifie pur.

7) P. e. à la p. 353 du T. XVII.

8) L. 28 de la p. 197 du T. III.

9) Comparez le premier alinéa de la p. 39 qui suit.

10) Comparez la note 17 de la p. 345 du T. XVII.

11) Il est peu probable qu'il s'agisse ici d'une ressemblance fortuite: Huygens, il est vrai, ne cite nulle part ni Platon ni Shakespeare, mais l'expression τὸ τῆς ψυχῆς ὄμμα se trouve (Ch. 13) dans le Livre VII de la Πολιτεία de Platon, lequel débute par l'image de la caverne.

Dans ſa Dédicace à Louis XIV — dont il eſt déjà queſtion en février 1665 [1]) — Huygens fait reſſortir ſon amour pour la ſcience pure. En inſiſtant en même temps ſur l'utilité générale d'horloges exactes [2]) il exprime ſans doute une penſée propre à faire apprécier ſon ouvrage par les fondateurs de l'Académie des Sciences, mais pour cela il n'a nul beſoin de forcer ſon naturel: il voyait fort bien la néceſſité pratique d'aider les marins à trouver les longitudes [3]). Rappelons auſſi que le travail manuel, la conſtruction d'inſtruments, lui plaiſait depuis ſon enſance [4]). Il n'eſt pas poſſible à l'homme de vivre uniquement ſur les cimes de l'Olympe.

En s'intéreſſant à la fois aux mathématiques pures, à l'aſtronomie, à la phyſique et à la technique et en ne conſidérant pas ces ſciences (ou arts) comme ſéparées les unes des autres par des cloiſons étanches, Huygens devenait un des fondateurs de l'aſtronomie théorique et de la phyſique mathématique et pratique en même temps qu'un promoteur du contact ſouvent étroit qui exiſte de nos jours entre la ſcience et la technique. Déjà au ſeizième et dix-ſeptième ſiècle nous trouvons dans la perſonne de Joſt Burgi un horloger doublé d'un mathématicien. Huygens eſt, lui, un mathématicien doublé d'un horloger. Ses inventions du pendule régulateur librement ſuſpendu [5]), des arcs cycloïdaux [6]), du poids curſeur [7]), dont la première était une heureuſe trouvaille tandis que les deux autres avaient un caractère nettement mathématique — quoique l'idée d'un réglage par le déplacement de certains poids fût ancienne [8]) —, le rapprochèrent des artiſans et le forcèrent de s'aſſocier avec eux tout en gardant à bon droit le ſentiment de ſa prééminence. Il n'eſt certes pas étonnant que les maîtres reconnus de l'art, capables de conſtruire des horloges tandis que Huygens ne conſtruiſait que des modèles [9]), et dont pluſieurs étaient doués eux auſſi d'un eſprit inventif [10]), n'étaient pas toujours diſpoſés à reconnaître cette ſupériorité. Ce que nous

---

1) T. V, p. 246.
2) Comparez sa lettre de février 1665 à Chapelain (note précédente).
3) T. XVII, p. 8—9.
4) T. XVII, p. 248.
5) T. XVII, p. 9 et note 4 de la p. 13.
6) T. XIV, p. 206, T. XVI, p. 345, T. XVII, p. 95—96.
7) T. XVI, p. 414—433, T. XVII, p. 83 (premier alinéa), p. 105—111.
8) T. XVII, p. 28, note 2.
9) Voir la note 2 de la p. 52 du T. XVII, et ce que Huygens écrit en 1683 dans le Manuscrit F à propos du „pendulum cylindricum trichordon" et de l'horloger van Ceulen; consultez sur cet endroit les Additions et Corrections.

avons dit aux p. 8—9 des relations entre Huygens et Thuret fait bien voir combien il était probable que ces deux hommes de mérite ne parviendraient pas toujours à ſe mettre abſolument d'accord [11]).

Huygens s'eſt appliqué à donner à l'ouvrage de 1673 un caractère monumental. Nous avons déjà parlé [12]) du ſoin extrême qu'il mit à donner de pluſieurs théorèmes des démonſtrations fort exactes à la mode d'Archimède. Voir encore ſur ce ſujet le premier alinéa de la p. 50 qui ſuit. Ce n'eſt d'ailleurs pas ſeulement la forme de ſes démonſtrations qui eſt empruntée aux mathématiciens grecs. Nous avons dit à la p. 369 du T. XVI, en parlant de la formule fondamentale des corps oſcillants

$$l = \frac{\Sigma r^2}{nb} \text{ ou, ſi l'on veut, } l = \frac{I}{Mb} \text{ [13])}$$

que dans la Pars Quarta de l'„Hor. oſc." Huygens lui donne avec raiſon une place éminente. Rappelons qu'il trouva la première de ces formules [14]) peu avant le 10 octobre 1664 [15]) et que ce fut également en octobre [16]) qu'il établit enſuite le théorème énoncé à la p. 461 du T. XVI (Prop. XIII de la Pars Quarta de l'„Hor. oſc.") dont nous avons dit à la p. 373 du T. XVI qu'on en trouve de plus dans l'„Hor. oſc." une généraliſation (Prop. XVI de la Pars Quarta) qu'il connaiſſait en 1669 [17]). Ce

[10]) Comparez les p. 159 et 182 du T. XVII.

[11]) Le lecteur aura compris que nous faisons allusion au différend de 1675 à propos du *ressort spiral régulateur du balancier* des montres (comparez sur le *ressort régulateur du balancier* la note 7 de la p. 159 du T. XVII, déjà citée à la p. 3 qui précède), dont il est question plus loin dans ce Tome.

Nous avons parlé dans le T. XVII (p. 80—83) de la dispute de Huygens avec le maître hollandais S. Douw. Voir aussi le passage dont il est question dans la note 9.

[12]) T. XVI, p. 349.

[13]) Où l désigne la longueur du pendule isochrone, I le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe d'oscillation, M la masse du corps et b la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension. Comparez la p. 364 du T. XVI. Voir la note 3 de cette page sur la formule $l = \frac{\Sigma r^2}{nb}$

[14]) Sans toutefois se servir du signe Σ; voir la note 3 de la p. 372 du T. XVI.

[15]) T. XVI, p. 462 et 470—472.

[16]) Voir les l. 4—5 de la note 3 de la p. 461 du T. XVI.

[17]) Et probablement beaucoup plus tôt, peut-être déjà en octobre 1664, vu que la possibilité de la généralisation est assez évidente.

que nous n'avons pas dit dans les notes 3 de la p. 461 et 3 de la p. 462 du T. XVI c'eſt que ce qui permettait à Huygens de tirer immédiatement de la formule fondamentale la propoſition de la p. 461 c'était ſa connaiſſance d'un théorème de Pappus dont il s'était occupé en 1650; voir à ce ſujet la p. 229 du T. XI. Dans l'„Hor. oſc." ce théorème forme la Prop. XII de la Pars Quarta, mais Pappus n'y eſt pas mentionné. Il eſt intéreſſant de noter l'influence directe des recherches des géomètres grecs ſur l'établiſſement des Prop. XIII et XVI.

L'„Horologium oſcillatorium" débute (p. 74—81) par la Dédicace au Roi dont nous venons de parler, où Huygens en le remerciant de ſa libéralité (comparez la note 5 de la p. 4 qui précède) lui adreſſe les compliments d'uſage [1]. En faiſant une alluſion à ſa nationalité en même temps qu'à la guerre de Hollande et en parlant en général de la gloire militaire du règne de Louis XIV, il trouve ſans ſe départir de l'extrême politeſſe rendue néceſſaire par les circonſtances, l'occaſion de dire qu'à ſon avis la gloire la plus haute du règne réſide ailleurs [2]. C'eſt la gloire de Louis XIV protecteur des arts et des ſciences qu'expriment auſſi, avec l'emphaſe obligatoire, les trois vers inſérés par Huygens (comparez la note 3 de la p. 30) dans le poème de Vallius [3]:

Inferior nullis ut item neque Gallia deſit;
Gallia magnanimi Regis ſpendore ſuperba,
Borbonios ignes cui parturit arduus æther [4].

Vallius vient de dire que l'aſtronomie a été cultivée par les Chaldéens, les Babyloniens, les Grecs, les Egyptiens, les Italiens, les Arabes, les Eſpagnols et les Allemands — il eût pu mentionner les Polonais (Copernic) et les Danois (Tycho Brahé), mais il

---

[1]) La Dédicace fut approuvée par J. Chapelain le 4 février 1673 (T. VII, p. 250). Dans sa lettre Chapelain prodigue aussi des louanges au poème de Vallius.

[2]) Voir quelque remarques de Huygens sur la guerre de Hollande de 1672 e. a. aux p. 144, 181—184 et 191 du T. VII.

[3]) Après l'avant-dernier alinéa de la p. 296 du T. V.

[4]) Voir la fin de l'avant-dernier alinéa de la cinquième des pages occupées par le poème de Vallius dans l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium".

[5]) Leçon de l'édition de 1673. Vallius avait écrit (l. 7 d'en bas de la p. 296 du T. V): „suis qui sidera terris". Cette modification n'est pas indiquée à la p. 299 du T. V.

[6]) Voir la p. 258 du T. VII.

eſt évident qu'il n'a pas la prétention d'être complet —; quant aux Allemands: „. . canit . . Daphnis . . tandem quos conſultos Germania miſit Aſtrorum cœlique, ſuæ qui ſidera terræ" [5]), c.à.d. „Daphnis mentionne enfin les aſtronomes provenant de l'Allemagne, étoiles de leur pays". Dans ce catalogue la France manquait; c'eſt pourquoi Huygens, faiſant alluſion à la création de l'Obſervatoire de Paris (comparez la p. 78 qui ſuit) qui n'exiſtait pas encore lorſque le poème fut compoſé, écrit:

> [Daphnis ajoute] que la France elle auſſi, n'étant inférieure à aucune autre nation, ne fait pas défaut,
> La France qui ſe diſtingue par la magnificence et l'éclat de ſon Roi,
> Auquel le ciel s'apprête à vouer les aſtres de Bourbon.

Suivant l'exemple de Galilée qui baptiſa „étoiles des Medicis" les ſatellites de Jupiter, Huygens propoſait en effet [6]) de donner le nom d'„étoiles des Bourbons" aux ſatellites de Saturne dont il avait découvert le premier à la Haye tandis que l'aſtronome italien Caſſini, également appelé à Paris par la libéralité du Roi, ou, ſi l'on veut, par le grand Colbert, et attaché à l'Obſervatoire de Paris [7]) en avait découvert un deuxième vers la fin de 1671 et bientôt après un troiſième. Huygens avait d'ailleurs pris part aux obſervations de Caſſini [8]).

Sans le privilège accordé par Louis XIV (p. 7) et ſans l'appel de Huygens à Paris, il ne ſerait fort probablement pas entré en relations perſonnelles avec I. Thuret. Attendu que la Pars Prima de l'„Hor. oſc." contient la deſcription des horloges aſtronomiques et marines conſtruites à Paris, la Dédicace dit à bon droit qu'une partie de l'honneur de l'ouvrage revient à Louis XIV. Cependant les mots „ante omnia" de la l. 13 de la p. 81 exagèrent évidemment l'importance de la part du Roi dans le développement des ſciences en général et dans la genèſe de l'œuvre de Huygens en particulier. Le contenu des Tomes XVI et XVII fait voir que Huygens, en arrivant à Paris, était en poſſeſſion de tous les matériaux néceſſaires pour compoſer ſon œuvre, comme le dit d'ailleurs déjà un article de P. Tannery imprimé en 1924 dans l'„Hiſtoire Générale du IVe Siècle à nos jours" publiée ſous la direction de E. Laviſſe et A. Rambaud [9]).

---

7) Lorsque Cassini arriva à Paris au commencement de 1669, le bâtiment était élevé au premier étage. Il ne s'y installa qu'en septembre 1672.

8) Voir les notes 11 de la p. 115, 6 de la p. 117, 1 et 2 de la p. 118 du T. XV.

9) Chez A. Colin à Paris, 1922—1924.

Tannery écrit fort justement [1]): „L'ouvrage capital d'Huygens est son *Horologium oscillatorium* publié seulement en 1673; mais ses découvertes sont bien antérieures". Le reste de la phrase: „et avaient été en grande partie communiquées soit à l'Académie des Sciences, soit à la Royal Society" doit toutefois être pris *cum grano salis:* les Pièces des T. XVI et XVII écrites à la Haye avant la création de l'Académie des Sciences sont en majeure partie restées inédites jusqu'à nos jours et Huygens n'avait communiqué à la „Royal Society", ainsi qu'à quelques personnes en France, que quelques résultats sans démonstration [2]).

Huygens ne commença probablement que vers septembre 1669 la rédaction de son ouvrage, avant ou après avoir envoyé à la „Royal Society" au commencement de ce mois les anagrammes du T. VI [3]) qui s'y rapportent en partie. Le programme de la Pars Secunda qui constitue la partie B de notre Appendice II à la Pars Prima date du mois nommé [4]), et les Pièces qui constituent l'Appendice à la Pars Secunda et les Appendices III—V à la Pars Quarta sont de janvier 1670 [5]).

Il paraît donc avoir repris en 1669 le projet de 1660 (voir les p. 117—118 du T. XVII) qu'il disait en janvier 1665 avoir „achevè pour la plus grande partie" [6]).

Vers la fin de janvier 1670 Huygens tomba malade. Il fut visité par Fr. Vernon qui écrit le 25 février [7]) avoir reçu de lui un paquet cacheté contenant la solution des 12 anagrammes de septembre 1669, c.à.d. des 12 [8]) propositions sur le mouvement avec leurs démonstrations [9]). Lodewijk Huygens qui vint tenir compagnie à son frère mit G. Mouton [10]) au courant en juin 1670 ou plus tôt du titre du livre et du fait qu'il paraîtrait, suivant l'expression de Mouton, „dans l'Esclat & la majesté de ses belles demonstrations". La rédaction d'une partie des démonstrations de l'„Hor. osc." avait apparemment eu lieu avant la maladie. Il ne peut en effet être question

[1]) À la p. 414 du T. VI; son article intitulé „Les Sciences en Europe" constitue le Ch. X du Tome VI.

[2]) Voir e. a. les p. 331 et 375 du T. XVI et 241 du T. XVII, ainsi que les notes 2 de la p. 370 du T. XVI et 2 de la p. 246 du T. XVII.

[3]) T. VI, p. 487—490.

[4]) Voir la note de la partie B de l'Appendice nommé.

[5]) À moins que l'Appendice III à la Pars Quarta ne date déjà de la fin de 1669 (voir la note 1 de la première page de cet Appendice).

[6]) T. V, p. 187, citée aussi dans la note 11 de la p. 119 du T. XVII.

[7]) T. VII, p. 10.

[8]) Ou plutôt 10, comme le dit la note 17 de la p. 10 du T. VII; ou bien 11 en comptant deux fois le N°. 5; voir la p. 487 du T. VI.

dans le cas du paquet cacheté de Pièces publiées dans le T. XVI ſeulement [11]) puisque les propoſitions des anagrammes contiennent quelque choſe de plus ſur le „rectangulum diſtantiarum" (T. XVI, p. 373). C'eſt ſans doute à la Haye à la maiſon paternelle où il ſéjourna du 9 ſeptembre 1670 [12]) au 12 juin 1671 [13]) — et peut-être dans le même cabinet d'étude où il avait rédigé les parties achevées avant 1665 de l'ouvrage tel qu'il ſe le figurait en 1660, et avant elles les longues démonſtrations géométriques de la Dioptrique qu'on trouve dans le T. XIII — que Huygens continua ou termina la rédaction des démonſtrations de l'„Hor. oſc.". Pendant ce travail il a pu avoir la même impreſſion qu'en 1663 où dans une lettre à J. de Witt (T. IV, p. 311) il ſe dit „miratus . . . quæ momento pene temporis cogitatione complecti ac ſingula perſequi poteram, tot verbis, ut legenti plana fierent, opus habere". Le 9 mars 1672 [14]) il eſt déjà queſtion dans une lettre de lui d'„achever noſtre impreſſion", quoique le permis d'imprimer (voir la p. 84 qui ſuit) ne date que du 30 ſeptembre 1672. Ajoutons que Huygens reçut la première feuille imprimée peu avant cette date (T. VII, p. 229) et que l'impreſſion fut terminée avant mai 1673 (T. VII, p. 269). Nous avons dit dans le T. XVII [15]) qu'il eſt poſſible qu'une démonſtration auſſi exacte que poſſible du tautochroniſme de la cycloïde ait exiſté dès 1664.

C'eſt ici le lieu de remarquer que, quelque peine que Huygens ſe ſoit donné pour rendre ſes démonſtrations rigoureuſes, celle du tautochroniſme de la cycloïde, ou plutôt une de celles qui ſe rapportent au mouvement d'un point peſant ſuivant une courbe matérielle cycloïdale ou autre ſituée dans un plan vertical, fut pourtant jugée inſuffiſante par Newton: voir les p. 326—327 du T. VII, où Newton critique la phraſe: „cum flexus ad B nihil obſtare motui ponatur" de la l. 35 de la p. 145 qui ſuit. La raiſon pour laquelle cette ſuppoſition n'a pas été mentionnée parmi les hypothèſes fondamentales de la Pars Secunda c'eſt ſans doute que Huygens ne croyait cette

---

9) Des 11 propositions 5 se rapportent à la force centrifuge, dont les démonstrations datent déjà de 1659 (voir le T. XVI), une au mouvement cycloïdal, 5 au centre d'oscillation, donc à la Pars Quarta.

10) Qui avait fait présent en avril à Huygens de son livre mentionné dans la Prop. XXV de la Pars Quarta de l'„Hor. osc.". Voir sur ce livre la p. 59 qui suit.

11) Le paquet contenait sans doute le Manuscrit „De Vi Centrifuga". Il peut avoir contenu aussi des brouillons collés (plus tard?) dans le Manuscrit B (T. XVI, p. 374, note 3).

12) T. VII, p. 37, note 9.

13) T. VII, p. 78, note 1.

14) T. VII, p. 152.

15) Note 2 de la p. 139.

ſuppoſition pratiquement vraie (c'eſt là auſſi l'opinion que Newton lui attribue) que dans le cas limite où la ligne briſée devient une courbe. Il eût ſans doute pu faire mention de cette conviction dans les hypothèſes fondamentales; mais dans ce cas n'aurait-il pas été obligé d'y parler auſſi de l'hypothèſe de la rigidité abſolue des courbes matérielles qui ne ſe déforment pas par le mouvement du mobile, et n'aurait-il pas dû diſſerter ſur la poſſibilité d'identifier plus ou moins le mouvement réel d'un petit corps avec celui du point peſant ſans aucunes dimenſions qui conſtitue le mobile de tous les théorèmes de la Pars Secunda? Des diſcuſſions de ce genre l'euſſent entraîné aſſez loin ſans contribuer, nous ſemble-t-il, à la clarté de l'expoſition. Toutefois l'obſervation de Newton mérite certainement notre attention: elle nous fait bien voir qu'une mécanique rationnelle abſolument conforme à l'obſervation eſt une chimère. Pour pouvoir appliquer nos théories de phyſique mathématique à ce qui nous paraît être la réalité objective, il eſt néceſſaire d'idéaliſer cette dernière; comparez le premier alinéa de la p. 256 du T. XVI ainſi que la p. 241 du T. XVII.

Dans la Pars Quarta on rencontre également une ſentence qui donne à réfléchir; Huygens y dit (Hypoth. II) qu'un pendule matériel parcourt des arcs égaux en montant et en deſcendant et il ajoute: „De pendulo ſimplici hoc demonſtratum eſt prop. 9 de Deſcenſu gravium. Idem vero et de compoſito tenendum eſſe declarat experientia". La propoſition repoſe donc ſur certains principes (les hypothèſes de la Pars Secunda) pour le pendule ſimple qui eſt une fiction, mais pour le pendule compoſé ſeul exiſtant elle eſt indémontrable et relève directement de l'expérience. On pourrait ſe demander quelle eſt dans ces circonſtances la raiſon d'être de la démonſtration donnée pour le pendule ſimple. Gardons-nous cependant de critiquer ici l'œuvre de Huygens. Nous pouvons être aſſurés qu'en cet endroit il s'eſt critiqué lui-même [1]): il eût ſans doute été heureux de donner une démonſtration, baſée ſur des hypothèſes évidentes, de la réverſibilité du mouvement du pendule compoſé, et il n'a dû invoquer qu'à regret le recours à l'expérience directe. D'ailleurs il n'y a ici, malgré ſon déſir de faire la part de la raiſon pure auſſi grande que poſſible [2]), aucune contradiction réelle: les hypothèſes de la Pars Secunda, tout auſſi bien que l'hypothèſe

[1]) Le choix des hypothèses était évidemment pour Huygens une chose fort importante; voir sur celui des hypothèses du Traité „De Motu Corporum ex Percussione" les notes 5 de la p. 94, 2 de la p. 96, 7 de la p. 97, 5 de la p. 124 et 5 de la p. 221 du T. XVI.

nommée de la Pars Quarta, ont apparemment été tirées de l'expérience ou, si l'on veut, suggérées par elle. Quant à la Pars Tertia, entièrement géométrique, elle n'est précédée d'aucune hypothèse: voir ce que nous avons dit à la p. 31 sur la conformité jugée certaine de la géométrie euclidienne avec l'espace réel et les objets qui s'y trouvent.

L'autre hypothèse, la première, de la Pars Quarta, c'est le célèbre principe — évidemment emprunté lui aussi à l'observation — que par le mouvement spontané d'un groupe de corps partant du repos leur centre commun de gravité ne peut pas s'élever à une hauteur supérieure à celle qu'il avait au commencement. Nous nous sommes suffisamment étendus sur ce principe dans les Tomes précédents [3]; cependant nous devrons y revenir plus loin dans le présent Tome à l'occasion de la „Controversia" qui s'engagea plus tard (et même déjà avant 1673) sur ce sujet.

À propos de cette hypothèse de la Pars Quarta nous devons d'ailleurs remarquer que déjà dans la Prop. VI de la Pars Secunda Huygens admet que le centre de gravité d'un corps ne peut pas s'élever spontanément, mais sans avoir énoncé cette hypothèse au début de la Pars Secunda.

Il nous semble parfaitement inutile de donner ici, après tout ce que nous avons dit dans les T. XIV—XVII, un résumé systématique du Traité de Huygens. Nous nous bornons à attirer l'attention sur quelques questions particulières.

Questions de mathématiques pures.

A. *Quadrature du cercle.* Les trois grands problèmes de l'Antiquité, la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle, ont intéressé Huygens depuis sa jeunesse [4]. Il n'a jamais été convaincu de l'impossibilité de la quadrature du cercle et a toujours espéré qu'on finirait par la trouver [5]. On rencontre dans l'„Hor.

---

[2]) Comparez la note 1 de la p. 278 du T. XVI, où nous avons cité l'expression évidemment exagérée „absque experimento" de la Prop. XXVI de la Pars Quarta.

[3]) Voir e. a. les p. 21, 56—57 (et 597), 332 (note 1) et 357—360 du T. XVI et 243 (note 7) du T. XVII.

[4]) Voir sur ce sujet les T. XI, XII et XIV.

[5]) Voir le premier alinéa de la p. 398 du T. VI (polémique de 1669 avec J. Gregory), et le début de la lettre de Huygens à Leibniz de novembre 1674 (T. VII, p. 393). Voir aussi l'opinion de Leibniz (1691) à la p. 34 du T. X, ainsi que la note 1 de la p. 33 de l'article de F. Schuh,

osc." (Prop. IX de la Pars Tertia) quelques théorèmes sur la quadrature des conoïdes et sphéroïdes que Huygens fut amené à établir à la suite de ses recherches sur la quadrature du cercle; voir la lettre de de Sluse de décembre 1657 citée à la p. 211 qui suit et celle de Huygens à de Sluse de février 1658 [1]). Ajoutons en passant que la démonstration de ces théorèmes n'a été publiée par Huygens ni ici ni ailleurs; comparez le deuxième alinéa de la p. 33 qui précède. Nous avons publié les démonstrations de Huygens dans le T. XIV auquel, ici comme dans d'autres cas analogues, nous renvoyons le lecteur dans les notes.

Dans l'„Hor. osc." Huygens n'exprime plus le vague espoir (voir les p. 536—539 du T. XVI) que la recherche des centres d'oscillation pourra conduire à la quadrature du cercle. Comparez la note 2 de la p. 56 qui suit.

B. *Développées et développantes semblables.* À la p. 104 qui suit Huygens pose la question de savoir s'il existe, outre la cycloïde, d'autres courbes telles qu'en choisissant convenablement la longueur du fil à partir d'un point donné de la première courbe, l'on obtient par le développement une courbe pareille. Vers la fin d'octobre 1678 un certain de Vaumesle qui avait lu l'„Hor. osc." découvrit [2]) „que par leuolution de la cycloide circulaire [c.à.d. de la cardioïde, en d'autres termes de l'épicycloïde produite dans le cas où le cercle générateur est égal au cercle immobile] est décrite une autre cycloïde circulaire triple de la premiere". Ceci donna occasion à Huygens de démontrer avant la fin de la même année que par l'évolution d'une épicycloïde quelconque on peut obtenir une épicycloïde semblable. Voir les §§ 2 et 3 de l'Appendice III à la Pars Tertia; c'est une Pièce lue à l'Académie des Sciences le 3 décembre 1678 qui fait défaut dans les Régistres de l'Académie. Jacques Bernoulli publia en mai 1692 [3]) la proposition que la spirale logarithmique a la même propriété et peut même engendrer une spirale égale. La question fut reprise quelques dizaines d'années plus tard par Iac. Hermann [4]) et par G. W. Krafft qui démontra dans son

---

cité aussi à la p. 174 du T. XII: „Sur quelques formules approximatives pour la circonférence du cercle et sur la cyclométrie de Huygens" (Archives néerl. d. sciences exactes et naturelles, Série III A, T. III, la Haye, M. Nijhoff, 1914).

[1]) T. II, p. 134. Comparez la p. 200 du T. XIV.

[2]) T. VIII, p. 117.

[3]) Voir la note 16 de la p. 119 du T. X. Il dit (p. 210 des „Acta eruditorum" de 1692) à propos de la propriété „sui evolutione seipsam describere" de la spirale logarithmique: „quod jam olim

article de 1727 „De Lineis Curvis quæ evolutæ ipſæ ſe generant" [5]) que la cycloïde et la ſpirale logarithmique à angle conſtant de 45° ſont les ſeules lignes qui engendrent des lignes égales tandis que des lignes ſemblables ne peuvent provenir par évolution que des autres ſpirales logarithmiques et des épi- ou hypocycloïdes [6]). Il dit à tort que ce fut Tschirnhaus qui s'occupa pour la première fois (d'après l'article „Inventa nova etc." des Acta Erud. de 1682) de ces dernières lignes. Comparez la fin du § 1 de l'Appendice III nommée. Voir ſur les relations de Huygens avec Tschirnhaus la p. 381 du T. VII ainſi que les p. 499 et 511 du T. IX.

C. *Rayon de Courbure*. On a remarqué qu'en établiſſant la théorie des développées Huygens ne dit rien ſur la courbure. Cantor affirme „dass Huygens an Krümmungsverhältniſſe gar nicht dachte" [7]). Il eſt vrai qu'il n'obſerve pas — non plus qu'Apollonios dans le cinquième livre de ſes „Conica" [8]) — que le point d'interſection de deux normales infiniment voiſines eſt le centre d'un cercle de courbure, mais

etiam Fratri meo obſervatum". On trouve en effet la même choſe à la p. 459 du Tomus Tertius des Opera Omnia de Jean Bernoulli, mentionné dans la note 7 de la p. 43 qui suit.

4) Travail inédit, cité par G. W. Krafft.

5) Cet article occupe les p. 216—230 des „Commentarii Ac. Sc. Imp. Petrop. T. II ad annum MDCCXXVII", Petropoli Typis Acad. MDCCXXIX.

6) Après lui L. Euler traita le même sujet dans son „Investigatio curvarum quæ evolutæ sui similes producunt", p. 3—52 des „Comm. Ac. Sc. Imp. Petrop. T. XII ad annum MDCCXL", Petr. Typ. Ac. MDCCL. Il généralisa la question dans un deuxième article de 1775 intitulé „Investigatio curvarum quæ similes sint suis evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cuiuscunque", p. 75—116 des „Nova Acta Ac. Sc. Imp. Petrop. T. I", Petr. Typ. Ac. MDCCLXXXVII.

7) M. Cantor, „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" III, p. 177 (2ième éd. Leipzig, Teubner, 1901).

8) Les livres V, VI et VII des „Conica", dont le cinquième traite des normales aux coniques, furent publiés pour la première fois en 1661 par Borelli et Abraham Ecchellensis, après que Borelli eut en 1658 retrouvé à Florence le texte arabe (T. II, p. 226, 252). Pour des détails sur ce manuscrit on peut consulter la p. 472 du T. I de la Correspondance du P. Marin Mersenne (note 2 de la p. 52 qui suit). Déjà longtemps avant Borelli Golius avait entrepris le même travail d'après un autre texte arabe mais sans, paraît-il, en pouvoir venir à bout; Huygens le savait au moins depuis 1651 (T. I, p. 161) et évidemment beaucoup plus tôt, puisque son père en fait mention en 1646 dans une lettre à Mersenne (T. II, p. 555) et que ce dernier en parle à la p. 274 de son „Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis" de 1644; mais rien ne démontre qu'il ait vu le manuscrit ou la traduction de Golius. Il convient toutefois d'ajouter que Golius était professeur d'arabe et de mathématiques à l'Université de Leiden lorsque Huygens y étudiait, et qu'il peut fort bien avoir causé avec lui en ce temps sur ce sujet (l. 8 d'en bas de la p. 161 du T. I), d'autant plus que son père connaissait Golius depuis longtemps (voir p.e. la p. 549 du T. XVII). Rappelons que la théorie des développées de Huygens est de la fin de 1659 (T. XVII, p. 147, note 2).

la notion de courbure ne lui était nullement étrangère. On peut voir aux p. 17—18 du T. XVII qu'avant d'avoir trouvé la vraie forme des arcs du pendule (et c'eſt de la conſtruction de ces arcs qu'eſt ſortie la théorie des développées [1]), il compoſait en 1657, du moins en théorie, ces arcs ou „platines courbes" [2]) de portions de circonférences de cercle. D'ailleurs, comme nous l'avons obſervé dans la note 2 de la p. 288 du T. XVII, déjà en 1654 il conſidérait, en s'occupant théoriquement de la taille d'une lentille elliptique, le point où les normales infiniment voiſines de l'axe de rotation d'un ellipſoïde coupent cet axe comme un véritable centre de courbure, quoique ſans ſe ſervir de ce terme [3]).

Dans la partie B datant de 1670 de notre Appendice à la Pars Secunda de l'„Hor. oſc." Huygens détermine la relation qui exiſte dans un cas ſpécial entre deux rayons de courbure, ici auſſi ſans ſe ſervir de ce terme.

En juin 1686 Leibniz publia dans les „Acta eruditorum" [4]) ſa „Meditatio nova de natura anguli contactus et oſculi": il y parle du cercle oſculateur. Comme Kepler (note 3) et Huygens en 1654 — il ne cite d'ailleurs ni l'un ni l'autre — il s'inſpire plus ou moins de la „praxis catoptrica et dioptrica". Leibniz ſéjourna à Paris de 1672 à 1676 et Huygens eut alors une grande influence ſur lui: voir la note 12 de la p. 244 du T. VII, où Leibniz dit e.a. ſur le don que Huygens lui fit de l'„Hor. oſc.": „Id mihi accuratioris Geometriæ initium vel occaſio fuit" [5]). En mars 1691 dans une Pièce envoyée à Leibniz [6])

---

[1]) T. XVII, p. 144, note 1. Comparez ce que dit Huygens à la fin de la Prop. VI de la Pars Tertia de l'„Hor. osc." sur la „superficies secundum cycloidem curvata".

[2]) T. XVII, p. 11, l. 6.

[3]) Huygens peut avoir connu en 1654 (ou plus tôt) les „Ad Vitellionem Paralipomena" de Kepler, où celui-ci (Prop. XX, Ch. III) se sert dans un cas analogue de l'expression „ratio curuitatis"; en considérant une parabole, il parle du „circulus qui continuat rationem curuitatis" en un point donné de la courbe.

[4]) T. X, p. 156.

[5]) Toutefois les considérations de 1686 de Leibniz sur le cercle osculateur manquent d'exactitude et sont même positivement erronées: il dit généralement: „Circuli osculantes inveniuntur per quatuor radices æquales, seu per duos contactus in unum coincidentes". Jacques Bernoulli signala cette erreur dans son article de mars 1692 dans les Acta Eruditorum „J. B. Additamentum ad Solutionem Curvæ Causticæ fratris Jo. Bernoulli, una cum Meditatione de Natura Evolutarum, & variis osculationum generibus". Il y dit (p. 116): „Vidimus . . in osculo primi gradus tres tantum intersectiones coincidere, non duos contactus, qui quatuor intersectionibus æquivalent". Leibniz reconnut son erreur dans l'article publié en septembre 1692: „G. G. L. Generalia de Natura linearum, anguloque contactus et osculi etc.". Dans ces articles Huygens est souvent mentionné. P. e. à la p. 110 de l'article de Bernoulli il est dit que, suivant Leibniz aussi, „Hugenium primum animadvertisse, quod centra osculorum curvas osculantium perpetuo incidant in lineas istas . . quarum evolutione illæ describuntur".

Huygens ſe ſert de l'expreſſion „radius curvitatis" qu'il n'emprunte, ſemble-t-il, à aucun autre auteur. La même expreſſion ſe trouve dans ſon article ſur la chaînette du 5 mai 1691 publié dans la livraiſon de juin 1691 des „Acta eruditorum". Comme ſon frère (note 5) Jean Bernoulli en 1691 ou 1692 témoigne en faveur de Huygens [7]).

Dans le traité poſthume „Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum", Newton parle du „radius curvaturæ" ainſi que du „centrum curvaturæ". D'après les lettres de décembre 1671 de J. Collins à G. A. Borelli et à F. Vernon [8]) ce traité fut prêt pour la preſſe déjà en 1671 [9]), mais il a dû avoir été remanié plus tard par l'auteur puiſque, comme l'obſerve Cantor [10]), il contient des propoſitions rappelant ſi fortement certaines parties de l'„Hor. oſc." que l'on doit admettre „Newton habe dieſe Stellen der M. fl. erſt geſchrieben nachdem er das Hor. oſc. geleſen hatte" [11]). D'ailleurs, dans les deux lettres nommées, Collins donne beaucoup de détails ſur le contenu du traité, mais il ne dit rien ſur la courbure ni ſur l'évolution des courbes, ſi ce n'eſt qu'il a exhorté Newton à publier bientôt ſon ouvrage puiſque „D. Hugenius tractatum de Dioptrica et de Curvarum evolutione jam molitur", ce qu'il avait

[6]) T. X, p. 59.

[7]) Dans ses „Lectiones Mathematicæ de Methodo Integralium, aliisque; conscriptæ in usum Ill. Marchionis Hospitalii, cum Auctor Parisiis ageret Annis 1691 & 1692" (Joh. Bernoulli Opera Omnia Tomus Tertius, Lausannæ & Genevæ, Sumptis Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum, MDCCXLII) il ne se sert pas encore de l'expression „rayon de courbure", mais il parle longuement des cercles osculateurs; il dit p. e. à la p. 432 (Lectio Decima Quinta) en parlant „de centro D circuli osculantis": „Variabunt quoque centra D, adeo ut describant certam quandam curvam EDδ, quam D. Hugenius ostendit esse illam, ex cujus evolutione describitur curva ABβ".

[8]) P. 81 de l'édition de 1856 par J. B. Biot et F. Lefort (Paris, Mallet-Bachelier, 1856) du „Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de Analysi promota etc." Nous avons aussi consulté l'édition de Londres (J. Tonson & J. Watts) de 1722; la première est de 1712.

[9]) Le traité parut en 1736 en anglais („Method of fluxions and infinite series with application to the geometry of curved lines", ed. J. Colson, London); nous avons consulté l'édition latine de 1744 („Is. Newtoni equitis aurati Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica", collegit partimque Latinè vertit ac recensuit Joh. Castillioneus Jurisconsultus, Lausannæ & Genevæ, apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, MDCCXLIV).

[10]) „Vorl. üb. Gesch. d. Math." II, 1899, p. 178.

[11]) On trouve à la p. 104 du T. I des „Opuscula" (note 9) le Probl. V: „Determinare Quantitatem Curvaturæ, quam habet data quævis Curva in dato Puncto". À la p. 113 il est question dans le Coroll. IV de l'Exempl. IV d'un poids oscillant suspendu „in inversis Trochoïdibus" et se mouvant par conséquent „in Perimetro Trochoïdis [i. e. Cycloidis] inferioris", ce qui est évidemment emprunté à l'„Hor. osc.".

appris probablement de Vernon lui-même (voir la p. 36 qui précède). Dans sa lettre du 24 octobre 1676 à Leibniz[1]) Newton dit à propos de ce même traité: „Ipse autem tractatum meum non penitus absolveram, ubi destiti [il ne dit pas quand] a proposito; neque in hunc diem mens rediit ad aliqua adjicienda". Il est possible qu'après l'exhortation de Collins et avant d'avoir reçu l'„Hor. osc." Newton, sachant que Huygens traiterait „de Curvarum evolutione", ait ajouté quelque chose à son traité déjà en 1672, puisque dans sa lettre du 10 décembre 1672 à Collins[2]) il dit que sa méthode ne sert pas seulement à mener des tangentes, mais aussi „ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera *de Curvitatibus* [nous soulignons], Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, etc." (les trois derniers sujets avaient déjà été mentionnés par Collins dans ses lettres de déc. 1671) et que „hanc methodum intertexui alteri isti, qua Aequationum Exegesin instituo, reducendo eas ad Series infinitas". Nous ignorons donc à quelle époque Newton s'est servi la première fois de l'expression „radius curvaturæ".[3]).

Comme dans notre édition du Traité sur la Force Centrifuge (T. XVI), nous nous abstenons généralement dans celle de l'„Hor. osc." de notes traduisant en formules plus modernes les théorèmes de Huygens. On trouve des notes de ce genre dans la traduction allemande publiée en 1913[4]). Toutefois nous avons indiqué dans une note à la Prop. XI de la Pars Tertia que les raisonnements géométriques de Huygens conduisent à la formule générale du rayon de courbure.

Questions de mécanique théorique.

A. *Pesanteur et force centrifuge.* Dans l'„Hor. osc." Huygens s'abstient de toute hypothèse sur la cause de la pesanteur dont il avait traité en 1659 et en 1668[5]); voir

---

[1]) „Commercium epistolicum J. Collins etc.", édition de 1856, p. 137.

[2]) Même ouvrage, p. 84.

[3]) Dans les „Lectiones Opticæ in Acad. Cantabrigiensi Annis 1669, 1670 & 1671 in Scholis publicis habitæ, & ex MSS. editæ, Londini; An. 1729", réimprimées par J. Castillioneus dans le deuxième Tome des „Opuscula" (note 9 de la p. préc.), Newton parle (Lemma IX, p. 164) de „Ad datam quamvis Curvam concursum axis & vicinissimi perpendiculi determinare", mais sans se servir du terme „radius curvaturæ", comme on pourrait le croire d'après la p. X de l'„Editoris Præfatio" dans le T. I des „Opuscula".

[4]) Chr. Huygens „Die Pendeluhr", A Heckscher et A. v. Oettingen, Ostwalds Klassiker d. ex. Wiss. N°. 192, W. Engelmann, Leipzig, 1913.

fur les confidérations de 1659 les p. 244 et 276—277 du T. XVII. Il fe contente de parler (Hyp. II de la Pars Secunda) de la „gravitatis actio, undecunque illa oriatur", fe plaçant ainfi au point de vue phénoménologique de Galilée. Comparez d'ailleurs la note 4 de la p. 277 du T. XVII et remarquez que le calcul de la viteffe $\sqrt{gr}$ (note 7 et 8 de la même page) d'un mobile décrivant une circonférence concentrique avec un grand cercle de la terre eft indépendant de toute hypothèfe fur la nature de la pefanteur. Huygens connaiffait dès 1659 la grandeur abfolue de la force centrifuge. Plufieurs de fes Propofitions fur cette force, p.e. la treizième et dernière, par laquelle fe termine l'„Hor. ofc.", font bien voir — et ceci mérite d'être remarqué — que felon lui [6]) le facteur m de la formule mg eft le même que celui de la formule $\frac{mv^2}{r}$ [7]), réfultat qui, nous femble-t-il, peut provenir tout fimplement de la confidération de 1659 du mobile fufdit décrivant la circonférence concentrique [8]): l'égalité des accélérations centripète g et centrifuge $\frac{v^2}{r}$ dans ce cas peut avoir amené Huygens tout naturellement à admettre auffi l'égalité des *conatus* [9]) (ou forces) correfpondants. Le dernier alinéa de la p. 277 du T. XVII, ainfi que les p. 303 et 304 du T. XVI,

---

[5]) En 1668 (comparez la note 8 de la p. 277 du T. XVII) avait eu lieu à l'Académie des Sciences, d'après les Régistres, une série de conférences sur la nature de la pesanteur; Huygens y avait défendu la théorie, ou plutôt sa théorie à lui, des tourbillons. Plusieurs autres membres n'admettaient nullement des hypothèses de ce genre. Huygens ne publia qu'en 1690 fon „Discours de la Caufe de la Pesanteur" de 1668, publication dont nous avons aussi fait mention à la p. 328 du T. XVI.

[6]) Comparez le Traité sur la Force Centrifuge de 1659 (T. XVI) qui ne fut publié qu'en 1703; voir aussi la fin de la note 2 de la p. 246 du T. XVII.

[7]) Voir sur les formules mg, $\frac{mv^2}{r}$ et $\sqrt{gr}$, qui expriment la pensée de Huygens sous une forme moderne, la p. 245 ainsi que la note 8 de la p. 303 (et aussi la p. 250) du T. XVI. Nous pouvons ajouter que c'est la même „masse" qui intervient selon lui (quoique la notion de la masse comme distincte du poids ne soit pas nettement formulée par lui avant l'apparition des „Principia" de Newton en 1687; comparez p. e. la note 5 de la p. 230 du T. XVI) dans le choc des corps; voir à la p. 180 du T. XVI le dernier alinéa: „Ie considere en tout cecy des corps d'une mesme matiere, ou bien j'entends que leur grandeur soit estimée par le poids" (1669). À la p. 244 de 1668 du Manuscrit E Huygens avait fait cependant une réserve sur ce point, disant: „An vis percutiendi in corpore duro sequatur gravitatem corporis ejusdem. Videbatur succedere in parva quantitate, in magna non item".

[8]) Il est évidemment sans importance que le mobile en question est dans la Pièce de 1659 une particule de „materia subtilis".

[9]) P. 276 du T. XVII, l. 3 d'en bas. Voir aussi le dernier alinéa de la p. 245 du T. XVI.

font voir clairement qu'en étudiant la force centrifuge il a commencé par confidérer le cas où la gravité et la force centrifuge fe balancent.

Dans le début de la Pars Secunda de l'„Hor. ofc." ce font des idées et des théorèmes de Galilée que Huygens précife. Ici comme dans la Pars Quarta et dans les théorèmes V—XIII fur la force centrifuge de la Pars Quinta, c.à.d. dans tout ce qui fe rapporte au mouvement des corps fous l'action de la pefanteur, la philofophie corpufculaire de Defcartes, en d'autres termes la théorie des tourbillons, ne joue aucun rôle.

Voir fur un fujet non traité dans l'„Hor. ofc." les p. 247, 285 et 286 du T. XVII.

B. *Arcs cycloïdaux et pendule compofé.* Les arcs cycloïdaux n'affurent l'ifochronifme que pour le pendule fimple. Quelle doit être en théorie la forme des arcs pour un pendule compofé (en fuppofant toujours le poids du fil négligeable)? C'eft une queftion dont L. Euler s'eft occupé en 1750 [1]). Huygens ne l'a pas abordée. Il fe contente de dire (Prop. XXIV de la Pars Quarta) que les arcs cycloïdaux feraient corrects fi tous les points du corps fufpendu au fil impondérable décrivaient des cycloïdes, ce qui ferait le cas fi ce corps fe déplaçait fans aucune rotation. Voir fur cette queftion l'Appendice IV à la Pars Quarta.

C. *Rectangulum ofcillationis ou rectangulum diftantiarum.* En 1669 Huygens donna le nom de „rectangulum diftantiarum" au produit de la diftance de l'axe d'ofcillation au centre de gravité du corps ofcillant confidéré, par la diftance de ce centre au centre d'ofcillation. Comme nous l'avons dit à la p. 373 du T. XVI, Huygens avait établi en 1664 la conftance de ce produit pour différents axes d'ofcillation parallèles entr'eux dans deux cas: 1. celui où le corps eft une furface ofcillant perpendiculairement à fon plan (T. XVI, p. 508), 2. celui où le corps eft une furface fymétrique par rapport à un axe vertical qui ofcille dans fon plan (T. XVI, p. 528). Il ajoutait, mais fans le démontrer, que le produit nommé eft conftant pour une furface plane quelconque (T. XVI, p. 528, note 2). Il eft entendu que le plan qui contient les deux axes parallèles confidérés paffe toujours par le centre de gravité du corps. Dans l'„Hor. ofc." la conftance du „rectangulum diftantiarum" pour un corps quel-

[1]) „De Motu Tautochrono Pendulorum Compositorum", Novi Commentarii Ac. Scient. Imp. Petrop. T. III ad Annum MDCCL et MDCCLI, Petropoli, Typ. Ac. Scient. MDCCLIII, p. 286—306.

conque oſcillant ſuivant un plan déterminé eſt démontré (Pars Quarta, Prop. XIX) en partant des Prop. VI et XVIII de la même Pars. La Prop. VI établit la formule générale

$$l = \frac{\Sigma r^2}{nb}$$

(voir la p. 33 qui précède) et la Prop. XVIII conduit à la formule également applicable à un corps quelconque

$$l - b = \frac{\Sigma r'^2}{nb},$$

où r eſt la diſtance d'un point du corps à l'axe d'oſcillation et r' celle du même point à un axe parallèle paſſant par le centre de gravité du corps [2]). Comme les deux formules peuvent s'écrire

$$l = \frac{I}{Mb} \quad \text{et} \quad l - b = \frac{I'}{Mb},$$

où M eſt la maſſe du corps et I et I' déſignent les moments d'inertie [3]) par rapport aux deux axes nommés, la deuxième formule réſulte de la première auſſitôt qu'on a établi la relation $I = I' + Mb^2$, ce qui eſt une formule moderne bien connue. Il eſt évident par là que la démonſtration de Huygens conſiſte en ſomme à établir cette relation. Et celle de la Prop. XIX conſiſte à tirer des formules

$$l_1 - b_1 = \frac{\Sigma r'^2}{nb_1} \quad \text{et} \quad l_2 - b_2 = \frac{\Sigma r'^2}{nb_2},$$

qui s'appliquent à un même corps oſcillant d'abord autour de l'axe 1, enſuite autour de l'axe parallèle 2 ſitué dans le plan paſſant par l'axe 1 et le centre de gravité du corps, la formule

$$b_1(l_1 - b_1) = b_2(l_2 - b_2),$$

qui exprime la conſtance du „rectangulum diſtantiarum".

De cette dernière formule réſulte la célèbre Propoſition XX qui exprime la réverſibilité du pendule, puiſque les relations

$$b_1(l_1 - b_1) = b_2(l_2 - b_2) \quad \text{et} \quad l_1 = b_1 + b_2$$

ne peuvent coëxiſter à moins qu'on n'ait auſſi

$$l_2 = b_1 + b_2, \text{ donc } l_2 = l_1.$$

---

[2]) l est la longueur du pendule isochrone, b la distance du centre de gravité du corps à l'axe d'oscillation, n le nombre des particules qui composent le corps.

[3]) Voir la p. 378 du T. XVI.

Si l'on écrit $I = M\rho^2$ et $I' = M\rho'^2$,

où ρ et ρ' désignent des rayons d'inertie (nous continuons à nous servir d'accents pour désigner les grandeurs se rapportant à un axe passant par le centre de gravité), l'équation

$$l - b = \frac{I'}{Mb}$$

donne

$$l = b + \frac{\rho'^2}{b}{}^{1});$$

en d'autres termes ρ'^2 ou $\frac{\Sigma r'^2}{n}$ est identique avec le „rectangulum distantiarum" que Huygens désigne toutefois dans l'„Hor. osc." par le terme „rectangulum oscillationis" ou „spatium applicandum", c.à.d. espace qui doit être divisé par une longueur (savoir b). Voir p.e. dans le calcul du „Centrum oscillationis rectanguli" de la Prop. XXI de la Pars Quarta l'expression „spatium applicandum sive rectangulum oscillationis".

Le calcul pratique de ρ'^2 ou $\frac{\Sigma r'^2}{n}$ exige en général la décomposition de $\Sigma r'^2$ suivant des axes rectangulaires, situés dans le „planum oscillationis" et passant l'un et l'autre par le centre de gravité du corps, en $\Sigma y'^2 + \Sigma z'^2$ (comme on peut le voir dans les exemples que Huygens propose) et l'application des méthodes pour trouver ces dernières sommes, déjà consignées dans une Pièce de 1664 ou 1665 (p. 545—549 du T. XVI) à laquelle sont empruntées les Prop. IX—XI de la Pars Quarta. Les grandeurs $\frac{\Sigma y'^2}{n}$ et $\frac{\Sigma z'^2}{n}$ sont simplement appelées rectangula. Dans l'Appendice II à la Pars Quarta nous les appelons respectivement premier et deuxième rectangulum.

En comparant p. e. le calcul de l'„Hor. osc." dans le cas du rectangle oscillant dans son plan dont nous venons de parler [2]) avec les calculs du T. XVI (p. 456 —

[1]) On trouve pareillement $l = \frac{\rho^2}{b}$ d'après la formule $l = \frac{I}{Mb}$. Ceci correspond à la Prop. XVI de la Pars Quarta, où le numérateur que nous appelons ici ρ^2 constitue, tout aussi bien que le numérateur ρ'^2 du texte, un „spatium applicandum". Toutefois Huygens — et nous suivrons son exemple — réserve l'expression „spatium applicandum" pour le numérateur que nous désignons ici par ρ'^2 exclusivement.

[2]) Huygens ne donne la longueur du pendule isochrone que pour le cas où le rectangle est suspendu en un sommet, mais l'essentiel était de trouver le „rectangulum oscillationis", d'où se déduisent avec une égale facilité les longueurs des pendules isochrones pour des suspensions quelconques.

méthode inconnue dite fort difficile —, p. 463—469 — méthode de réduction, d'après la p. 369, de l'oscillation latérale à l'oscillation perpendiculaire au plan de la figure — et p. 520—523 — méthode générale, d'après la p. 370, pour les surfaces planes symétriques oscillant dans leur plan), on voit combien le procédé de calcul a été successivement simplifié. C'est dans le septième alinéa de la Prop. XXI de la Pars Quarta que Huygens fait connaître la méthode de calcul pour une surface plane quelconque oscillant dans son plan, que l'on peut comparer avec celle du dernier alinéa de la p. 370 du T. XVI.

D. *Méthode de la Prop. XV de la Pars Quarta.* Nous avons dit à la p. 371 du T. XVI que cette méthode était connue à Huygens en 1665, du moins pour le cas particulier des corps de révolution. Il semble fort possible qu'il l'ait conçue déjà en ce temps pour des corps quelconques possédant les propriétés qu'il mentionne dans la Prop. XV. Remarquons que dans son raisonnement géométrique il y fait usage de la règle dite de Guldin qui est en réalité une règle de Pappus: on la trouve à la fin de la Préface du Livre VII de sa Συναγωγή [3]).

Dans la Prop. XXII Huygens cherche le centre d'oscillation de la sphère en se basant sur la Prop. XV; comparez le dernier alinéa de la p. 472 du T. XVI.

E. *Recherche du centre d'oscillation dans quelques cas particuliers.* Dans l'„Hor. osc." Huygens considère quelques cas particuliers qui ne se trouvent pas dans les Manuscrits B et C ni dans les brouillons de 1664, du moins dans ceux qu'il a conservés. Ce sont 1. le polygone régulier à nombre quelconque de côtés oscillant dans son plan (Prop. XXI) [4]), 2. la pyramide [5]), 3. le cône [6]), 4. le cylindre, 5. le demi-cône (Prop. XXII de la Pars Quarta). Voir sur la parabole oscillant dans son plan (Prop. XXI) qu'on ne trouvera pas dans le T. XVI, l'Appendice II à la Pars Quarta qui traite aussi de l'oscillation d'une croix [7]). Dans la Pièce qui constitue le § 3 de notre Appendice III à la même Pars Huygens considère le cas d'un secteur de sphère.

---

[3]) Voir la note 3 de la p. 439 du T. XVI. Pappus a déjà été mentionné à la p. 34 qui précède.

[4]) Comparez le dernier alinéa de la note de la p. 496 du T. XVI.

[5]) Dans l'Appendice III à la Pars Quarta emprunté au Manuscrit D Huygens écrit vers la fin du cinquième alinéa du § 3: „sicut cum de pyramide ageremus ostensum est", ce qui se rapporte à un calcul peut-être ancien que nous ne possédons plus.

[6]) Voir sur le cône la partie D de l'Appendice II à la Pars Quarta.

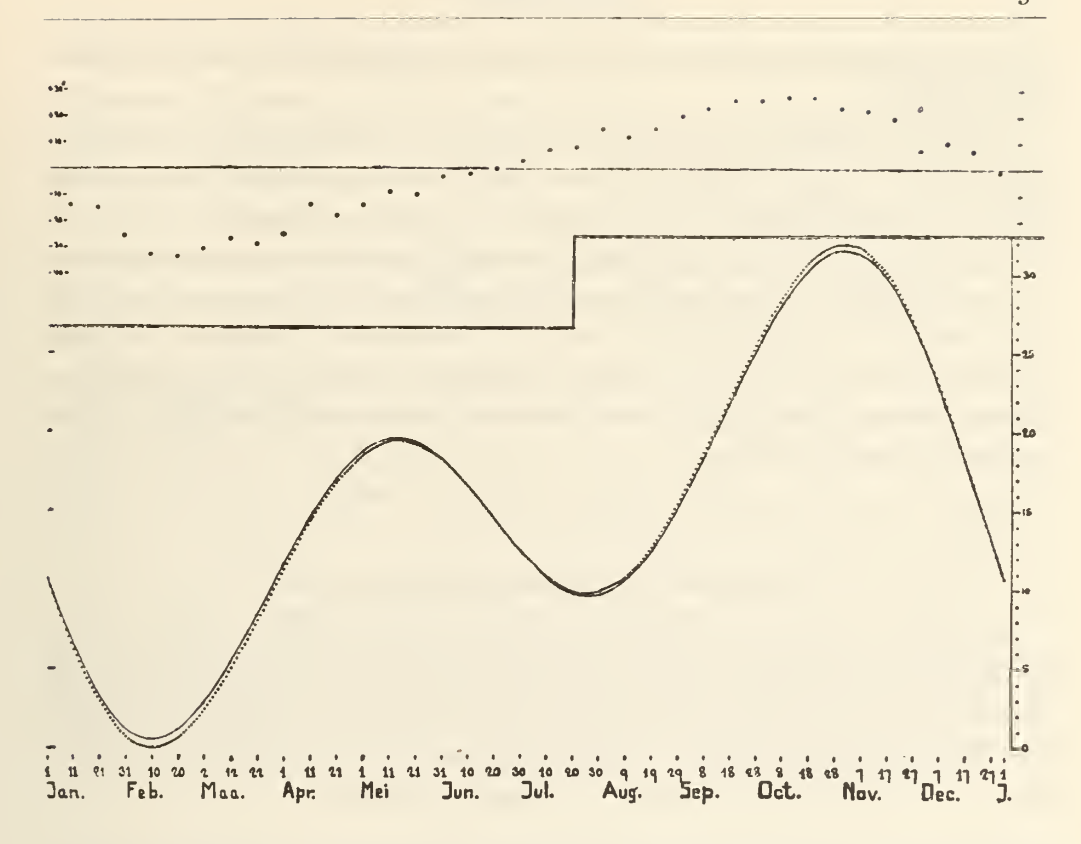
[7]) La partie C de cet Appendice traite de l'oscillation d'un demi-paraboloïde.

A la fin des Prop. XXI et XXII il parle de figures fcalènes, planes ou folides, ifochrones avec les figures droites dont elles proviennent par luxation. Pour prouver cet ifochronifme il fe contente de remarquer que d'après une propofition antérieure les „lineæ graves" dans le premier cas, les furfaces planes graves dans le deuxième, dans lefquelles on peut découper les figures données et les figures fcalènes, font ifochrones deux à deux. Ce raifonnement nous paraît un peu trop court pour être convaincant. Ne fallait-il pas plutôt dire que d'après la formule $l = \frac{\Sigma r^2}{nb}$ appliquée aux éléments ifochrones deux à deux, l'égalité de l et de b entraîne celle de Σr^2, que par conféquent le Σr^2 pour la figure fcalène entière eft égal à celui de la figure droite entière, et que, les b, c.à.d. les diftances des centres de gravité à l'axe de fufpenfion, étant auffi égales entre elles pour les deux figures entières, il en eft de même de leurs l, c.à.d. des longueurs de leurs pendules fimples ifochrones [1])? Et même contre cette preuve-là on pourrait encore faire l'objection qu'elle eft trop conforme à l'efprit de Cavalieri. Il eft vrai que la même objection pourrait être faite contre les démonftrations des Prop. VII—XI et XIII—XVIII de la Pars Quarta puifque les furfaces ou les corps y font confidérés comme compofés de fort petites particules égales parfois repréfentées par des carrés ou points centraux de carrés (Prop. IX, XIII, etc.), d'autres fois p.e. par de petits prifmes ou parallélépipèdes dont il eft dit dans la Prop. VII „totum cuneum ABD componi". La rigueur de ces preuves eft apparemment inférieure à celle des Prop. II—VI, IX, X et XXIV de la Pars Secunda, III de la Pars Tertia et IV—V de la Pars Quarta, où Huygens applique la méthode antique de la réduction à l'abfurde en commençant par fuppofer que l'égalité qu'il s'agit de démontrer n'exifte pas. En revanche, les démonftrations dans lefquelles l'objet mathématique confidéré eft fuppofé découpé en un fort grand nombre de parties font évidemment moins artificielles [2]).

Expéditions pour déterminer les longitudes et Table de l'Equation.

Nous reviendrons plus loin dans ce Tome fur les réfultats pratiques des expéditions

[1]) Comparez la note 3 de la p. 462 du T. XVI.
[2]) Comparez la p. 348 et la note 1 de la p. 378 du T. XVI.



La courbe continue de notre figure, calculée par Mons. P. P. Bruna d'après les données sur l'orbite de la terre de S. Newcomb (1835—1909), donne l'équation du temps pour l'année 1670. La courbe pointillée représente le résultat des calculs de Huygens consigné dans sa Table. Avec Huygens nous prenons ici pour l'équation l'ascension droite du vrai soleil moins celle du soleil moyen, quoique les astronomes modernes aient l'habitude de considérer la différence inverse.

L'équation du temps a été calculée, pour une ascension droite de 0°, 10°, 20° etc. du soleil moyen, d'après les formules du § 494 du T. II de 1892 du „Handbuch der Astronomie" par R. Wolff (Zürich, F. Schulthess).

Les données de la p. 9 du T. VI („Tables of the four inner planets") des „Astronomical Papers for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac" (Washington, Bureau of Equipment, Navy Department, 1898) ont conduit pour les éléments de l'orbite du soleil en 1670 aux valeurs suivantes:

périgée de l'orbite du soleil........ 277°16′9″
excentricité de l'orbite........... 0,0168465
inclinaison de l'écliptique sur l'équateur 23°28′56″,0.

Puisque Huygens ne tient pas compte des années bissextiles nous avons également calculé une table moyenne au lieu d'attribuer à l'équation d'un jour déterminé une période quadriennale. Comme notre courbe s'accorde le mieux avec celle de Huygens (calculée avant le 15 février 1662, impossible de dire exactement pour quelle année) en admettant que le soleil atteint le point vernal le 21 mars à midi, nous avons pris la longueur du soleil égale à zéro pour cet instant-là.

Dans la partie supérieure de la figure, les différences Huygens-Newcomb sont indiquées en secondes. De juillet à décembre ces différences sont positives; de janvier à juin elles sont négatives. La plus grande différence positive est de 27″, la plus grande différence négative de 34″.

mentionnées par Huygens dans la Pars Prima en parlant en même temps des expéditions ultérieures.

Puisqu'une détermination exacte des longitudes à l'aide d'horloges n'exige pas seulement une régularité parfaite de la marche de celles-ci mais aussi l'emploi d'une Table fort juste de l'Équation du Temps, nous nous sommes demandés si la Table des p. 112—113[1]) est absolument correcte. Le doute est d'autant plus permis qu'il eût en tout cas, pour satisfaire à toutes les exigences, fallu calculer des tables pour quatre années consécutives dont une bissextile. On a eu à l'Observatoire de l'Université de Leiden la bonté d'exécuter les calculs nécessaires pour l'année 1670. Dans la figure qui précède on peut voir de combien la courbe correspondant à la Table de Huygens s'écarte de celle calculée à Leiden.

Précurseurs et concurrents de Huygens.

A. *Tangentes aux courbes engendrées par les points d'une figure roulante.* Comme Huygens le remarque dans la Pièce qui constitue la partie A de notre Appendice à la Pars Secunda, il s'est inspiré dans la démonstration générale de la Prop. XV de cette Pars d'une proposition de Descartes et du commentaire de van Schooten sur ce sujet. On peut consulter là-dessus la note 1 à l'Appendice nommé.

B. *Centre d'oscillation et mesure universelle de la longueur.* Aux considérations des p. 349—353 du T. XVI nous devons ajouter quelques mots sur Honoré Fabry, mentionné par Huygens, avec Descartes, dans le début de la Pars Quarta. Nous avons dit à l'endroit nommé qu'avant octobre 1664 Huygens n'avait pas pris la peine de s'enquérir des recherches de Descartes et de Roberval sur le centre d'agitation; comparez la fin de l'alinéa suivant. Le troisième Tome des „Lettres de Descartes" publiées par Clerselier qui contient les lettres de 1646 de Descartes à Mersenne et à Cavendish [2]) sur ce sujet, ainsi que des observations de Roberval, ne parut qu'en 1667. Huygens a appris à le connaître vers ce temps, quoiqu'il n'en fasse mention dans sa correspondance qu'en 1687 [3]), mais il ne discute la théorie erronée de Descartes ni dans l'„Hor. osc."

[1]) Identique avec celle construite avant le 15 février 1662 de la „Brève Instruction" de 1665 (T. XVII, p. 204, note 1 et p. 207).

[2]) Dans le T. XVI, p. 569, nous avons donné à Cavendish le prénom William. D'après la p. 371 du T. IV de l'édition des „Oeuvres de Descartes" par Adam et Tannery, et aussi d'après la p. 654 de la „Correspondance du P. Marin Mersenne" publiée par Mme P. Tannery, éditée et

ni ailleurs. Quant au „Tractatus Phyſicus de Motu locali, in quo Effectus omnes, qui ad Impetum, Motum naturalem, violentum, & mixtum pertinent, explicantur & ex principiis Phyſicis demonſtrantur. Auctore Petro Mouſnerio Doctore Medico: Cuncta excerpta ex prælectionibus R. P. Honorati Fabry, Societatis Ieſu" de 1646 [4]), où l'auteur, ou plutôt Fabry, „de pendulis iſochronis egit . . ſed pleraque falſa dedit nec quicquam demonſtravit" [3]), Huygens dit en 1664 le connaître dans une lettre d'octobre de cette année [5]); il le connaiſſait dès 1647 comme nous le ferons voir.

Merſenne, aſſez longtemps, paraît-il, avant 1646 où il propoſa la queſtion du centre d'oſcillation ou plutôt celle du centre de percuſſion à Deſcartes et à Huygens, s'était adreſſé à Honoré Fabry, alors à Lyon, et les propoſitions ſur ce ſujet de ce dernier qu'il appelle „un géant en ſcience" lui étaient déjà connues avant l'apparition du livre de Mouſnier [6]). Naturellement il déſirait que Chr. Huygens fît connaiſſance avec ce livre. C'eſt de lui — et du livre antérieur de Fabry ſur la philoſophie [7]) — qu'il parle dans ſa lettre à Conſt. Huygens du 3 janvier 1647 (T. I, p. 48); et non pas des œuvres de Noel, comme le ſuppoſe la note 9 à la page citée. Le volume de Mouſnier contient en effet „10 Livres" et „un traité particulier des centres de percuſſion à la fin"; Merſenne dit qu'il „bruſle d'enuie que Mr. voſtre fils le voye ce

---

annotée par C. de Waard, dont le T. I a paru en 1933 chez G. Beauchesne à Paris, il s'agit en réalité de Charles Cavendish. C'était, d'après l'article cité dans la note 6, un gentilhomme anglais résidant à Paris.

3) T. VI, p. 198. Dans le début de la Pars Quarta de l'„Hor. osc." Huygens dit connaître les lettres de Descartes sur ce sujet, publiées „haud pridem".

4) Lugduni, apud Ioannem Champion, in foro Cambij.

5) T. V, p. 127.

6) Mersenne nous apprend aussi que P. Mousnier était „un de ses escoliers [escoliers de Fabry], docteur en médecine à Lion". Ce renseignement et celui du texte sont empruntés à l'article „Uue lettre inédite de Mersenne à Descartes", publiée par C. de Waard dans le Vol. XIII de 1931 de la Revue „Archeion, Archivio di Storia della Scienza, Organe officiel du Comité international d'Histoire des Sciences et de la Section d'Histoire des Sciences du Centre international de Synthèse", Casa editrice L. da Vinci, Rome, et Paris 2e, 12 rue Colbert. Nous avons dit aux p. 351—352 du T. XVI que les premières expériences de Mersenne sur le centre de percussion datent du commencement de 1646 au plus tard. C. de Waard (article cité, p. 175) observe qu'à son avis Mersenne s'occupait d'expériences de ce genre depuis le printemps de 1643.

À la p. 435 de son livre de 1646, après avoir traité du centre de percussion, Mousnier parle de „innumeris ferè experimentis, tùm ab erudito Mersenno, tùm a nostro Philosopho [Fabry]" qui prouvent „longitudinem funependuli isochroni cum cylindro continere $\frac{2}{3}$ cylindri".

7) „Philosophia Universa per propositiones digesta et in breve compendium redacta", Lugduni 1646.

traité et qu'il l'examine, peut eſtre que l'enuie luy en prendra a luy meſme de le mieux demonſtrer, ou du moins il pourra le faire voir a Mr. des Cartes, qui y a deſia trauaillé". Commençons par remarquer que, vu les dates, il ſemble qu'il faille admettre, et la dernière phraſe citée de Merſenne l'indique également, que Fabry s'eſt occupé de la queſtion indépendamment de Deſcartes (Mouſnier ne fait mention ni de lui ni de Roberval). P. Duhem dit certainement à tort [1]: „Par l'intermédiaire du livre composé par l'abbé de Guaſtalla [c.à.d. B. Baldi; comparez la note 2 de la p. 350 du T. XVI] certaines idées de Léonard [2]) ſeront communiquées à Deſcartes et à Roberval; elles provoqueront entre ces deux grands géomètres un débat qui ne ſera pas exempt d'aigreur; portés par Merſenne, par le P. Fabry, par Pierre Mouſnier à la connaiſſance du jeune Chr. Huygens, les affirmations contradictoires de Roberval et de Deſcartes ſuggéreront à ce phyſicien de génie la théorie du pendule composé; etc." Au contraire Huygens ſemble n'avoir appris avant 1665, ou déc. 1664 [3]), ſur les recherches de Deſcartes et de Roberval (que nous jugeons quelque peu poſtérieures à celles de Fabry, quoiqu'indépendantes des ſiennes) que ce que Merſenne lui en écrivit.

Il eſt vrai qu'il a connu Roberval perſonnellement en 1655 (T. I, p. 370), et qu'en cette année et la ſuivante il a été en correſpondance avec lui; mais dans ces lettres il n'eſt pas queſtion du centre d'agitation. D'après le Journal de Voyage il viſita Roberval à Paris le 13 décembre 1660; ſa lettre à Thévenot du 29 janvier 1665 (T. V, p. 209) fait voir qu'alors auſſi il n'a pas fait connaiſſance avec les recherches de Roberval ſur le ſujet en queſtion. Quant à Deſcartes, Huygens ne fait nulle part mention d'aucun entretien avec lui; ce n'eſt que peu avant le 29 janvier 1665, paraît-il [3]), qu'il reçut de Thévenot (lettre citée) des nouvelles ſur les recherches de Deſcartes. Après l'apparition du livre de Mouſnier Deſcartes ne ſemble plus s'être occupé de ce ſujet.

Dans ſa lettre citée Merſenne annonce qu'il enverra le livre nommé ou en tout

---

[1]) P. Duhem „Etudes sur Léonard da Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu" I, p. 108, Paris, 1906.

[2]) Dans son ouvrage de 1582 „In mechanica Aristotelis problemata exercitationes" Baldi cite divers ouvrages (e. a. la Mécanique de Guido Ubaldi de 1577), mais il ne fait aucune mention des manuscrits de L. da Vinci. C'est une hypothèse de Duhem que L. da Vinci a exercé une grande influence sur Baldi. Il dit (même ouvrage, p. 155) que „Baldi... avait emprunté à Léonard da Vinci la notion de gravité accidentelle; et cette notion s'était présentée à l'esprit de Léonard comme une suite naturelle de la théorie de l'impetus, développée par les physiciens du XIVe siècle". Chez Mousnier, c.à.d. chez Fabry, la théorie de l'„impetus" joue un grand rôle; la conclusion de Duhem: „Non plus que la Nature, la Science ne fait point de saut brusque" nous semble fort bonne; mais tout pourrait s'expliquer aussi sans les manuscrits de da Vinci.

cas „les 2 ou 3 feuillets où ſont les centres de percuſſion [4])". Or, nous avons pu établir qu'il a tenu ſa promeſſe. En effet, comme aucune bibliothèque publique en Néerlande ne poſſède l'œuvre de Mouſnier, nous avons demandé l'exemplaire de la Bibliothèque de l'Univerſité de Göttingue et il s'eſt trouvé que celui-ci porte ſur la première page l'inſcription: „Conſtanter 1647. don. Mar. Merſenni". L'„Appendix Prima phyſicomathematica, De Centro percuſſionis [4])" a été lu par Chr. Huygens puiſqu'on y trouve en marge quelques obſervations de ſa main [5]). Ces notes marginales datent ſans doute de 1664: on y trouve e. a. (p. 437) la multiplication de $b + \frac{\frac{1}{3}zz}{b}$ par $\frac{3}{4}$ que nous avons ſignalée dans la note 1 de la p. 456 du T. XVI. Il eſt queſtion chez Mouſnier (p. 436—437) de la „rationem egregij experimenti, quod ſæpè Doctus Merſennus propoſuit, ſcilicet longitudinem funependuli iſochroni eſſe ferè quadruplam perpendicularis ductæ in baſim trianguli Iſoſcelis, librati circa angulum verticis 150. grad."; c.à.d. ſi l'on fait oſciller dans ſon plan un triangle iſoſcèle ſuſpendu au ſommet et dont l'angle au ſommet eſt de 150°, la longueur du pendule ſimple iſochrone ſera environ le quadruple de la hauteur du triangle. Après avoir établi par la multiplication ſuſdite la longueur du pendule ſimple iſochrone pour le cas d'un triangle iſoſcèle de hauteur b et de baſe $2z$, Huygens poſe donc

$$4b \infty \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}\frac{zz}{b},$$

d'où il tire $$\sqrt{13bb} \infty z.$$

Cette équation conduit pour l'angle au ſommet à 148°59′50″, ce qui eſt en effet à peu près 150°. À l'endroit cité Huygens n'exécute pas le calcul de l'angle. Il tire correctement la racine carrée de 13 et écrit à côté des mots „angulum verticis 150. grad.": „[de]bebat eſſe [...] 0°48′ proximè". Il n'eſt pas bien clair ce qu'il a écrit [5]). Dans le calcul de la valeur de l'angle il ſemble avoir commis une erreur, mais ſa formule eſt correcte.

Les autres notes marginales de Huygens ſont les ſuivantes: 1) À la p. 430, où

---

[3]) Il est vrai que nous ignorons la date de la lettre de Thévenot auquel celle de Huygens sert de réponse; mais Huygens ne peut avoir reçu cette lettre avant le 27 novembre 1664 (voir la p. 152 du T. V). En mai 1665 (T. V, p. 355) il espérait que Thévenot lui enverrait un „traité de Roberval des pendules Isochrones" outre ce que Thévenot lui avait déjà mandé sur les résultats de Roberval.

[4]) Chez Mousnier ce sujet occupe 18 pages (p. 420—437). Comparez le début de la lettre de Mersenne du 12 janvier (T. I, p. 59).

[5]) Le livre a été relié plus tard de sorte que les mots écrits en marge sont parfois tronqués.

Mousnier énonce et croit prouver son „Theorema 22. Si voluatur circulus circa punctum circumferentiæ in circulo parallelo suo plano, determinari potest centrum percussionis, quod distat $\frac{2}{3}$ diametri à centro motus", Huygens observe: „[Im]o [1]) $\frac{3}{4}$ diametri". Il s'agit de l'oscillation du cercle dans son plan sur laquelle on peut comparer le premier alinéa de la p. 455 du T. XVI.
2) À la p. 431, où Mousnier dit par inadvertance „Theorema 24. Potest determinari centrum percussionis solidi trium facierum ABDE", Huygens écrit: „mirabile solidum, nam tribus pla[nis] solidam figuram constitui nega[nt] geometræ. Sed auctor qua[rtum] planum non ani[mad]vertit, est enim ABDE pyrami[s]".
3) À la p. 426, où Mousnier cherche (sans pouvoir achever le calcul) le centre de percussion d'un secteur de cercle suspendu au centre du cercle et tournant perpendiculairement à son plan [2]) et parle e.a. d'un „solidum AEFDCB, quod scilicet constat ex pyramide AEDCB, & segmento cylindri EFDCB", Huygens annote: „et præterea ex cuneo super basi EDF quem autor oblitus est" [3]).

À la p. 421 Mousnier écrit à propos du centre de percussion: „Centrum percussionis est punctum illud corporis impacti in quo si contactus fiat, maximus ictus infligitur" [4]), et: „Centrum percussionis est in illa linea, quæ dirimit utrimque momenta, tùm ratione impetus, tùm ratione distantiæ", ce qui veut dire que, lorsqu'on tire par ce centre une droite parallèle à l'axe de rotation considéré [5]), les moments des „impetus", c.à.d. la somme (ou intégrale) des moments de tous les „impetus" partiels

[1]) Une partie de la lettre m a été conservée.

[2]) Huygens chercha, toujours en 1664, le centre d'oscillation du secteur ainsi suspendu: voir les p. 487—489 du T. XVI. Le „Theorema 13" aux p. 425—426 de Mousnier est ainsi conçu: „Si voluatur sector circa axem parallelum subtensæ, determinari potest centrum percussionis, dato centro grauitatis sectoris, quod tantum hactenus inuentum est ex supposita circuli quadratura".

[3]) Il n'est pas nécessaire d'admettre ici une erreur de Mousnier. Huygens entend apparemment par „segmentum cylindri" un segment d'un cylindre droit terminé par deux plans parallèles, mais il semble également permis de se servir de cette expression lorsqu'un des deux plans est oblique, auquel cas le „cuneus" dont parle Huygens fait partie du „segmentum cylindri" de Mousnier.

[4]) Lorsqu'il s'agit d'une figure oscillant dans son plan et que le centre de percussion se trouve p.e. au point X de son axe de symétrie, Mousnier observe (p. 431) que pour qu'il puisse être question d'une percussion en ce point „incidendam esse striam quandam, seu rimam, quæ terminetur in X".

[5]) On peut également considérer la percussion produite par un corps se mouvant parallèlement à lui-même sans aucune rotation.

eſt égale de part et d'autre de cette droite[6]). Ici il eſt apparemment queſtion d'un corps conſtitué par une ſurface plane. Ajoutons que Mouſnier ne conſidère que les corps homogènes. Quant à l' „impetus" du mouvement, il eſt proportionnel à la viteſſe linéaire (Th. 6 de la p. 423) et à la grandeur de l'élément conſidéré du corps. C'eſt, peut-on dire, la quantité de mouvement *mv*. Pour évaluer l'intégrale des quantités de mouvement de la ſurface en „mouvement ſolide" (voir ſur ce terme la p. 376 du T. XVI) Mouſnier repréſente les viteſſes de tous les points par des normales à la ſurface. Il obtient ainſi un „ſolidum" qui n'eſt autre que le „cuneus" (ou le „truncus") conſidéré par Huygens dans le cas du mouvement ſolide. Nous avons dit dans la note 2 de la p. 458 du T. XVI que Huygens (cherchant le centre d'oſcillation) paſſe par le raiſonnement conſidéré en cet endroit de la „méthode de la parabole" à la „méthode de l'onglet (ou cuneus)". Nous pouvons ajouter maintenant que puiſque Huygens admettait avec Merſenne et Mouſnier l'identité du centre d'oſcillation avec le centre de percuſſion, ce qui reſſort des notes marginales que nous venons de citer, il avait l'avantage de ſavoir que ce ſerait probablement la ſubcentrique de l'onglet (ou du tronc, voir la note 5 de la p. 459 du T. XVI) qui lui donnerait la longueur du pendule iſochrone avec la ſurface en mouvement ſolide. Il a donc certainement profité de la lecture du livre de Fabry.

En ſomme, dans le livre de Fabry, ou de Mouſnier, la détermination du centre de percuſſion eſt correcte pour les ſurfaces planes en mouvement ſolide. C'eſt ce que Huygens reconnaît en diſant dans la Prop. XXI de la Pars Quarta de l'„Hor. oſc.": „Quod unum [ſavoir: la poſition du centre d'oſcillation dans le cas du mouvement nommé] ab aliis ante animadverſum fuit, non tamen demonſtratum".

Non pas démontré: en effet, même ſi le raiſonnement de Mouſnier, qui conduit à fixer l'endroit du centre de percuſſion dans ce cas eſt conſidéré comme ſuffiſant, celui par lequel il tâche d'établir l'identité des deux centres ne l'eſt certainement pas[7]).

6) Ceci est vrai, mais on peut douter si l'auteur a prouvé que c'est bien ainsi que „maximus ictus infligitur". Il dit que c'est en frappant ainsi que „totus impetus corporis impacti impediatur" (p. 421).

7) Nous avons dit (T. XVI, p. 351) que pour Mersenne cette identité était un fait d'expérience. Mousnier (Theor. 30, p. 435) raisonne comme suit: „Si linea rigida libretur circa alteram extremitatem immobilem assumaturque funependulum, cuius longitudo contineat $\frac{2}{3}$ prædictæ lineæ, vibrationes utriusque erunt æquediuturnæ; quod demonstratur; quia centrum percussionis prædictæ lineæ distat $\frac{2}{3}$ ab altera extremitate immobili per Th. 8. atqui centrum percussionis in hoc motu circulari dirigit motum aliorum punctorum; quia defungitur munere centri graui-

Il convient d'ajouter que dans l'„Hor. oſc." Huygens ne parle point du centre de percuſſion et qu'il n'apparaît pas d'où réſulte ſa conviction, apparemment déjà générale en 1664, de l'identité des deux centres [1]). Par ſa démonſtration même des p. 457—460 du T. XVI l'identité du centre d'oſcillation avec le centre de percuſſion tel que celui-ci avait été défini par Fabry par la conſidération des moments des „impetus" était prouvée pour les ſurfaces planes en mouvement ſolide. Mais ſa note marginale à la p. 430 de Mouſnier fait voir qu'il admet auſſi l'identité des deux centres pour le cas d'une ſurface oſcillant dans ſon plan.

Comme on peut le voir par cette note marginale, les conſidérations de Mouſnier ſur le centre de percuſſion dans le cas des ſurfaces oſcillant dans leur plan — et il en eſt de même dans le cas des corps — ne conduiſent pas à la connaiſſance de la poſition du centre d'oſcillation dans ces cas.

Nous avons mentionné à la p. 375 du T. XVI le principe de Brouncker pour le cas des ſurfaces planes en mouvement ſolide. Ce principe s'accorde parfaitement avec la méthode de conſtruction de Fabry; mais Brouncker (p. 144 du T. V) parle ſeulement du centre d'oſcillation et ne donne aucune preuve. Wallis en 1671 [1]) parle dans le même cas du centre de percuſſion qu'il trouve en ſe ſervant d'une conſidération identique avec celle de Fabry ſur les moments des quantités de mouvement.

Nous avons parlé de la meſure univerſelle de la longueur au moyen des pendules aux p. 353—356 du T. XVI et 120—121 du T. XVII. Malgré le texte de la p. 120 nommé, il ſemble — voir la lettre de 1668 de Huygens à Eſtienne (T. VI, p. 260) citée dans la note 8 de la p. 121 nommée — que l'idée d'établir à l'aide de pendules une meſure univerſelle ait été promulguée en Angleterre indépendamment de Huy-

tatis, ut patet ex dictis; nec enim alterum segmentorum præualet; sed totus motus impeditur; per pos. 2 [p. 421: Si percussio ita fiat, ut totus impetus corporis impacti impediatur maxima est] igitur perinde se habet atque si totum pondus, vel totam vim collectam haberet; sed in hoc casu esset ad instar funependuli, in quo non habetur vlla ratio fili, sed ponderis appensi; igitur eius vibratio est æquediuturna cum vibratione prædicti funependuli quod erat demonstrandum". Il parle ensuite des „innumera experimenta" de Mersenne et de Fabry déjà mentionnés plus haut. Dans d'autres cas l'auteur dit: „probatur eodem modo".

[1]) Comparez la note 6 de la p. 353 du T. XVI. Ajoutons que dans la lettre de juillet 1690 citée en cet endroit Huygens eût pu faire mention, non seulement de Wallis, de Mariotte et de Deschales, mais aussi et surtout de Fabry.

Le „centrum virium" de Wallis (note 2 de la p. 461 du T. IX) est défini de la même manière que le „centrum percussionis" de Fabry.

gens et avant lui. Il eſt vrai que cette idée ne pouvait ſembler abſolument pratique que depuis le moment où la formule qui donne la place exacte du centre d'oſcillation avait été établie.

Toutefois G. Mouton (comparez la p. 36 qui précède), connaiſſant la marche exacte des horloges de Huygens [1]), ſe montre déjà en 1670 un avocat convaincu de cette idée qu'il développe dans la dernière partie (p. 427—448) de ſon livre. Il y propoſe un ſyſtème décimal de longueurs, l'unité étant empruntée à la dimenſion du globe terreſtre: il veut que le „Milliare Geometricum in uno gradu circuli terræ maximi ſexagies exactè continetur". La millième partie du „milliare" eſt nommée „virga" et la dix-millième partie „virgula", la longueur approximative de cette dernière étant donnée par une ligne de 20,2 cm. Il conſtate qu'un pendule ſimple de cette longueur exécuterait 3959,2 oſcillations ſimples en une demi-heure, valeur moyenne calculée d'après les nombres obſervés des oſcillations de différents pendules pouvant être conſidérés comme ſimples, l'un deux ayant p.e. un globe de plomb et une verge formée d'un fil de fer fort mince, un autre étant formé par un globe de fer ſuſpendu à un cheveu, etc. La longueur de chacun de ces pendules (comparez la p. 355 du T. XVI) eſt pour Mouton la diſtance du point de ſuſpenſion au centre du globe.

C. *Horloges à pendule oſcillant dans un plan antérieures à celles de Huygens.* Le paſſage bien connu de la Préface (p. 91 qui ſuit), où Huygens avance qu'il eſt fort peu croyable que des horloges à pendule aient été achevées et employées avant celles conſtruites à la Haye depuis 1657, nous oblige de revenir brièvement ſur ce ſujet, ſur lequel on peut conſulter auſſi les p. 36—39 du T. XVII. Nous ne diſcuterons pas la queſtion de l'horloge à pendule qui aurait exiſté depuis 1615 ou 1616 à Angoulême chez de Boismorand [2]), vu que de Carcavy, qui n'avait pas vu cette

---

[1]) Il parle des horloges de Huygens dans le Cap. III intitulé „De horologiis accuratissimis, et ad numerandas Perpendiculorum vibrationes aptissimis" à la p. 433 de son ouvrage: „Observationes Diametrorum Solis et Lunæ apparentium, Meridianarumque aliquot altitudinum Solis & paucarum fixarum. Cum tabulâ declinationum Solis constructa ad singula graduum Eclipticæ scrupula prima. Pro cujus, et aliarum tabularum constructione seu perfectione, quædam numerorum proprietates non inutiliter deteguntur. Huic adjecta est Brevis Dissertatio de dierum naturalium inæqualitate; & de temporis æquatione. Una cum nova mensurarum geometricarum idea: Novâque methodo eas communicandi, & conservandi in posterùm absque alteratione" (Lugduni, Matth. Liberal, MDCLXX). Mouton ajoute que les horloges vulgaires à balancier „nullo modo huic negotio apta sunt, propter multiplicem illorum anomaliam, & inconstantiam vibrationum": comparez le premier alinéa de la p. 28 du T. XVII.

[2]) Voir les lettres de P. Carcavy de septembre 1659 (T. II, p. 535) et de mars 1660 (T. III, p. 38).

horloge lui-même et que Huygens a connu perſonnellement à Paris, paraît ne pas être revenu ſur ce ſujet dont Huygens ne dit rien dans l',,Hor. oſc." [1]). Les croquis de Leonardo da Vinci [2]) que Huygens n'a pas connus ſont voir, comme nous l'avons dit, qu'il avait été queſtion depuis longtemps de balanciers en forme de pendule, lesquels ne paraiſſent pas cependant — et c'eſt là un point d'une importance capitale — avoir dû ſervir à *contrôler* la marche de l'horloge par un mouvement oſcillatoire plus ou moins indépendant (comparez la note 5 qui ſuit). Cette remarque s'applique auſſi à l'horloge à pendule d'un certain Camerini portant la date 1656 (N. B.) qui eſt repréſentée à la p. 139 de „The Evolution of Clockwork, etc." de Monſ. J. Drummond Robertſon [3]). Un pendule de forme primitive s'y meut devant le cadran. Des horloges de ce genre, dont l'hiſtoire eſt fort peu connue [4]), ne pouvaient évidemment être des inſtruments de préciſion.

On ſemble être d'accord pour conſidérer comme trompeur le paſſage des Saggi de 1667 de l'Accademia del Cimento où l'horloge de 1649 de Vincenzio Galilei eſt mentionnée dans des termes qui portent le lecteur à croire (quoique cela ne ſoit pas dit *expreſſis verbis*) que cette horloge a marché et a pu, telle qu'elle était, ſervir de modèle pour la conſtruction d'autres horloges exactes [5]).

Quant à cette horloge de Vincenzio Galilei ou „horologe a pendule commencee par Galilei", pour nous ſervir des termes de Boulliau [6]), il eſt certain qu'elle n'était point achevée, puiſque Viviani dans ſa lettre du 20 août 1659 au grand-duc Leopoldo

[1]) Nous avons parlé des horloges de Jost Burgi dans la note 4 de la p. 6 du T. XVII.

[2]) T. XVII, p. 38.

[3]) Voir sur cet ouvrage la p. 546 du T. XVII.

[4]) Comparez la note 2 de la p. 47 de la „Geschichte der Räderuhren" de 1905 de E. Bassermann-Jordan.

[5]) „Saggi di Natvrali Esperienze fatte nell' Accademia del Cimento sotto la Protezione del Serenissimo Principe Leopoldo di Toscane" (Firenze, G. Cocchini, MDCLXVII), p. XXII: „... fu stimato bene applicare il Pendolo all' oriuolo, su l'andar di quello, che prima d'ogni altro immaginò il Galileo, e che dell' anno 1649 messe in pratica Vincenzio Galilei suo figliuolo. Così, è necessitato il Pendolo dalla forza della molla, o del peso a cader sempre dalla medesima altezza; onde con iscambieuol benefizio non solamente vengono a perfettamente vguagliarsi i tempi delle vibrazioni, ma eziandio a correggersi in certo modo i difetti degli altri 'ngegni di esso oriuolo". Ce passage, sans être entâché, croyons-nous, d'inexactitude dans le sens strict du mot, tend, grâce à une rédaction habile, à faire attribuer à Galilée et son fils des vues théoriques qui étaient dues à Huygens: voir la p. 66 et suiv. du T. XVII („Horologium" de 1658). Huygens dit à bon droit (T. VII, p. 280) que l'auteur (L. Magalotti) „nostros conatus dissimulat".

de Medici[7]) dit e.a. que Vincenzio était occupé peu avant ſa mort à „intagliar l'altra ruota dentata". La figure de la p. 656 du T. XIX de l'Ed. Naz. montre clairement que la moitié de la grande roue ſeulement eſt pourvue de dents. Cette figure repréſente ſans aucun doute un inſtrument réel puiſqu'il en exiſte une deuxième figure où il eſt vu ſous un autre angle[6]). Mais quoique l'horloge ne fût pas achevée, l'auteur avait apparemment déjà éprouvé, en y attachant un poids moteur, le mécaniſme de l'échappement à double virgule qu'on y voit. En effet, Viviani dit: „volle il Sig.r Vincenzio che io . . vedeſſi così per prova e più d'una volta, come pur vedde ancora il ſuddetto artefice [Dom. Baleſtri], la congiunta operazione del contrapeſo e del pendolo". J. B. Biot qui en 1858 prend le parti de Huygens[8]) commet une étrange erreur (entièrement ſans conſéquence chez lui) en diſant (p. 677) que Vincenzio G. a conſacré „tout au plus deux mois et demi à ce travail". En effet, il vient de dire, en citant la lettre de Viviani, que Vincenzio commença ſon travail en avril 1649 et qu'il mourut le 16 mai ſuivant. A-t-il voulu écrire: un mois et demi? Ce ſerait encore beaucoup trop, puiſque Viviani dit que Vincenzio mourut „nel giorno XXII del ſuo male". Suivant Viviani, il tomba donc malade le 25 avril. Par conſéquent vingt-cinq jours au plus ont été conſacrés à la conſtruction de l'horloge ſi le récit de Viviani, comme nous l'admettons ici, eſt abſolument conforme à la vérité[9]). Monſ. Drummond Robertſon — à qui nous avons de grandes obligations; voir les p. 38 et 546 du T. XVII — fait mention ſans critique (p. 96) des „at the moſt two and a half months" de Biot. Il eſt d'avis qu'en ce temps Vincenzio a pu conſtruire plus d'une horloge. Mais comme tailler les roues était pour lui une „inſolita fatica", il paraît peu probable qu'en vingt-cinq jours tout au plus il ait pu conſtruire autre choſe que le modèle inachevé dont d'ailleurs il eſt ſeul queſtion chez Viviani. Il eſt vrai que Viviani ajoute: „*ſtimava* [nous ſoulignons] di potere in diverſa forma e con altre invenzioni adattare il pendolo all' oriuuolo", et que l'inventaire de ſa veuve, morte en 1668, mentionne „Un Oriuolo non finito di ferro col Pendolo, prima invenzione del

---

6) T. III, p. 8. On trouve là la figure qui fut envoyée a Boulliau.

7) T. III, p. 470 et p. 6 du Vol. XIX des „Opere di Galileo", Ed. Naz.

8) Dans ſon article „Dell' orologio à pendolo di Galileo Galilei, diſsertation de M. Eugenio Albèri" dans le n° de novembre 1858 du Journal des Savants (Paris, Imprimerie impériale).

9) Nous ne parlons pas ici des variantes que préſentent les deux exemplaires de la lettre conſervés à Florence et à Paris; voir ſur ce ſujet les p. 470—484 du T. III et 283—284 du T. VII, ainſi que la p. 647 du T. XIX de l'Ed. Naz.

Galileo". [1]) La queſtion de ſavoir ſi Vincenzio G. a conſtruit un ou pluſieurs oriuoli ſerait importante ſi l'on voulait ſoutenir qu'il a trouvé le temps de fabriquer, outre de groſſiers modèles, une horloge à pendule exacte et marchant bien, ce que nous ne pouvons nullement admettre [2]).

D'ailleurs, l'„Oriuolo non finito" de l'inventaire de la veuve n'eſt-elle pas préciſément le modèle unique dont parle Viviani? Albéri le penſait [1]), Biot de même, et cette hypothèſe peut paraître au premier abord preſque certaine. Elle ne l'eſt pourtant pas, car, nous l'avons dit à la p. 472 du T. III, „dès 1659 un modèle, attribué à Galilei, était en poſſeſſion du Prince Léopold" et c'eſt de ce modèle qu'il envoya la figure à Boulliau [3]). Or, cette figure s'accorde avec celle du T. XIX de l'Ed. Naz. comme nous l'avons dit à la p. 61. D'autre part la figure du T. XIX s'accorde parfaitement avec la deſcription détaillée qui ſe trouve dans la lettre de Viviani. Quoiqu'à Florence cette figure n'ait pas été trouvée *dans* la lettre [4]) il paraît donc à peu près certain, comme on l'admet généralement, que c'eſt bien là la figure du modèle dont Viviani parle. S'il en eſt ainſi, ce modèle-là était donc en 1659 en poſſeſſion de

---

[1]) Mentionné par Alberi à la p. 340 du Suppl. au T. XIV de son édition des Oeuvres de Galilée (voir la p. 38 du T. XVII et la p. 472 du T. III).

[2]) Mons. Drummond Robertson fait parler Viviani comme suit: „But, whilst engaged in this unwonted task, he [Vincenzio] was overtaken by a most acute attack of fever, and was obliged to leave it unfinished; and on the twenty-first day of his illness, that is, on May 16, 1649, all the most accurate clocks, together with *this most exact time-measurer*, were by him destroyed (si guastarono) and stopped for ever; whilst he (as it pleases me to believe) passed on, to measure, in the enjoyment of the Divine Essence, the moments of Eternity, that pass all understanding". Il ajoute: „Was it not in a moment of delirium that Vincenzio was drawn to this act of destruction?"

On peut consulter le texte italien de Viviani aux p. 482—483 du T. III. Nous le traduisons comme suit: „le 22ième jour de sa maladie, c.à.d. le 16 mai 1649, toutes les horloges plus justes, de même que ce très exact mesureur du temps, perdirent leur valeur pour lui et s'arrêtèrent pour lui à tout jamais au moment où il passa (comme j'aime à le croire) à mesurer, dans la jouissance de l'essence divine, les moments, incompréhensibles pour nous, de l'éternité". Il n'y est donc, pensons-nous, question d'aucun délire ni d'aucune destruction d'instruments. „Ce très exact mesureur du temps" ne peut désigner grammaticalement que l'horloge inachevée, puisqu'il vient d'être question de cette horloge-là. Nous ne croyons donc ni à la construction ni à la destruction par Vincenzio G. d'une horloge à pendule achevée et véritablement exacte.

[3]) Voir ses lettres de mars et d'août 1659 aux p. 462 et 468 du T. III.

[4]) Voir la p. 677 de l'article de Biot (note 8 de la p. 61) ou la p. 90 du livre de Mons. Drummond Robertson.

Leopoldo. On peut trouver étrange qu'il l'attribue à Galilée père (T. III, p. 468), mais ceci pourrait s'expliquer par le fait que la lettre à Boulliau où il femble le dire eft du 21 août 1659, tandis que la lettre de Viviani adreffée à lui eft du 20 août (T. III, p. 470); en écrivant à Boulliau il venait donc de recevoir cette dernière dont les premières lignes parlent du „maraviglioſo miſurator del tempo col pendolo di Galileo Galilei": il a donc pu penſer en ce moment que l'inftrument en queftion provenait fuivant Viviani de Galilée père. D'ailleurs dans fa lettre d'août il n'en attribue en fomme que l'*invention* à Galilée, et les mots „è fabricato il modello del [et non pas: dal] medeſimo" ne difent pas nettement que la *conſtruction* aurait eu lieu par Galilée lui même [5]). Il n'y a donc là aucune difficulté. Et il n'eft pas déraifonnable de fuppofer qu'il ait reftitué le modèle à la veuve, de qui il doit l'avoir reçu. Quoi qu'il en foit, ce point n'eft pas de grande importance: fi Vincenzio G. a trouvé le temps en avril 1649 de conftruire un deuxième modèle imparfait, à plus forte raifon n'a-t-il pas eu celui de conftruire une horloge achevée.

Viviani dit enfuite que Philippe Treffler conftruifit pour le Prince Leopoldo un compteur à roues très légères. La note 53 de la p. 483 du T. III dit que ce mécanicien s'établit à Florence en 1658, mais nous ignorons l'origine de cette date apparemment inexacte: Monf. Drummond Robertfon cite à la p. 102 de fon livre une pièce qui prouve que Treffler était déjà en 1656 horloger de fon Alteffe. Ce compteur fut, paraît-il, conftruit en ou vers 1655, puifque Viviani ajoute qu'en ce temps, favoir 14 ans après le moment où Galilée propofa d'appliquer le pendule aux horloges, Fr. Generini conftruifit pour le Prince un modèle de fer dans lequel „era unito al pendolo il contrappeſo". Il dit enfin „che Filippo ſoprannominato adattò la 'nvenzione ad un oriuuolo da camera per Sua Altezza etc."; malheureufement il ne dit pas — ce qui eft le point important dans la queftion de priorité — fi cette conftruction d'horloges à pendule par Treffler — les premières horloges de ce genre conftruites à Florence qui aient marché — eut lieu avant ou après que le Grand-duc Ferdinando, frère de Leopoldo, eut reçu en 1657 l'horloge de Cofter, dont il eft

---

5) En mars 1659 (T. III, p. 462) Leopoldo parlait d'„un modello fatto dal medesimo Signore Galileo", et il semble bien qu'il parle du même modèle. En ce moment il n'était nullement au courant de la marche exacte des événements puisqu'il s'imaginait que Galilée avait construit une horloge à pendule et à poids moteur pour les Etats de Hollande. C'est précisément parce qu'il ne se sentait pas au courant qu'il demanda à Viviani d'écrire une relation exacte.

queſtion dans la première note de la p. 38 du T. XVII et que Viviani ſemble ne pas avoir connue. D'après Leopoldo écrivant en mai 1659 (T. III, p. 464) ce fut *pour Ferdinando* que le „virtuoſo" [Treffler?] conſtruiſit „tre anni ſono" un „oriuuolo rozzamente ſatto". C'eſt de cette horloge qu'il eſt auſſi queſtion dans la lettre de Leopoldo de mars 1659 (T. III, p. 462); on y trouve également l'expreſſion „tre anni ſono". Si cette expreſſion eſt littéralement exacte, le „virtuoſo" avait conſtruit en 1656 pour Ferdinando une horloge à pendule „rozzamente ſatto", mais qui pouvait marcher. On nous permettra d'ajouter que lors même que cette conſtruction n'aurait eu lieu que dans la deuxième moitié de 1657, après que Ferdinando eut reçu l'horloge de Coſter, elle aurait cependant été antérieure d'un an à la publication de ſeptembre 1658 de l'„Horologium" de Huygens et aurait pu paſſer pour ceux qui la voyaient ſans connaître celle de Coſter pour une invention originale faite à Florence. Obſervons encore qu'il n'y a aucune raiſon pour admettre que les horloges de Treffler aient été pourvues de l'échappement à deux virgules du modèle de Vincenzio, puiſque Viviani dit que le modèle de Generini dont Treffler s'inſpira [1]) était „con diverſa e molto ingegnoſa applicazione". Leopoldo dit en mai 1659 (T. III, p. 464), après avoir vu la figure de l'„Horologium" de 1658 de Huygens, que le „virtuoſo tre anni ſono ne inventò *un ſimile* [nous ſoulignons] [2])". Il ne faut ſans doute pas attacher trop d'importance à ce mot. Mais alors, pourquoi attribuer une valeur abſolue à l'expreſſion „tre anni ſono"?

D'ailleurs il n'eſt pas abſolument impoſſible qu'en diſant „tre anni ſono" Leopoldo entende parler de 1657, puiſque 1657, 1658 et 1659 ſont trois années; de même que Huygens dit au début de l'Hor. oſc.": „Annus agitur ſextus decimus . . ." quoique l'intervalle entre la publication de l'„Horologium" (ſept. 1658) et celle de l'„Hor. oſc." (avril 1673) ne ſoit que de quatorze ans et demi. Viviani (voir la p. 441 qui ſuit) écrit en 1674 que l'„Hor. oſc." a paru „due anni ſono".

Il mérite en outre d'être remarqué que Leopoldo dans la lettre d'août 1659 (T. III, p. 468) dit qu'on a envoyé de Florence au Roi de Pologne, qui ne croyait pas que „mio Signore e fratello haveſſe appreſſo di ſe tale invenzione" une horloge à pendule *fabriquée en Hollande*, ſans doute de Coſter ou d'un de ſes collaborateurs [3]).

---

[1]) L'horloge achevée de Generini fabriquée „alcuni anni sono" dont Leopoldo parle en août 1659 (T. III, p. 468) était apparemment autre choſe.

[2]) D'après Leopoldo (l. c.) le „ſimile" et l'„Oriuuolo rozzamente ſatto" étaient deux objets différents.

Somme toute, il ſemble impoſſible d'arriver à une concluſion certaine [4]).

D'ailleurs, cette queſtion de priorité n'eſt pas énormément importante. Ce qui paraît certain, c'eſt que, ſi une véritable horloge à pendule a été conſtruite avant juin 1657 par un horloger travaillant pour l'un ou l'autre Grand-duc, Huygens ne le ſavait point et qu'en Italie même on l'ignorait généralement [5]); comparez le premier alinéa de la note 5 de la p. 37 du T. XVII [6]).

D'autre part, il eſt abſolument poſſible, comme le dit Viviani, que Galilée, frappé de cécité, ait eu peu avant ſa mort l'idée d'adapter le pendule aux horloges; l'affirmation contraire de la note 2 de p. 281 du T. VII ne fait aucune impreſſion ſur nous. Ce qui reſte évidemment douteux c'eſt — comme le dit auſſi Biot — ſi l'échappement à double virgule, que nous avons déſigné à la p. 39 du T. XVII par l'expreſſion „échappement de Galilée", comme on en a l'habitude, a réellement été conçu par lui. Quant à la remarque pathétique de la note 3 de la p. 281 du T. VII ſur la diſparition du modèle de Vincenzio „qui aurait dû être d'un prix ineſtimable aux yeux du Prince Léopold", nous n'y attachons aucune valeur, auſſi peu qu'à la concluſion de la même note (p. 282) que „Viviani s'eſt laiſſé égarer lorſqu'il affirme avoir vu marcher la machine". Sans doute, le modèle de 1649 ne marchait pas, mais Viviani ſe contente de dire qu'il l'a vu fonctionner „per prova", un poids moteur y ayant été attaché. On ne peut raiſonnablement parler (T. VII, p. 286) de „l'impoſſibilité de la marche de l'inſtrument", ce que Huygens lui-même (voir ſa lettre de janvier 1660 à la p. 12 du T. III) ne fait point [7]).

Nous avons dit à la p. 39 du T. XVII que l'„échappement de Galilée" peut être conſidéré comme le précurſeur de l'échappement à ancre, inventé, à ce qu'il paraît, en Angleterre. En effet, l'origine de l'échappement à ancre, comme de beaucoup

---

3) T. XVII, note 2 de la p. 12.

4) Comparez encore la note 1 de la p. 90 qui suit.

5) Suivant Leopoldo lui-même (lettre de mai 1659, T. III, p. 464) les deux instruments dont il est question dans la note 2 n'étaient pas en bon état peu de temps avant qu'il écrivit cette lettre: l'„Oriuuolo rozzamente fatto" dut être „di nuovo esperimentato".

6) Rien n'indique aussi que l'horloge à balancier en forme de pendule de Camerini portant la date 1656 que nous avons mentionnée à la p. 60 ait été généralement connue, soit en Italie soit ailleurs. Comparez la note 4 de la p. 13 du T. XVII.

7) On peut voir, tant à Florence que dans le „Science Museum" de Londres, un modèle, construit d'après la figure correspondant au texte de la lettre de Viviani, mis en mouvement par un ressort spiral et marchant fort bien.

d'autres inventions, ne peut être déterminée avec une certitude abſolue. On trouvera plus loin dans le préſent Tome une courte Pièce ſur ce ſujet.

On peut encore ſe demander, principalement en ayant égard à un des croquis mentionnés de L. da Vinci, s'il y a eu, avant Huygens, des horloges publiques à pendule, ce dont il n'exiſte, paraît-il, aucune preuve. La queſtion ſe poſe même pour les Pays-Bas. On a vu à la p. 79 du T. XVII que nous n'avons pas réuſſi à démontrer que l'horloge de 1652 de la cathédrale d'Arnhem n'avait pas de pendule. Il ſemble toutefois extrêmement improbable, que ſi des horloges publiques de ce genre avaient exiſté en Néerlande avant 1658, les horlogers qui attaquèrent Huygens en cette année (p. 82—83 du T. XVII) n'en auraient rien dit. Ils paraiſſent auſſi n'avoir connu aucune horloge publique à pendule à l'étranger. L'*argumentum ex ſilentio* a ici beaucoup de force.

D. *Horloges à pendule conique.* On a prétendu que l'horloge publique d'Oſnabrück de la fin du ſeizième ſiècle a probablement été une horloge à pendule conique [1]). Ceci eſt incertain, puiſque nous n'avons ſur cette horloge d'autre renſeignement que celui fourni par le texte cité dans la note 1. Les hiſtoriens ne mentionnent, croyons-nous, aucune autre horloge conique qui aurait été conſtruite avant les jours de Huygens.

R. Hooke exhiba en 1666 une horloge à pendule conique dans une ſéance de la „Royal Society" (T. VII, p. 304). Voir encore ſur ce ſujet la note 13 de la p. 337 du T. VII ainſi que la lettre de Huygens à ſon père d'août 1674 (T. VII, p. 390). Conſultez auſſi l'Appendice II à la Pars Quinta qui ſuit.

---

[1]) Veltman à trouvé une description manuscrite de 1587 de Jost Bodeker, vicaire du dôme d'Osnabrück, de l'horloge construite par lui pour ce dôme; il l'a publiée en 1890 dans le T. XV des „Mitteilungen des historischen Vereins zu Osnabrück" dans son article: „Handschriftliche Aufzeichnungen über einige alte, jetzt verschwundene Uhrwerke der Stadt Osnabrück". Ce travail est cité par E. Bassermann-Jordan dans sa „Geschichte der Räderuhren" de 1905 (p. 43 et suiv.). Il est question dans le manuscrit d'un „gulden Sterne oben in dem Cronament, welcher mit seinem umblauffen [ailleurs: „mit seinem schnellen umblauffen"] so viel ausrichten kan, als der unrast inwendig im wercke, und ist an statt der unrast, etc.". Le balancier n'était pas absent, car Bodeker qui vante la nouveauté de son invention ajoute qu'on peut faire fonctionner à volonté ou bien le balancier ou bien l'étoile. Veltman émet l'hypothèse qu'il s'agit d'un pendule conique et Bassermann-Jordan se déclare d'accord avec lui.

Aucune horloge à pendule conique de ce temps, croyons-nous, n'a été conſervée. Apparemment ces horloges n'ont jamais été en vogue.

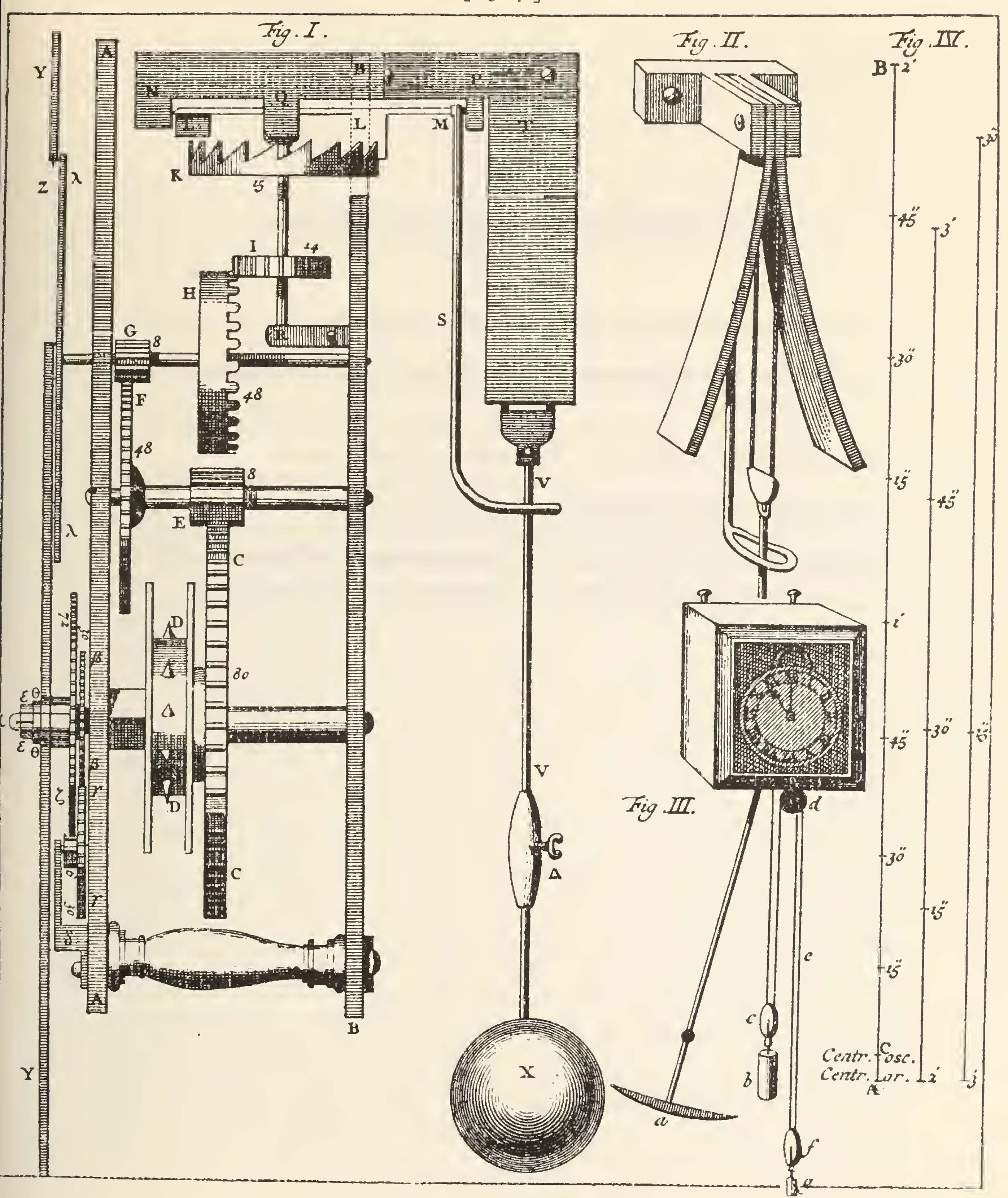
Nous indiquons en marge les pages de l'édition originale de 1673 de l',,Hor. oſc.". La Bibliothèque de l'Univerſité de Leiden poſſède l'exemplaire de Huygens (comparez la note 3 de la p. 92 qui ſuit), où celui-ci a corrigé pluſieurs fautes d'impreſſion et introduit dans le texte quelques autres modifications. 's Graveſande dans ſon édition de 1724 a tenu compte de ces remarques, dont quelques-unes ſe rapportent à certaines figures légèrement défectueuſes. Nous reproduiſons ici les figures de 's Graveſande, qui, ſauf ces corrections, s'accordent avec les figures originales; à cela près que celles qui repréſentent des inſtruments ou plus généralement des corps ont été ombrées dans les éditions de 1724 et de 1751.

CHRISTIANI HVGENII ZVLICHEMII, CONST. F. HOROLOGIVM OSCILLATORIVM SIVE DE MOTV PENDVLORVM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.



PARISIIS,
Apud F. Muguet, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum, viâ Citharæ, ad insigne trium Regum.
MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

[Fig. 17.]



Ce livre eſt diviſé en cinq parties
dont

La première contient la deſcription de l'horloge à pendule,

La deuxième traite de la chute des corps peſants et de leur mouvement en une ligne cycloïde,

La troiſième de l'évolution et de la dimenſion des lignes courbes,

La quatrième du centre d'oſcillation ou d'agitation, tandis que

La cinquième contient la figure d'une horloge autrement conſtruite où le mouvement du pendule eſt circulaire, et les théorèmes ſur la force centrifuge.

Dividitur liber hic in partes quinque,
quarum

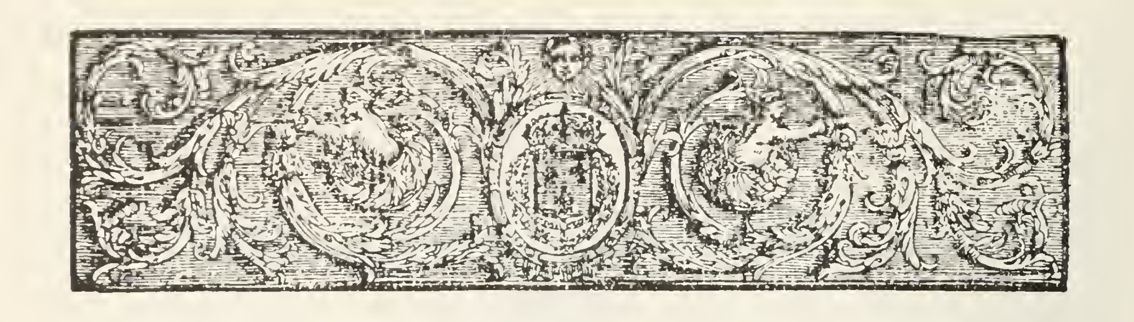
Prima *Descriptionem* HOROLOGII OSCILLATORII continet.

Secunda agit de *Descensu gravium*, & *motu eorum in Cycloide*.

Tertia de *Evolutione & Dimensione linearum curvarum*.

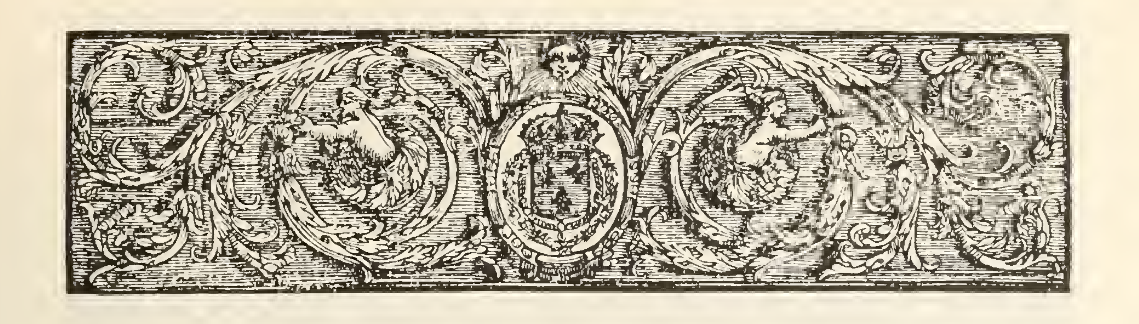
Quarta de *Centro Oscillationis seu Agitationis*.

Quinta *alterius Horologii constructionem*, in quo circularis est penduli motus, exhibet, & Theoremata de *Vi Centrifuga*.



A LOUIS XIV LE GRAND
ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE.

C'eſt principalement à la France, Grand Roi, que nous devons la renaiſſance et le rétabliſſement en ce ſiècle de la Géométrie: ici naquirent ceux qui les premiers renouvelèrent et rappelèrent à la vie, en y conſacrant une grande, et la meilleure, partie de leurs forces, cette ſcience oubliée et pour ainſi dire enſevelie. Suivant leurs traces des hommes fort ingénieux, partout en Europe, la développèrent enſuite avec un tel ſuccès que peu de choſes, ſemble-t-il, ont été laiſſées à découvrir aux générations futures, tandis que les réſultats obtenus par les anciens ont été dépaſſés de beaucoup. Dans cette ſcience que j'ai toujours beaucoup admirée et aimée, je me ſuis propoſé ſurtout, toutes les fois que je m'y adonnai, la conſidération de problèmes dont la ſolution ſerait utile ſoit pour la commodité de la vie ſoit pour la connaiſſance de la nature. Mais c'eſt lorſque je tombais ſur des ſujets où l'utilité était unie à une difficulté de les tirer au clair qui exigeait des raiſonnements ſubtils que



LVDOVICO XIV,

FRANCIÆ ET NAVARRÆ

REGI INCLYTO.



ENATAM, Rex maxime, reſtitutamque hoc ſæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique ſui parte deperditam, ac veluti ſepultam, inſtaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum veſtigiis inſiſtentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri ſubtiliſſimi, ut pauca jam poſterorum induſtriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longiſſime prætervecti ſint. In hac ſcientia, quam ſemper admiratus ſum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris propoſui inveſtiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta prodeſſe poſſent. Tunc verò optimè operam me collocaſſe exiſtimavi, cum in ea incidiſſem, in quibus utilitas cum inve-

j'avais l'impreſſion de m'y appliquer le plus avantageuſe-ment. Et s'il eſt permis de joindre au préſent don quelque recommandation afin qu'il ne paraiſſe pas tout-à-fait indigne de Ta grandeur, j'oſe dire n'avoir nulle part eu mieux l'occaſion de tendre avec ſuccès vers le double but dont je parlais que dans le cas de l'invention de mon Horloge. En effet, comme il s'agit d'une part d'une invention mécanique, mais que de l'autre, et de beaucoup la plus importante, c'eſt une conſtruction baſée ſur des principes géométriques, il faut ſavoir qu'en cette dernière qualité elle exigeait le recours nullement aiſé aux artifices les plus abſtraits de l'art, de ſorte que parmi tous les ſujets auxquels j'ai voué juſqu'ici une étude tant ſoit peu profonde, j'attribue ſans héſiter la première place à cette ſpéculation-ci.

Quant à l'utilité de mon invention, il n'eſt pas néceſ-ſaire, Puiſſant Roi, que je me ſerve de beaucoup de paroles pour la faire voir. En effet, non ſeulement Tu as pu conſtater par une expérience journalière, depuis que mes pendules ont mérité d'être reçues dans les appartements intimes de Ton palais[2]), de combien elles ſurpaſſent les autres horloges, mais de plus Tu n'ignores pas les uſages plus ſpéciaux auxquels je les deſtinais dès le commencement. Je veux parler des ſervices qu'elles peuvent rendre tant dans les obſervations céleſtes que dans la meſure des longitudes des différents lieux par les navigateurs. En effet, ſuivant Tes ordres nos Horloges ont été envoyées par mer plus d'une fois; d'autre part on en peut voir un aſſez grand nombre deſtinées à l'uſage

niendi difficultate, ac ſubtilitate aliqua, conjuncta foret. Quod ſi commendationis nonnihil accerſere muneri nostro permittitur, ne prorſus indignum tua magnitudine appareat; non alias felicius, quam in hoc Horologii invento, utrumque illud me conſecutum eſſe profiteor. Etenim, cum ex parte mechanicum ſit inventum; ex parte altera, eaque multò præcipua, geometricis principiis conſtet; id quod ad hanc[1]) attinet, non levi conamine, ex intimis artis receſſibus petendum fuit: adeo quidem, ut inter omnia, quæ impenſiore ſtudio hactenus pertractaverim, haud dubie primum huic ſpeculationi locum tribuam. Quænam vero in his ſit utilitas, non eſt quod multis, Rex potentiſſime, oſtendere tibi laborem. Non ſolum enim diutinâ experientiâ compertum habes, ex quo regiæ tuæ penetralibus recipi meruere Automata noſtra[2]), quantum, æquabili horarum demonſtratione, cæteris hujuſmodi machinationibus excellant: ſed & potiores uſus eorum, quibuſque jam inde à principio mihi deſtinata fuere, non ignoras. Illos ſcilicet, quos & in Cæleſtium obſervationibus, & in Longitudinibus locorum inter navigandum dimetiendis, præſtare apta ſunt. Tuo enim juſſu, non ſemel, per mare vecta fuere Horologia noſtra. Tuis auſpiciis eadem nec pauca, Aſtronomiæ

[1]) L'édition originale a „ad posteriorem hanc", mais le mot „posteriorem" a été biffé par Huygens.
[2]) Voir le dernier alinéa de la p. 103 du T. XVII.

des aſtronomes et placées ſous Tes auſpices dans ce merveilleux Obſervatoire que Tu as récemment fait conſtruire avec une libéralité inſigne et ſurpaſſant celle de tout autre roi. Toutes les fois que je réfléchis à ces choſes, je me félicite hautement du bonheur qui m'eſt échu de faire cette invention dans le temps de Ton règne.

Perſonne, ſachant combien cette invention Te doit, ne demandera donc, me ſemble-t-il, pour quelle raiſon j'ai cru devoir vouer à Ton auguſte nom les ſpéculations qui contiennent la théorie et la deſcription de mon inſtrument. Or, on trouvera encore bien plus naturel que je Te dédie ces pages lorſqu'on aura appris que c'eſt grâce à Ta magnificence que je jouis du loiſir de méditer tranquillement ſur ce ſujet ainſi que ſur d'autres. En effet, il me fallait d'une part faire voir dans une certaine meſure l'utilité de ce loiſir et d'autre part témoigner quelque reconnaiſſance pour Tes nombreux et continuels bienfaits. Je ſais bien que, Te vouant aux grandes affaires, celles dont il convient à un homme ſi haut placé de s'occuper, Tu n'es nullement libre, quelle que ſoit la capacité de Ton eſprit, de fixer Ton attention ſur des ſpéculations de ce genre. Toutefois j'oſe penſer, Grand Roi, que ceci ne T'empêchera nullement d'accepter mon don avec quelque plaiſir et d'approuver mes efforts, puiſque nous voyons que ce qui Te plaît le mieux c'eſt ce qui a le plus d'utilité publique, et que Tu ne ſouhaites rien davantage que de faire prendre un grand eſſor aux meilleures ſciences, de les voir s'enrichir par de nouvelles découvertes. Ceci en effet eſt abondamment prouvé par

usibus dicata, visuntur in præclara illa Uraniæ arce, quam insigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædificandam curasti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hujus inventi, quod in tua tempora inciderit, non parum mihi gratulari soleo. Nec jam requiret quisquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem descriptionemque explicui, augusto Nomini tuo inscribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigisse didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio constaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuisque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi significatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiisque iis intento, quæ in illo rerum fastigio positum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum esse, ut ad hujusmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minusve tibi probatum iri arbitror, Rex augustissime; cui illa maxime placere videmus, quæ plurimum publicè prosunt; neque aliud magis curæ esse, quam ut nova incrementa sumant optimæ disciplinæ, novisque illustren-

cette grande et extraordinaire libéralité avec laquelle Tu protèges ces ſciences et ceux qui y excellent; libéralité que les très grands frais des guerres, bien qu'ils ſurpaſſent énormément les dépenſes ordinaires, ne diminuent en rien et que les confins de la France, Ton royaume, ne limitent point. Ce qui prouve clairement que Ton but n'eſt pas ſeulement d'augmenter le bonheur de ceux qui vivent ſous Ta domination, mais encore de rendre le monde entier, partout où il ſe montre digne de Tes bienfaits, plus ſavant, plus civiliſé, plus heureux. Peut-être les monuments littéraires tels que celui-ci contribueront-ils eux auſſi quelque choſe à cette gloire, qui eſt Ta gloire la plus véritable et la plus haute: ils pourront ſans doute, tout en démontrant à la poſtérité qu'en ce temps les études et les arts fleuriſſaient, lui faire voir que cette floraiſon eſt due avant toutes choſes à Ta ſageſſe et Ta grandeur d'âme.



tur inventis. Hoc enim ſatis declarat eximia illa tua, ac ſingularis, tum in ipſis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immenſæ, ac ſolito majores, bellorum impenſæ quidquam imminuunt: non Galliæ tuæ fines circunſcribunt. Ut plane te hoc agere appareat, quo non ſolum ſub imperio tuo viventes, ſed & Orbis univerſus, quacunque beneficio tuo dignus eſt, te regnante, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui veriſſimæ præclariſſimæque gloriæ tuæ, ita aliquid fortaſſe etiam hæc literaria monumenta conducent; ut, ſi viguiſſe hoc tempore ſtudia iſta, arteſque, poſteris teſtari poſſint, ſimul illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque animi magnitudini, ante omnia acceptum ferendum eſſe. Lutetiæ Pariſiorum; XXV. Mart. A. CIƆIƆCLXXIII.



HADRIANI VALLII
DAPHNIS,
ECLOGA.

Ad Chriſtianum Hugenium Zulichemium Conſtantini F. [1]).

Finitimum tutela, ſimul jucunda voluptas,
Dilectæ Phœbo, Sceverinides Oceaninæ;
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
Navita, dicemus: veſtro ſic gurgite numquam
Pan lavet, aut turpes inceſtent æquora Fauni.
  Te, quem Fama vehit ſuper aurea ſidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
Hugenide, decus Hugenidum, fratrumque patriſque:
Haud indigna tuo ferimus donaria ſenſu,
Siceliſin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatio commenta Soleſia [2]) verſu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.
  Jam caput Oceano, ſtipata minoribus aſtris,
Extulerat, radijs fraternis æmula Phœbe [3]),
. . . .
32 Fert radians æther, vultus formaſque natantum [4]).
. . . .

LES HUIT DERNIERS VERS DU POÈME ONT ÉTÉ CHANGÉS [5]) EN:

Hæc Ancon: mihi viſa tibi quæ digna referri,
250 [6]) Hugenide, decus Hugenidum, cui ſidera curæ,
Nec Phœbum ac Pimplæ fas eſt contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque dicati.
Sic neque te facies peregrini terreat aſtri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIϽIϽCLXV.

---

[1]) Voir sur l'Eclogue de Vallius (T. V, p. 292—298) les p. 29 et 34 de l'Avertissement qui précède. On remarquera que les vs. 5—6 ont été modifiés conformément aux „mutanda" de la p.

299 du T. V, et que de plus les vs. 9—10 ainsi que les vs. 11—12 du texte original ont été intervertis.

[2]) Voir la note 5 de la p. 31. Les. vs. 56—57 (l. 10—9 d'en bas de la p. 293 du T. V) rappellent le début des Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα d'Aratos.

[3]) Nous avons déjà dit à la p. 30 que Vallius s'inspire en grande partie de Virgile. Comme celui-ci — et comme Homère — il considère, dans la longue partie mythologique de son poème, le ciel comme une voûte d'azur recouvrant la terre plate entourée de toutes parts par l'Oceanus. C'est de l'Oceanus que sortent, en se levant, la lune et les autres astres; comparez avec les vs. 14—15 les vs. 589—591 du Livre VIII de l'Eneïde.

Le vs. 35 (l. 11 de la p. 293 du T. V) et les vs. 169—172 (l. 22—25 de la p. 296) contiennent une allusion à la découverte de Mira Ceti par l'astronome hollandais J. F. Holwarda; comparez sur ce sujet la p. 293 du T. III.

Dans les vs. 173—182 dont nous avons parlé à la p. 34 Vallius donne, sous la forme poétique qui dispense de toute exactitude historique, un aperçu rapide du développement de l'astronomie depuis des temps fort anciens jusqu'aux jours de Huygens, et les vs. 183—221 (se terminant à la l. 9 d'en bas de la p. 297 du T. V) célèbrent ce dernier comme celui à qui était réservé, après le „primus Batavus" et Galilée, le „sollertior usus" de la lunette, partant la découverte d'un satellite de Saturne et de la véritable forme de cette planète, ainsi que l'invention de l'horloge à pendule capable e.a. de diriger les „Labyrintheos cursus" des navigateurs. Enfin l'apparition d'une comète donne à Ancon, ou Vallius, l'occasion de faire allusion aux observations de Huygens sur ce sujet.

[4]) Forme modifiée du vs. 32, non indiquée à la p. 299 du T. V.

[5]) Modification non indiquée dans le T. V.

[6]) C'est le vs. 253 du poème dans l'édition de 1673.

Notons encore que dans la l. 4 d'en bas de la p. 297 du T. V „cavasque" est une faute d'impression pour „carasque".

PRIVILEGE DV ROY

LOUIS par la grave de Dieu de Roy de France & de Navarre: A nos amez & feaux Conseillers, tenans nous Cours de Parlement, Maistres des Requestres ordinaires de nostre Hostel, Baillifs, Seneschaux, Prevosts, leurs Lieutenans, & tous autres Justiciers & Officiers qu'il appartiendra, Salut. Nostre cher & bien amé FRANÇOIS MUGUET nostre Imprimeur ordinaire, Nous a tres-humblement fait remontrer qui'il luy auroit esté mis ès mains un Livre intitulé, *Christiani Hugenii Zulichemii Const. F. Horologium Oscillatorium, seu de motu Pendulorum ad horologia aptato demonstrationes Geometricæ*, qu'il desireroit donner au public s'il Nous plaisoit luy en accorder la permission, humblement requerant icelle, À CES CAUSES voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous luy avons permis & accordé, permettons & accordons par ces presents d'imprimer ou faire imprimer ledit Livre en telle forme, caractere, volume, & autant de fois que bon luy semblera, durant le temps de six années entieres & consecutives, à commencer du jour qu'il sera achevé d'imprimer pour la premiere fois, faisant tres-expresses dé fenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, de l'imprimer ou faire imprimer, vendre my débiter durant ledit temps en aucun lieu de nostre Royaume, sans le contentement de l'Exposant, ou de ceux qui auront droit de luy, sous quelque pretexte que ce soit, à peine de quinze cens livres d'amende applicable, un tiers à Nous, un tiers à l'Hôpital General de nostre ville de Paris, & l'autre tiers à l'Exposant, de confiscation des exemplaires contrefaits, & de tous dépens, dommages & interests, à la charge qu'il en sera mis deux exemplaires en nostre Biblioteque ordinaire, un en celle du cabinet de nostre Louvre, & un autre en celle de nostre amé & feal Garde des Sceaux le sieur Daligre. SI vous mandons que du contenu en ces presentes vous fassiez jouir & user l'Exposant, & ceux qui auront droit de luy pleinement & paisiblement, cessant à faissant cesser tous troubles & empêchemens au contraire, voulans qu'en inserant ces presentes ou extrait d'icelles en chacun des exemplaires, elles soient tenuës pour bien & deuëment signifiées, Commandons au premier nostre Huissier ou Sergent sur ce requis, faire pour l'execution des presentes tous exploits à ce necessaires. CAR tel est nostre plaisir. DONNÉ à Versailles le dernier jour de Septembre l'an de grace mil six cens soixante-douze. Et de nostre Regne le trentiéme. Signé, LOUIS. Par le Roy, COLBERT.

Registré sur le Livre de la Communaute des Marchands Libraires & Imprimeurs de Paris, le 4. Novembre 1672. suivant l'Arrest du Parlement du 8. Avril 1653, & celui du Conseil Prive du Roy du 27. Fevrier mil six cens soixante-cinq. Signé, D. THIERRY, *Syndic*.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le premier jour d'Avril 1673.

Les Exemplaires ont esté fournis.



L'HORLOGE À PENDULE
OU
DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES
SUR LE
MOUVEMENT DES PENDULES ADAPTÉ AUX HORLOGES
PAR
CHRISTIAN HUYGENS DE ZUYLICHEM,
FILS DE CONSTANTYN.

Quinze années se sont écoulées [1]) depuis celle où nous avons fait connaître par la publication d'une brochure [2]) la construction des horloges que nous avions récemment inventée à cette époque. Attendu que depuis ce temps nous avons trouvé plusieurs choses qui regardent la perfection de cet ouvrage, nous nous sommes résolus à les expliquer en particulier dans ce livre-ci.

Ces choses sont si intimement liées à la perfection de cette invention qu'elles peuvent être considérées comme la principale partie et pour ainsi dire le fondement, qui y manquait auparavant, de tout ce mécanisme. En effet, le pendule simple ne possédait pas de mesure du temps certaine et égale, puisqu'on observe que les plus larges mouvements sont plus tardifs que les plus étroits; or, nous avons trouvé par le moyen de la géométrie une façon differente, inconnue jusqu'ici, de suspendre ce pendule: nous avons découvert une ligne possédant une courbure telle qu'elle se prête d'une façon entièrement admirable à lui donner l'égalité désirée. Depuis notre application de cette ligne aux horloges leur mouvement est devenu si constant et si certain qu'ensuite de plusieurs expériences faites par terre et par mer il est maintenant manifeste que ces horloges sont très utiles et à l'astronomie et à l'art de naviguer. C'est cette ligne que

[1]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 64 qui précède.



CHRISTIANI HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.

(p. 1).

HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM,
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.



NNUS agitur ſextus decimus [1]) ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello publicam fecimus [2]). Ab illo verò tempore cùm multa invenerimus ad perfectionem operis ſpectantia, viſum eſt ea ſingula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potiſſima ejus pars cenſeri poſſint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius deſtituta erat. Menſura enim temporis certa atque æqualis, pendulo ſimplici naturâ non inerat, cum latiores excurſus anguſtioribus tardiores obſerventur; ſed geometria duce diverſam ab ea, ignotamque antea penduli ſuſpenſionem reperimus, animadverſâ lineæ cujusdam curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata eſt. Quam poſtquam | horologiis adhibuimus, tam conſtans certusque eorum motus evaſit, ut poſt crebra experimenta terra marique capta, manifeſtum jam ſit & Aſtronomiæ ſtudiis & arti Nauticæ plurimùm in (p. 2).

[2]) L'„Horologium" de 1658.

décrit en l'air par sa circonvolution continuelle un clou attaché à une roue courante. Les géomètres de notre temps l'ont appelée cycloïde et l'ont examinée avec soin à cause de ses diverses autres propriétés. Quant à nous, nous l'avons considérée à cause de cette faculté dont nous parlions, savoir celle de mesurer le temps, laquelle nous y avons trouvée sans en avoir le moindre soupçon, rien qu'en raisonnant suivant les méthodes de l'art. Ayant depuis longtemps fait connaître cette propriété à quelques amis versés en ces matières (car c'est peu de temps après la première édition de l'horloge que nous l'avons aperçue), nous la proposons maintenant à lire à tous confirmée par la démonstration la plus exacte que nous ayons pu trouver. Ainsi ce sera en cette démonstration que consistera la principale partie de ce livre. Pour la donner, il a été nécessaire tout d'abord de corroborer et d'amplifier la doctrine du grand Galilée touchant la chute des corps graves, doctrine dont le fruit le plus souhaité et pour ainsi dire le sommet le plus élevé est précisément la propriété de la cycloïde que nous avons découverte.

Au reste, afin qu'on pût rapporter cette propriété à l'usage des pendules, il nous a fallu établir une nouvelle théorie des lignes courbes, savoir la théorie des courbes qui par leur évolution en engendrent d'autres. Ceci conduit à la comparaison de la longueur des lignes courbes et des lignes droites entre elles que j'ai poursuivie même au-delà de ce que mon sujet demandait: je l'ai fait à cause de la beauté et de la nouveauté apparentes de cette théorie.

Pour expliquer la nature du pendule composé, dont je démontre l'utilité dans la construction de ces automates, il a été nécessaire d'y ajouter ensuite la théorie des centres d'oscillation, dont plusieurs se sont occupés jusqu'ici sans beaucoup de succès; on y trouvera, si je ne me trompe, quantité de propositions remarquables relatives à des figures linéaires, planes et solides.

Mais devant toutes ces choses je mets la construction mécanique de l'horloge, et l'application du pendule, dans la forme qu'on a trouvée la plus propre aux usages astronomiques et à l'instar de laquelle on peut facilement fabriquer toutes les autres, en y apportant les changements nécessaires.

Or, parce qu'il est arrivé dans le beau succès de cette invention ce qui arrive ordinairement, et ce que j'avais prédit, savoir que plusieurs désireraient en être les auteurs, ou bien qu'ils voudraient attribuer cet honneur non pas à eux-mêmes mais du moins à quelqu'un de leur nation plutôt qu'à nous, je suis d'avis qu'à la fin il y a lieu de faire face à leurs efforts iniques. Et véritablement, il ne sera guère nécessaire de

iis esse præsidii. Hæc ea est linea quam defixus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aëre designat; à Geometris nostri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas sui proprietates diligenter expensa; à nobis verò propter eam quam diximus mensurandi temporis facultatem, quam nihil tale suspicantes, ac tantùm artis vestigiis insistentes, inesse ipsi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo post primam horologii editionem animadversa fuit) nunc eandem, demonstratione quàm potuimus accuratissima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonstratione potissima pars hujus libri versabitur. Ubi primùm necesse fuit novis nonnullis demonstrationibus stabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de descensu gravium doctrinam, cujus fructus desideratissimus, atque apex veluti summus, hæc ipsa quam invenimus cycloidis est proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum usum aptari posset, nova curvarum linearum consideratio adhibenda fuit, earum scilicet quæ sui evolutione alias curvas generant. Unde comparatio inter se longitudinis curvarum cum rectis nascitur, quam ulterius etiam quam præsens necessitas postulabat prosecutus sum, propter theoriæ, ut mihi visum est, elegantiam & novitatem.

Cæterùm ad explicandam Penduli Compositi naturam, cujus utilitatem in constructione horum automatôn demonstro, adjungenda fuit Centrorum Oscillationis contemplatio, à pluribus quidem, sed minus feliciter, hactenus tentata; in qua theoremata complura animadversione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, solidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittitur ipsa horologii mechanica constructio, pendulique applicatio, eâ formâ quæ ad usus astronomicos aptissima reperta est, ad cujus instar reliquæ omnes, mutatis quæ opus est, facile ordinari possint.

Quia vero contigit egregio hujus inventi successu, quod fieri plerumque solet, quodque futurum prædixeram, ut plures sese ejus auctores esse cuperent, aut si non sibi ipsis, suæ tamen nationis alicui potius quàm nobis eum honorem tribui vellent, iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic | arbitror. Nec sanè aliud fere (*p.* 3).

leur oppoſer autre choſe que ceci, ſavoir qu'il y a ſeize ans que j'ai trouvé la conſtruction des dites horloges par mes méditations particulières, et que je l'ai fait mettre à effet quand ni par les paroles ni par les écrits de perſonne il en avait été fait mention et qu'on n'en entendait pas le moindre bruit (je parle de l'uſage du pendule ſimple transféré aux horloges; car pour l'addition de la cycloïde, je ne crois pas que perſonne veuille me la diſputer); que l'année ſuivante, qui était la cinquante huitième de ce ſiècle, j'ai fait imprimer la figure et la deſcription de cet automate; et que j'ai envoyé de toutes parts des exemplaires tant de l'ouvrage lui-même que de ma brochure. Car comme ces choſes ſont ſi connues à tout-le-monde qu'elles n'ont beſoin d'être confirmées ici ni par les témoignages des ſavants ni par les Actes des Etats de Hollande, comme elles pourraient l'être, il eſt facile de voir ce qu'on doit juger de ceux qui, ſept ans plus tard, ont préconiſé la même conſtruction dans leurs livres comme ſi elle était due à eux ou à leurs amis [1]). Quant à ceux qui en font remonter l'origine à Galilée, s'ils diſent qu'il s'eſt eſſayé à trouver cette machine mais ſans pouvoir parvenir au but, il me ſemble qu'ils ôtent de ſa louange plutôt que de la mienne, attendu que dans ce cas j'ai cherché la même choſe que lui avec plus de ſuccès. Que s'ils ſoutiennent que la conſtruction a été achevée ſoit par Galilée lui-même, ſoit par ſon fils comme un ſavant l'a récemment prétendu, et que de telles horloges achevées ont été exhibées, je ne ſais comment ils eſpèrent qu'on leur en croira, puiſqu'il eſt peu vraiſemblable qu'une invention ſi utile eût pu être ignorée durant huit années entières et juſqu'à ce que je l'euſſe publiée. Mais s'ils diſent que cette invention a été cachée expreſſément, ils voient aſſez que tout autre homme déſireux de s'en arroger l'honneur, pourrait ſe ſervir du même raiſonnement. Il leur faudrait donc dans ce cas donner une preuve de ce qu'ils avancent; ſuppoſé qu'ils la donnent en effet, la choſe ne me regardera néanmoins en aucune façon à moins qu'on ne démontre en même temps que j'étais, moi, ſeul à ſavoir ce que tout-le-monde ignorait [2]). Voilà ce que j'ai jugé néceſſaire de dire pour ma défenſe. Mais venons maintenant à la conſtruction de l'automate.

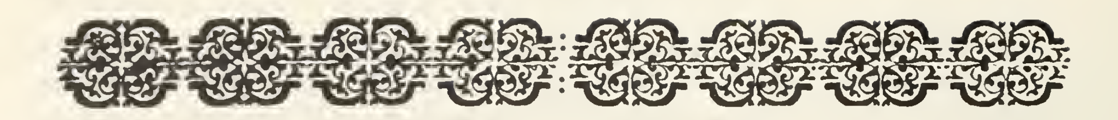
[1]) Nous ignorons quels sont les livres (ou le livre unique) auquel Huygens fait ici allusion. Un livre écrit sept ans après l'invention de l'horloge réglée par un pendule librement suspendu,

opponere iis necesse fuerit præterquam id unum, nempe ante annos sexdecim, cum nec dicto nec scripto cujusquam de horologiis hujusmodi mentio facta esset, aut rumor ullus omnino ferretur (loquor autem de penduli simplicis usu ad horologia translato, nam de Cycloidis additione nemo credo controversiam movebit) constructionem eorum propria meditatione me adinvenisse & perficiendam curasse. In sequenti anno, qui nempe hujus sæculi quinquagesimus octavus fuit, delineationem automati descriptionemque typis vulgasse; exemplaria, tum operis ipsius, tum libelli, quaquaversum dimisisse. Nam cum hæc ita omnibus nota sint, ut nec testimoniis eruditorum, nec Bataviæ Ordinum actis, quibus possent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis existimandum sit, qui septem post annis eandem constructionem, quasi à se suisve amicis profectam, libris suis venditarunt [1]). Qui vero Galileo primas hic deferre conantur, si tentasse eum, non vero perfecisse inventum dicant, illius magis quam meæ laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, investigaverim. Cum autem vel ab ipso Galileo, vel à filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductum fuisse contendunt, horologiaque ejusmodi re ipsâ exhibita, nescio quomodo sibi creditum iri sperent, cum vix verisimile sit adeo utile inventum ignoratum manere potuisse annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod si deditâ operâ celatum fuisse dicant, idem hoc intelligunt à quolibet alio posse obtendi, qui sibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, nisi unà quoque ostendatur, id quod omnes latebat, mihi soli innotuisse [2]). Et hæc quidem necessariæ defensionis causa dicenda fuere. Nunc ad ipsius automati constructionem pergamus.



dont le premier modèle avait été construit en décembre 1656 (T. XVII, p. 13, note 4 et p. 52, note 2), devrait dater de 1663. Il semble toutefois possible que Huygens entende parler d'un livre paru en Italie en 1662, savoir les Éphémérides de Cornelio Malvasia (1603—1666) — voir le titre complet à la p. 143 du T. III — dont il cite à la p. 243 du Manuscrit C le passage suivant de la p. 196: „Horologium nobis esse domi nostræ constitutum cujus motus per vibrationes penduli, modo jam Florentiæ ante annos aliquot invento, regulatur". Malvasia ne fait apparemment pas partie de „ceux qui en font remonter l'origine à Galilée", dont il est question dans la phrase suivante du texte.

[2]) Voir sur ce passage les p. 59—66 de l'Avertissement qui précède.



PREMIÈRE PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE

Contenant la defcription de l'horloge[1]).

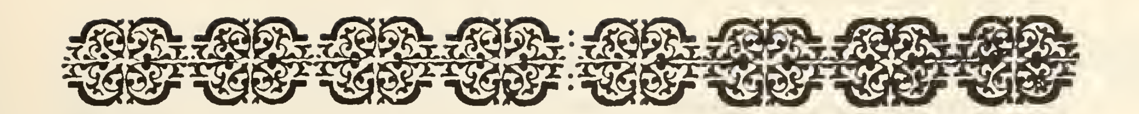
La figure ci-contre [Fig. 17 I, p. 71] repréfente l'horloge vue de côté. Elle fait voir premièrement deux platines AA, BB, longues d'un demi pied ou un peu plus, larges de deux pouces et demi, dont les angles font reliés par quatre petites colonnes, en forte que les platines font éloignées l'une de l'autre d'un pouce et demi. Dans elles font plantés les axes des principales roues, de part et d'autre. La première roue et la plus baffe eft celle qui eft marquée C, dans laquelle font découpées 80 dents et à l'axe de laquelle eft également fixée la poulie D, hériffée de pointes de fer pour pouvoir tenir la corde avec les poids qui y font fufpendus et dont nous dirons plus loin la difpofition. La roue C tourne donc par la force d'un poids; elle communique le mouvement au pignon E le plus proche qui a huit dents et en même temps à la roue F attachée au même axe qui en a 48. Par cette dernière eft mené un autre pignon G et une roue H coaxiale avec lui, lefquels ont les mêmes nombres de dents que la roue et le pignon précédents. Mais cette roue H eft de l'efpèce que nos artifans appellent „roue à couronne"[2]). Ses dents mènent le pignon I ainfi que la roue K fixée fur le même axe vertical. Ce pignon a 24 dents et la roue en a 15 qui font taillées comme celles d'une fcie. Au-deffus de la roue K et au milieu d'elle eft placée horizontalement la verge à palettes LM, dont les extrémités font foutenues de part et d'autre par les gnomons NQ et P féparément attachés à la platine BB. Il faut remarquer dans le gnomon NQ la partie Q proéminente vers le bas, laquelle laiffe paffer l'axe LM par une ouverture oblongue et maintient en outre dans la pofition verticale l'axe dont nous avons dit qu'il eft commun à la roue K et au pignon I et qui s'appuie en bas fur le gnomon R[3]). Dans la platine BB eft pratiquée une large ouverture deftinée à laiffer paffer l'extrémité de la verge à palettes LM, qui, inférée avec fa pointe fubtile dans le gnomon P, fe meut ainfi plus librement que fi elle était foutenue par la platine BB elle-même et fe

---

[1]) On trouve aussi une traduction française de cette Première Partie par L. Reverchon dans „l'Horloger, Revue Générale, réd. et adm. 19 rue de Turbigo, Paris" de décembre 1922 et ns. suivants.

[2]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 15 du T. XVII.

[3]) L'édition originale a N. Mais les „Corrigenda" imprimés à la dernière page de l'édition originale de l„Hor. osc." disent: „Pro N lege R; quæ litera in figura omissa est". Dans son



HOROLOGII OSCILLATORII (p. 5).

Pars Prima,

Deſcriptionem ejus continens.

FIGURA adſcripta [Fig. 17 I] horologium à latere inſpiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ ſunt AA, BB, ſemipedali aut paulo ultra longitudine, latæ pollices duo & ſemis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut ſesquipollice inter ſe diſtent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inſeruntur. Prima atque infima eſt quæ notatur C, dentibus 80 inciſa, cujus axi orbiculus quoque D affixus eſt, aculeis ferreis aſper, ut funem cum appenſis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur poſtea dicetur. Ponderis itaque vi rota C vertitur; hæc movet proximum tympanum E dentium octo, unáque rotam F eodem axe hærentem, cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud G, & in eodem axe rota H, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus eſt generis quas à forma coronarias vocant artifices noſtri [2]). Hujus dentibus agitatur tympanum I ſimulque rota K, quæ eodem axe tenetur, ad perpendiculum erecto. Tympano dentes 24; rotæ 15, atque hi ad inſtar ſerræ dentium inciſi. Supra mediam rotam K transverſus jacet axis pinnatus LM, cujus extrema ſuſtinent hinc inde gnomones NQ & P, ſeorſim affixi laminæ BB. Notanda vero in gnomone NQ pars deorſum prominens Q, quæ oblongo foramine patens transmittit axem LM, ſimulque retinet eum quem rotæ K tympanoque I communem eſſe diximus, inferiori ſui parte gnomoni R [3]) innitentem. In lamina BB foramen amplum excavatum eſt, quo ultra ipſam extendatur axis pinnatus LM, qui ſubtili cuſpide inſertus gnomoni P, liberius ita movetur quam ſi ab ipſa lamina BB ſuſtineretur ſimulque ultra eam promineret, debet enim prominere

---

exemplaire (voir la p. 67 qui précède) Huygens a biffé la lettre N en écrivant en marge „R quæ in figura omissa est". Dans ce qui suit nous tenons compte des corrections de ce genre sans en faire mention dans les notes. Après avoir de plus ajouté une douzaine de corrections manuscrites aux „Corrigenda" mentionnés, Huygens observe encore: „Multa diagrammata verso folio repetenda fuerant, quod omissum magno lectorum incommodo". Toutefois quelques figures avaient été répétées. 's Gravesande dans son édition de 1724 a tenu compte des corrections manuscrites (voir p.e. la note 1 de la p. 308 qui suit). Chez lui les figures ne sont pas incorporées dans le texte; elles occupent 27 planches.

Description de l'horloge.

prolongeait en même temps au travers d'elle: elle doit en effet néceſſairement ſe prolonger de ce côté-là afin que la manivelle S puiſſe y être attachée pour oſciller avec elle. Car il s'agit d'un mouvement oſcillant ou alternatif puiſque les dents de la roue K frappent à tour de rôle les palettes LL d'une manière fort connue et qui pour cette raiſon n'exige pas d'explication plus ample.

Quant à la manivelle S dont la partie inférieure eſt recourbée et percée d'un trou oblong, elle embraſſe la verge de fer du pendule à laquelle eſt attaché le plomb X. Cette verge eſt ſuſpendue en haut à un double fil entre deux petites lames dont l'une ſeulement, ſavoir T, eſt ici viſible. Pour cette raiſon nous avons tracé à côté une deuxième figure [Fig. 17 II] deſtinée à faire voir la forme et la courbure de l'une et de l'autre et toute la manière de ſuſpendre le pendule. Nous devrons toutefois revenir ſur ce ſujet et différer amplement ſur la véritable courbure des lames.

Parlons maintenant du mouvement de l'horloge; nous expliquerons plus loin les autres parties de la figure. Il paraît facilement que d'une part le mouvement du pendule VX eſt entretenu par la force des roues tirées par les poids après que ce mouvement lui a été donné au début par la main, et que d'autre part les oſcillations déterminées du pendule impoſent à toutes les roues et par conſéquent à l'horloge entière la loi et la règle du mouvement. En effet, la manivelle, quelque légère que ſoit l'impulſion qui lui eſt communiquée par les roues, ne ſuit pas ſeulement le pendule qui l'entraîne, mais contribue auſſi quelque choſe à ſon mouvement à chaque va-et-vient durant un temps très court; elle perpétue donc le mouvement qui ſans ce ſecours manquerait peu à peu de lui-même ou plutôt par la réſiſtance de l'air et tendrait au repos. D'autre part, le pendule ayant cette propriété d'avoir toujours la même allure et de ne s'en écarter que lorſque ſa longueur change, il n'eſt nullement permis à la roue K (du moins après que nous avons obtenu l'égalité d'allure dont nous parlions au moyen de la courbure des lames entre leſquelles le pendule eſt ſuſpendu) d'aller tantôt plus vite et tantôt plus lentement, quoiqu'elle tâche ſouvent de le faire comme elle en a l'occaſion dans les horloges vulgaires: ici toutes ſes dents doivent néceſſairement paſſer l'une après l'autre dans des temps égaux. Il eſt donc manifeſte que les converſions des roues précédentes ainſi que celles des aiguilles, qui ſont les dernières, ſont auſſi rendues uniformes, vu que toutes les parties ſe meuvent proportionnellement. Par conſéquent s'il y a quelque défaut dans la conſtruction, ou qu'à cauſe du changement de temps les axes des roues tournent plus difficilement, pourvu que cette difficulté ne ſoit pas aſſez grande pour amener l'arrêt complet de l'horloge, il n'y aura néanmoins à craindre aucune inégalité ou retardation du mouvement: toujours l'horloge meſurera bien le temps à moins qu'elle ne le meſure pas du tout.

Les aiguilles tournent et ſont diſpoſées de la façon ſuivante. YY eſt une troiſième platine parallèle aux deux premières, diſtante de celle qui eſt marquée AA de la quatrième partie d'un pouce. Sur elle les cercles horaires ſont décrits du centre α où émerge l'axe de la roue C. De ces cercles l'intérieur a la diviſion de douze heures, l'autre de ſoixante minutes. Or, à l'axe de la roue C eſt attachée, au-delà de la platine

neceſſario ut affigi poſſit clavula S, quæ ſimul cum eo verſationes faciat. Eſt autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem quum dentes rotæ K alternatim occurrant pinnulis LL, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione non indiget. Descriptio Horologii.

Porro clavula S, ima ſui parte reflexa ac foramine oblongo terebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum X affixum eſt, amplectitur. Hæc vero virga ſupernè duplici filo ſuſpenſa eſt inter geminas lamellas, quarum una T hic tantum cernitur; itaque alteram figuram [Fig. 17 II] juxta deſcripſimus, quæ utriusque formam flexumque & totam hanc ſuſpendendi penduli rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum iſtarum curvatura pluribus poſtea agendum erit. (p. 6).

Nunc autem ut de motu horologii dicamus, nam reliquas figuræ partes poſtea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, à pondere tractarum, perpendiculi VX motum ſuſtentari, poſtquam ſemel manu incitatum fuerit; & ſimul perpendiculi ſtatos recurſus rotis univerſis, totique adeo horologio movendi legem normamque præſcribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulſu acta, non tantum obſequitur trahenti perpendiculo, ſed & ſingulis recurſibus paulisper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui ſua ſponte, vel verius occurſu aëris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rurſus vero, quum ejusmodi ſit natura penduli ut eodem ſemper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri poſſit; utique poſtquam flexu lamellarum, inter quas ſuſpenſum eſt, æqualitatem illam conſequuti fuimus, nequaquam permittitur rotæ K, ut nunc citius nunc tardius incedat, etſi ſæpe, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur; ſed neceſſario ſinguli dentes ejus coguntur æqualibus tranſire temporibus. Hinc vero manifeſtum eſt, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles converſiones effici, cum omnia proportionaliter moveantur. Quamobrem ſiquid in fabrica vitii fuerit, vel, ob aëris mutatam temperiem, difficilius rotarum axes volvantur; dummodo non eo usque ut omnis horologii motus interrumpatur; nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, ſemperque aut rectè tempus metietur aut omnino non metietur.

Indices porro hoc pacto circumaguntur atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela eſt YY, pollicis quarta parte diſtans ab ea quæ notatur AA. In ea circuli horarii deſcripti ſunt centrum eodem α quo protenditur axis rotæ C. Quorum circulorum interior duodecim horarum diviſionem habet, alter ſcrupulorum 60. Axi vero rotæ C aptatur, ultra laminam AA, rota β, tubulo cohærens qui usque ad ε continuatur

Description de l'horloge.

AA, la roue β faifant corps avec un petit tuyau qui fe continue jufqu'en ε au travers de la platine YY: la roue β eft donc ainfi placée fur cet axe qu'elle participe à fon mouvement de rotation, mais peut néanmoins être tournée féparément lorfqu'il en eft befoin. Vers ε on met fur l'axe une aiguille qui fera fon tour en une heure et montrera ainfi les minutes ou foixantièmes parties de l'heure. Mais la roue que nous avons appelée β pouffe une autre roue d'un nombre égal de dents et en même temps un pignon de fix faifant corps avec elle, le petit axe commun des deux étant foutenu d'un côté par la platine A, de l'autre par le gnomon δ. C'eft par ce pignon que la dernière roue ζ eft mife en mouvement; elle a 72 dents et un tuyau faifant corps avec elle qui fe prolonge lui auffi au-delà de la platine Y jufqu'en θ, qui eft un peu plus proche de la platine que le tuyau de la roue β, ce dernier étant entouré par le tuyau de la roue ζ. A l'extrémité θ eft attachée l'aiguille horaire, un peu plus courte que celle des minutes dont nous avons parlé, vu que l'aiguille des heures doit décrire une circonférence divifée en foixante parties et, une ouverture ayant été pratiquée en Z dans la platine Y, ces divifions font indiquées tandis qu'elles paffent devant l'ouverture par une pointe attachée au haut du trou. Toute cette difpofition des aiguilles et des cercles horaires eft aperçue plus nettement dans la figure plus petite [Fig. 17 III] qui repréfente la forme extérieure de l'horloge.

Il faut en outre que, les roues étant arrangées comme nous l'avons dit, la longueur du pendule foit telle qu'elle mefure les fecondes par fes ofcillations fimples; cette longueur eft celle de trois pieds. Puifqu'on ne pouvait commodement dans la figure la faire voir comme elle eft, nous en avons repréfenté [Fig. 17 I] la cinquième partie depuis l'attache d'en haut où commence la courbure de la lame T jufqu'au centre du poids X. Je dis trois pieds, non pas de ceux qui font en ufage chez l'une ou l'autre nation européenne, mais à l'égard d'une mefure du pied déterminée précifément par la longueur de ce pendule. Qu'il nous foit permis d'appeler cette mefure dans la fuite le Pied Horaire. C'eft fûrement à elle que doivent être comparées les longueurs de tous les autres pieds dont nous voudrons laiffer la connaiffance certaine à la poftérité. Pour en donner un exemple: les fiècles à venir n'ignoreront jamais la longueur du pied parifien, auffi longtemps qu'on faura que fon rapport à celle du pied horaire eft de 864 à 881. Mais nous parlerons plus amplement dans les chapitres qui traitent du centre d'ofcillation de la détermination exacte de cette longueur [1]). Préfentement nous marquerons, puifque le fujet nous amène à confidérer ces détails, les temps des converfions des différentes roues et aiguilles, afin qu'on entende que toutes chofes cadrent exactement avec le nombre des dents fufdites.

Il paraît donc que par une converfion de la roue C la roue F tourne dix fois, la roue H foixante fois et la roue la plus haute K cent vingt fois: comme cette dernière a quinze dents et que les palettes LL font alternativement frappées par elles, on comptera 30 coups pendant une converfion de la roue K auxquels correfpondent autant d'ofcillations fimples du pendule VX. À 120 converfions correfpondront donc 3600 ofcillations fimples et c'eft là le nombre des fecondes qui font l'heure. Par con-

trans laminam YY; atque ita | insidet axi illi, ut una cum illo circumferatur; sine illo (p. 7).
tamen, ubi opus fuerit, converti possit. Ad ε index imponitur, horæ spatio circuiturus Descriptio Horologii.
atque ita scrupula prima, seu sexagesimas horarum, demonstraturus. Rota vero quam diximus β, aliam rotam, totidem quot ipsa habet dentium, impellit, atque una affixum ei tympanum cui dentes sex, axiculo eorum communi hinc laminâ A, inde gnomone δ suffulto. Hoc tandem tympano rota ζ movetur, dentes habens 72, tubulumque affixum qui & ipse ultra laminam Y ad θ porrigitur, paulo citra quam desinit tubulus rotæ β, quem intra se complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index, brevior aliquanto illo quem scrupula prima signare diximus, cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero scrupula ut absque errore demonstrentur, imponitur axi rotæ H, usque ad laminam Y producto, orbis λ, cui circulus in sexaginta partes divisus inscribitur, incisoque in laminâ Y foramine ad Z, eæ divisiones, cuspide in summo foramine defixâ, prætereuntes notantur. Hæc vero tota indicum circulorumque horariorum dispositio ex figura minori [Fig. 17 III] clarius perspicitur, exteriorem horologii formam referente.

Cæterum penduli longitudinem, rotis quemadmodum diximus ordinatis, eam esse oportet ut scrupula secunda singulis recursibus metiatur, quæ longitudo tripedalis est & commodè in schemate exhiberi non potuit. Tripedalem dico, non alicujus respectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in usu sit, sed certo æternoque pedis modulo ab ipsa hujus penduli longitudine desumpto, quem Pedem Horarium in posterum appellare liceat, ad illam enim omnium aliorum pedum mensuræ referri debent quas incorruptas posteris tradere voluerimus. Neque enim, verbi gratiâ, ignorabitur unquam venturis sæculis Parisini pedis modus, dum constabit eum ad Pedem Horarium esse ut 864 ad 881. Sed de hujus mensuræ exactissima constitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oscillationis [1]). nunc tempora conversionum in singulis rotis indicibusque obiter designabimus, ut rectè omnia ad dentium supra descriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem conversione rotæ C, decies circumire apparet rotam F, sexagies vero rotam H, & centies vicies supremam K: cui quum dentes sint quindecim, iisque alternatim pulsentur pin|nulæ LL, una conversione rotæ K numerabuntur ictus 30, (p. 8).
quibus respondent totidem itus reditusque penduli VX. ideoque conversionibus 120, respondebunt oscillationes simplices 3600, qui numerus est scrupulorum secundorum

[1]) Voir la Prop. XXV de la Pars Quarta qui suit (p. 151 de l'édition originale).

Description de l'horloge.

ſéquent la roue C ſait un tour en une heure et avec elle l'aiguille attachée en E qui indique les minutes. Et comme la roue β, et par elle γ, tourne dans le même eſpace de temps avec ſon petit pignon de ſix duquel nombre celui des dents de la roue ζ eſt le dodécuple, il apparaît que cette dernière ne fait un tour complet qu'en douze heures et qu'il en eſt de même pour l'aiguille qui y eſt attachée en θ. Enſin comme nous avons montré que ſoixante tours de la roue H correſpondent à chaque converſion de la roue C, il s'enſuit que la première, avec le cercle λ qui y eſt attaché, tourne ſoixante ſois par heure, c.à.d. une ſois par minute; les ſoixantièmes parties du cercle λ montreront donc les ſecondes par leur paſſage [devant l'ouverture]. Il ſera donc maniſeſte que tout eſt bien ordonné. Le poids X à l'extrémité inſérieure du pendule eſt de trois livres, tout de plomb, ou le contenant ſous une ſuperficie de cuivre. Ce n'eſt d'ailleurs pas ſeulement par le poids du métal mais auſſi par ſa ſorme qu'il ſaut effectuer (car la choſe eſt de grande importance) que le pendule éprouve une réſiſtance auſſi ſaible que poſſible de la part de l'air. Le poids eſt par conſéquent ſaçonné en ſorme de cylindre couché, long, ſort aigu des deux côtés, tel qu'on le voit en *a* dans la plus petite des deux figures de l'horloge [Fig. 17 III]. Toutefois en celles qu'on conſtruit pour la navigation, la forme d'une lentille élevée a ſemblé plus propre [1]).

Dans la même figure on a repréſenté de plus la manière de ſuſpendre le deuxième poids *b*, celui qui ſert à entretenir le mouvement de l'horloge: nous avons néceſſairement dû inventer cette ſuſpenſion auparavant inconnue [2]), afin que la marche de l'horloge ne ſoit en aucune ſaçon interrompue ou empêchée pendant qu'on remonte ce poids, à quoi il ſallait abſolument prendre garde. On prépare donc une corde continue qui retourne en elle-même par l'exacte jonction de ſes extrémités. Cette corde paſſe ſur la première poulie, appelée D dans la plus grande figure, qui ſait corps avec la roue la plus baſſe; deſcendant de là, pour ſuivre cette direction, elle paſſe ſous la poulie *c* à laquelle le poids *b* eſt ſuſpendu. De là elle remonte juſqu'au-deſſus de la poulie *d* extérieurement attachée à l'horloge et pourvue de pointes de ſer ſur toute ſa circonférence; cette poulie eſt de plus munie de dents en ſaçon de ſcie de ſorte qu'elle tourne lorſqu'on tire la corde *e*, mais qu'elle ne peut aucunement ſaire une révolution en ſens inverſe. À partir de cette poulie la corde deſcend juſqu'à l'autre poulie *f* à laquelle eſt ſuſpendu un petit contrepoids *g* aſſez conſidérable pour empêcher le poids *b* de deſcendre autrement qu'en ſaiſant tourner la poulie *d*. En effet, à partir de la poulie *f* la corde retourne de nouveau à cette même poulie *d* d'où elle provenait. Il eſt maniſeſte que par cet arrangement le poids *b* tend toujours par la moitié de ſa gravité à ſaire tourner les roues de l'horloge et qu'il ne ceſſe pas même de le ſaire quand il eſt contraint de monter lorſque la main tire la corde *e*; de ſorte que le mouvement de l'horloge n'eſt jamais interrompu et qu'aucun retard ne réſulte du remontage.

On ne peut ſixer avec certitude la grandeur du poids *b*: plus le poids qui ſuſſit à entretenir le mouvement eſt petit, plus auſſi ſeront grandes les qualités et l'exactitude de la conſtruction de l'automate. Dans les meilleures horloges que nous avons juſqu'aujourd'hui, le poids moteur eſt réduit à ſix livres, le diamètre de la poulie D ayant été

unam horam efficientium. Itaque horæ tempore ſemel circumit rota C, cumque ea ſimul index ad E impoſitus, qui ſcrupula prima demonſtrat. Et quoniam eodem temporis ſpatio etiam rota β, & per eam γ, convertitur, cum tympanidio ſuo dentium ſex, ad quem numerum duodecuplus eſt numerus dentium rotæ ζ, apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ. Denique cum rotæ H ſexaginta converſiones reſpondere oſtenderimus ſingulis converſionibus rotæ C, hinc illa, una cum affixo orbe λ, ſexagies in ſingulas horas circumferetur, hoc eſt, ſemel unius ſcrupuli primi tempore, ideoque partes ſexageſimæ orbiculi λ ſecunda ſcrupula tranſitu ſuo oſtendent: atque ita omnia rectè ſe habere manifeſtum erit. Pondus X in imo perpendiculo trilibre eſt, plumbeum totum, vel ænea ſuperficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate ſed & figurâ inſuper proſpiciendum (plurimi enim refert) ut quam minimum occurſu aëris impedimentum ſentiat. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad *a* ſchemate horologii minore [Fig. 17 III]. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior viſa eſt [1]). Descriptio Horologii.

Porro eodem ſchemate & ponderis alterius *b*, quo motus horologii continuatur, ſuſpendendi ratio expreſſa eſt, quam, incognitam prius [2]), inveſtigare nobis neceſſe fuit, ne interim dum ſurſum retrahitur pondus iſtud, ceſſaret vel impediretur aliquatenus horologii curſus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in ſchemate majori notatus eſt D, amplectitur; inde deſcendens, altera ſui parte trochleam *c*, cui pondus *b* appenſum eſt, ſubit. Hinc ſuper orbiculum *d* aſcendit, extrinſecus horologio affixum, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque inſuper ſerratis dentibus ita eſt aptatus ut volvatur tracto fune *e*; nequaquam vero in partem contrariam revolvi poſſit. Ab hoc orbiculo deſcendit funis ad alteram trochleam *f*, cui pondus exiguum *g* appenditur, quantum ſufficit continendo majori *b*, ne aliter quam revoluto orbiculo deſcendat. Namque à trochlea *f* rurſus ad ipſum orbiculum D, unde deſcenderat, funis revertitur. Quibus ita | ſe habentibus, (*p.* 9). manifeſtum eſt ſemper pondus *b* dimidia ſui gravitate conari ut rotas horologii circumagat, nec tunc quidem ceſſare cum manu funem *e* trahente aſcendere cogitur; adeoque horologii motum nusquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi.

Gravitatis modus in pondere *b* definiri certo non poteſt, ſed quo minor conſervando motui ſuffecerit, eo melius accuratiusque fabrefactum automaton arguet. In noſtris, quæ optima hactenus habemus, ad ſex libras redactum eſt, poſita nimirum orbiculi D

[1]) Voir les Fig. 8, 9 et 11 qui précèdent et 21 qui suit.
[2]) Voir les p. 64 et 65 du T. XVII.

Description de l'horloge.

fixé à la grandeur d'un pouce à peu près comme la figure l'indique, et le poids du pendule à trois livres, sa longueur à autant de pieds. La longue verge du pendule, pour mentionner encore ce détail, passera par la partie inférieure de la cage de l'horloge à travers un trou assez large pour rendre les oscillations possibles. Quant à l'horloge elle-même, laquelle est suspendue à hauteur d'homme, elle marche 30 heures.

Reste à décrire la forme des lames entre lesquelles nous avons dit que le pendule est attaché [Fig. 17 II] et dont la fonction fort importante est de rendre sa période constante. En effet, sans elles les oscillations simples du pendule (quoique d'aucuns aient pensé différemment [1])) ne seront pas isochrones mais les plus étroites auront une période plus courte. C'est ce qu'on découvre aisément par l'expérience suivante: si l'on prend deux fils de même longueur, portant des poids égaux et suspendus séparément, qu'on écarte l'un beaucoup, l'autre peu, de la perpendiculaire et qu'on les lâche simultanément, on ne les verra pas longtemps mouvoir ensemble dans le même sens mais celui dont les oscillations sont plus étroites prendra l'avance. D'autre part on peut aussi trouver les rapports des temps correspondant à des arcs quelconques; on les exprimera en nombres calculés d'après des principes bien établis et aussi proches qu'on voudra. On peut dire par exemple que le temps d'une chute le long de tout un quart de circonférence est à celui qui correspond à un très petit arc à peu près comme 34 est à 29 [2]). De sorte qu'on ne doit aucunement attribuer cette diversité à la résistance de l'air, comme quelques-uns l'ont voulu [3]), mais qu'elle provient de la nature même du mouvement et de celle du cercle. On pourrait encore tirer cette conclusion de la construction du pendule isochrone, vu que celui-ci s'écarte notablement dans son mouvement de la circonférence de cercle, comme cela paraîtra bientôt.

Il pourra peut-être sembler que dans nos horloges du genre ici considéré, où l'amplitude des oscillations est toujours la même, l'inégalité dont nous parlions n'aura aucune importance et que par conséquent aucune correction du pendule ne sera nécessaire. Il en serait vraiment ainsi si l'amplitude de toutes les oscillations était constamment et absolument la même. Mais comme elle est quelquefois un peu plus grande et d'autres fois un peu plus petite, une assez grande différence résulte enfin de ce grand nombre de différences fort minimes; c'est ce que l'effet et les expériences font bien voir. Car quoique la force du poids par rapport à la prochaine roue soit toujours la même, cependant, étant transmise par tant d'autres, avec quelque soin qu'on les ait limées, elle ne parvient pas toujours en même intensité au pendule. D'ailleurs le mouvement des roues est aussi rendu plus difficile par le froid et par la disparition ou la corruption de l'huile qu'on y verse. Mais ce sont surtout les oscillations des horloges marines qui deviennent inégales à cause du ballottement continuel du navire, de sorte qu'il faut sans doute corriger le défaut d'inégalité chez toutes les horloges, mais que c'est surtout dans le cas des horloges marines qu'il faut veiller à ce que les oscillations de grande et de petite amplitude soient isochrones.

[1]) Comparez la note 1 de la p. 4 du T. XVII.

diametro pollicari fere, uti exhibita fuit; item perpendiculi pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capſam horologii dependet, oblongo foramine perviam, quantum oſcillationibus peragendis neceſſe eſt. Ipſum vero horologium, ad hominis altitudinem ſuſpenſum, horis 30 moveri perſeverat. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Supereſt nunc forma lamellarum deſcribenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præſtandum vel præcipua eſt opera. Absque his enim Penduli ſimplicis oſcillationes (etſi nonnullis aliter viſum eſt [1]) non erunt æque diuturnæ, ſed brevioris temporis eæ quæ per minores arcus incedent; idque primùm experimento hujusmodi facile deprehenditur. Si enim fila accipiantur ejusdem longitudinis duo, paribusque in parte ima ponderibus religatis, utrumque ſeorſim ſuſpendatur, tumque alterum eorum procul à linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, ſimulque è manu dimittantur; non diu utrumque ſimul in partes easdem ferri videbitur, ſed prævertet illud cujus exiliores erunt recurſus. Sed & temporum per quoslibet arcus rationes numeris definiri poſſunt, certâ ſcientiâ nixis, & vero quam libuerit propinquis, veluti quod tempus deſcenſus per totum circuli quadrantem eſt ad tempus per arcum minimum fere ut 34 ad 29 [2]). Adeo ut nequaquam reſiſtentiæ aëris ea diverſitas imputanda ſit, ut quidam voluere [3]), ſed ex ipſa motus natura circulique proprietate naſcatur. Quod alio quoque argumento concludi poſſit ex ipſa Penduli iſochroni conſtructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

Sed videatur forſan in noſtris horologiis hiſce, ubi eadem ſemper eſt oſcillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod ſane ita eſſet ſi latitudo omnium planè eadem | con- (p. 10). ſtanter maneret. Sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiolis tandem magna ſatis conflatur, idque ita eſſe reipſa atque experimentis evincitur. Etſi enim eadem ſemper ſit ponderis vis, rotæ ſibi proximæ reſpectu, tamen per tot alias transdita, quantâcunque curâ limatæ fuerint, non ſemper eadam ad perpendiculum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur; itemque evaneſcente aut ſordeſcente quod illis additur oleo. Sed præcipue inæquales fiunt oſcillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in univerſum, ſed his maxime omnium remedio opus ſit, quo reciprocationum Penduli latiorum anguſtiorumque tempora æqualia evadant.

---

[2]) 34 : 29 = 1,172 . ., tandis que la vraie valeur est 1,180 . ., comme Huygens l'a trouvé plus tard. Voir sur ce sujet l'Appendice II à la Pars Prima qui suit.

[3]) À la deuxième page de la „Præfatio generalis" de ses „Cogitata Physico-mathematica" de 1644 Mersenne attribue à la résistance de l'air l'inégalité des périodes d'oscillations d'amplitudes différentes.

Description de l'horloge.

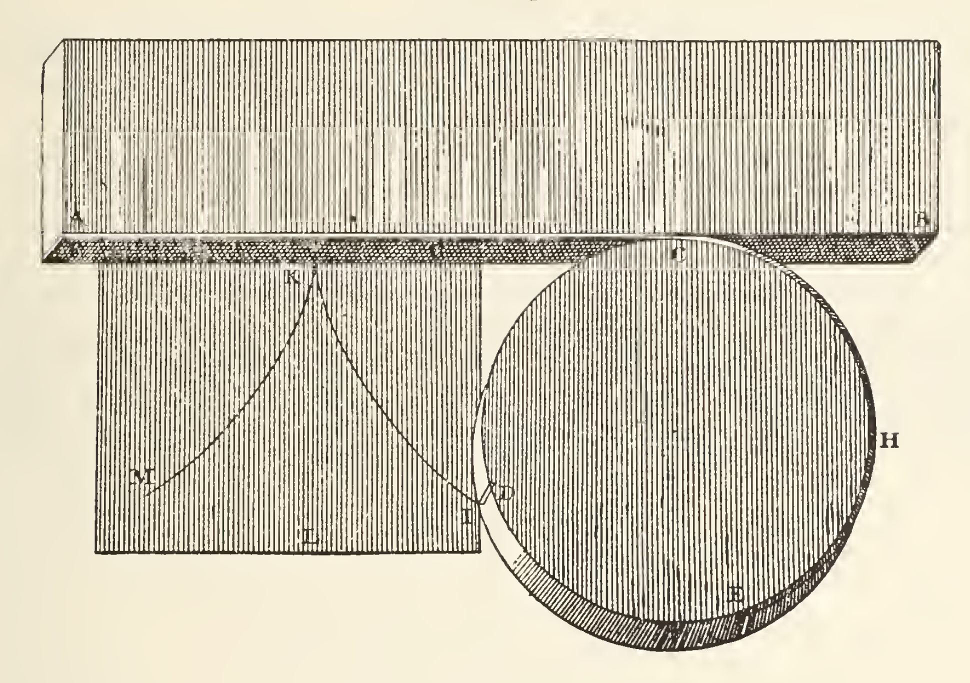
Or, pour pouvoir définir la forme des lames dans lesquelles le remède consiste, il faut d'abord avoir déterminé la longueur du pendule, laquelle est facilement déduite de la règle que les longueurs des pendules sont entre elles comme les carrés des périodes. De sorte que, la longueur du pendule qui mesure les secondes étant d'après notre définition de trois pieds, sa quatrième partie, c.à.d. neuf pouces, conviennent au pendule qui marquera les demi-secondes. De même si l'on demande la longueur du pendule dont les oscillations simples atteignent le chiffre de 10000 en une heure, le calcul sera fait comme suit. Nous savons qu'on compte 3600 oscillations simples par heure dans le cas du pendule de trois pieds; la période de ce pendule surpasse donc celle du pendule cherché dans le rapport 10000 : 3600 ou 25 : 9. Par conséquent comme le carré du nombre 25 est au carré de 9, c.à.d. comme 625 est à 81, ainsi sera la longueur de trois pieds à la longueur cherchée, qui est donc de 4 $\frac{66}{100}$ pouces.

Après que la longueur du pendule à été fixée de cette manière (p. e. à trois pieds, dans le cas de l'horloge proposée par nous), la ligne cycloïdale qui donnera la courbure des lames T sera décrite de la façon suivante.

Soit attachée sur une table plane la règle AB grosse d'un demi-doigt [Fig. 18]. Ensuite soit fait un cylindre CDE d'une hauteur égale à cette grosseur et ayant le diamètre de la base égal à la moitié de la longueur du pendule; et soit FGHE une petite bande ou plutôt une mince plaque attachée à la règle en F et à la circonférence du cylindre en quelque point E, de sorte qu'elle s'applique en partie au cylindre et qu'en partie elle s'étende le long de la règle AB. Qu'une pointe de fer DI soit attachée

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus poſitum eſt remedium iſtud, in primis Penduli longitudinem ſtatuiſſe oportet, quæ facile ex eo habetur, quod ſint inter ſe longitudines perpendiculorum, ſicut temporum quæ in ſingulos recurſus impenduntur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus definiverimus longitudinem perpendiculi quod ſcrupula ſecunda metitur, ejus quarta pars, ſive unciæ novem debeantur ei quod ſemiſecunda notaturum ſit. Item ſi Penduli longitudo quæratur, cujus recurſus ſimplices 10000 horæ ſpatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Penduli nempe — DESCRIPTIO HOROLOGII.

[Fig. 18.]



tripedalis ſcimus 3600 recurſus in horas ſingulas numerari: ergo hujus recurſuum tempora ſingula, majora ſunt temporibus Penduli quæſiti, proportione 10000 ad 3600, ſive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc eſt, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe unciarum 4 cum $\frac{66}{100}$.

Poſita ergo longitudine perpendiculi, puta pedum trium in horologio à nobis propoſito, inde Cyclois linea, quæ curvaturam laminarum T datura eſt, hoc modo deſcribetur.

Super tabula plana affigatur regula AB, ſemidigiti craſſitudine [Fig. 18]. Deinde fiat cylindrus CDE eadem illa altitudine, diametrum vero baſeos, dimidiæ perpendiculi longitudini, æqualem habens; ſitque FGHE faſciola, ſeu potius bractea tenuis, affixa regulæ in F, cylindro verò in circumferentiæ puncto aliquo E, ita ut partim huic circumvoluta ſit, partim extendatur juxta latus regulæ AB. Cylindro autem infixa

Description de l'horloge.

au cylindre laquelle ait ſon extrémité un peu au-delà de la baſe inférieure et en façon qu'elle réponde exactement à ſa circonférence.

Les choſes étant ainſi arrangées, la pointe I décrira ſur le plan de la table placée au-deſſous la ligne courbe KI appelée cycloïde, auſſitôt que le cylindre tourne en ſuivant la règle AB, dont il n'eſt ſéparé que par la groſſeur de la petite lame FG. La baſe du cylindre employé ſera le cercle générateur, CDE, de la cycloïde. Or, après que nous avons appliqué à la règle AB la table ou lame KL et que la partie KI de la cycloïde y a été tracée, nous retournerons cette lame et tracerons ſur l'autre côté une ligne ſemblable KM émanant du même point K. Enſuite nous découperons la figure MKI exactement ſuivant ces lignes. C'eſt à cette figure-là qu'il faut adapter l'intervalle des lames entre leſquelles le pendule eſt ſuſpendu [1]). À l'uſage des horloges les petites portions d'arcs KM et KI ſuffiſent; le reſte de la ligne courbe ſerait inutile puiſque le fil du pendule ne peut l'atteindre.

Mais afin qu'on entende plus pleinement la nature et l'effet de cette ligne admirable, il m'a ſemblé bon de repréſenter ici dans une autre figure [Fig. 19] les ſemicycloïdes entières KM et KI entre leſquelles le pendule KNP, d'une longueur égale à deux fois le diamètre du cercle générateur, eſt ſuſpendu, lequel étant mis en mouvement exécutera des oſcillations iſochrones, quelle que ſoit leur amplitude, juſqu'à la plus grande de toutes correſpondant à l'arc MPI: de telle manière que le centre de la ſphère P attachée au fil ſe trouve toujours ſur la ligne MPI qui eſt elle auſſi une cycloïde. J'ignore ſi cette propriété remarquable eſt donnée à aucune autre ligne, ſavoir celle de ſe décrire ſoi-même par ſon évolution [2]). Or, ce que nous avons dit à

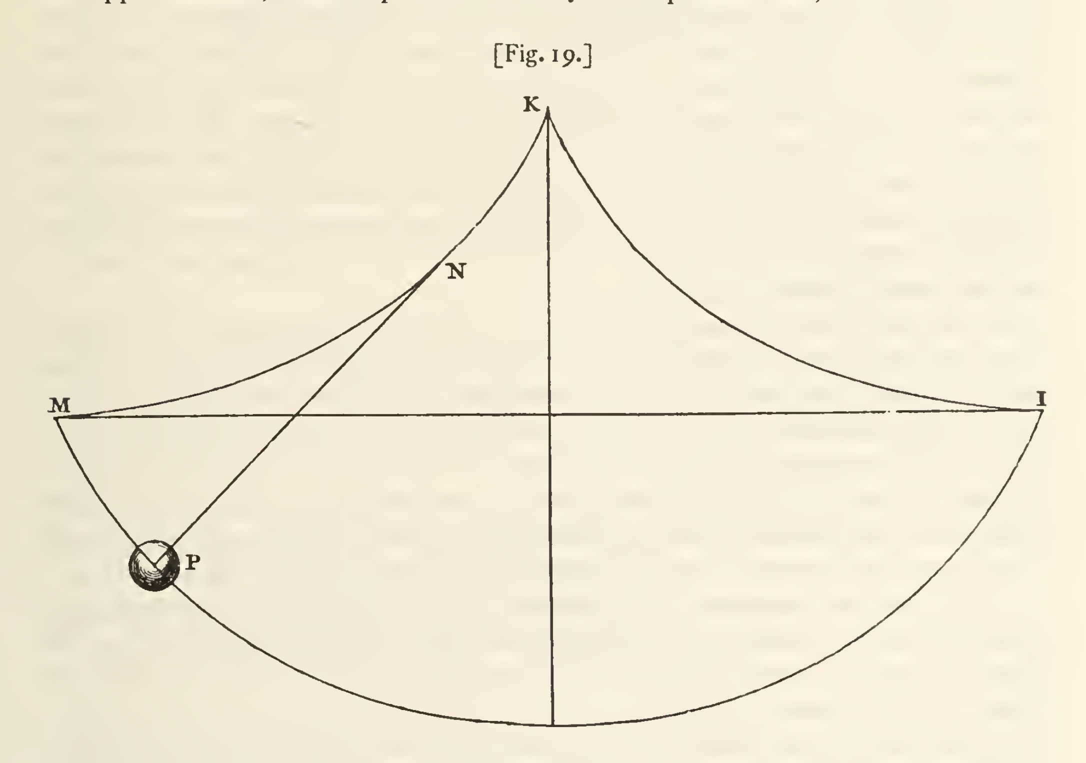
[1]) Voir la fin du premier alinéa de la note 3 de la p. 99 du T. XVII.

[2]) Voir sur ce sujet la p. 40 de l'Avertissement qui précède et l'Appendice III à la Pars Tertia.

ſit ferrea cuſpis DI, pauxillum ultra baſin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exactè reſpondeat. Descriptio Horologii.

His ita ſe habentibus, ſi cylindrus ſecundum regulam AB volvatur, bracteolæ tantum FG craſſitudine intercedente, eâque ſemper quantum poteſt extenſâ, deſcribet cuſpis I in ſubjecto tabulæ plano lineam curvam KI, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit CDE, cylindri adhibiti baſis. Quod ſi jam laminam KL ad regulam AB applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione KI, invertemus deinde (p. 11).

[Fig. 19.]



ipſam, & in ſuperficie adverſa ſimilem lineam KM, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram MKI, accurate ſecundum lineas iſtas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interſtitium aptari oportet, inter quas perpendiculum ſuſpenditur [1]). Sufficiunt autem ad horologiorum uſum portiones exiguæ arcuum KM, KI; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non poteſt.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras ſemicycloides KM, KI, alio ſchemate [Fig. 19] hic exprimere viſum fuit, inter quas ſuſpenſum agitatumque Pendulum KNP, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oſcillationes, usque ad maximam omnium per arcum MPI, iisdem temporibus confecturum ſit: atque ita, ut appenſæ ſphæræ P centrum, in linea MPI, quæ & ipſa cyclois integra eſt, ſemper verſetur. Quæ proprietas inſignis, neſcio an alii præter hanc lineæ data ſit, ut nempe ſe ipſam ſui evolutione deſcribat [2]). Hæc autem

Description de l'horloge.

propos d'elle ſera démontré en détail lorſque nous traiterons de la chute des corps graves et de l'évolution des courbes.

Obſervons encore qu'il y a une autre manière de tracer la cycloïde, ſavoir par points trouvés ſéparément. Soit décrite une circonférence de cercle de diamètre AB égal à la moitié de la longueur du pendule [Fig. 20]. Prenons ſur cette circonférence un nombre quelconque de parties égales AC, CD, DE, EF, AG, GH, HI, IK et joignons leurs extrémités par les droites GC, HD, IE, KF parallèles entre elles. Prenons enſuite la ligne droite LM égale à l'arc AF, diviſons-la en autant de parties égales qu'il y en a dans l'arc AF et portons des lignes CN et GO égales à une de ces parties ſur la droite CG. Portons enſuite ſur la droite DH les lignes DP et HQ égales chacune à deux parties de la droite LM; ſur la droite EI les lignes ER et IS égales chacune à trois parties de la droite LM, et ainſi de ſuite ſi l'on a pris un nombre plus grand de parties. Enfin ſoient FT et KV ſur la ligne extrême FK égales chacune à la ligne LM entière. Si l'on décrit maintenant des courbes par les points AOQSV et ANPRT, celles-ci ſeront de nouveau des portions de la cycloïde cherchée entre leſquelles il faut ſuſpendre le pendule [1]).

Or, la droite LM eſt trouvée égale à l'arc AF lorſqu'on prend d'abord XZ égale à la ſomme des deux cordes qui ſouſtendent les moitiés de cet arc et, à partir du même point, XY égale à la corde de l'arc AF entier, et qu'on ajoute enfin à la ligne XZ le tiers ZΔ de la différence YZ. Car la ligne entière XΔ ſera à ſi peu près égale à l'arc entier AF que, quand même ce dernier ſerait la ſiixième partie de la circonférence (et une plus grande partie n'eſt jamais requiſe pour notre but), il n'y manque pas la ſix-millième partie de la véritable longueur, comme cela a été démontré dans ce que nous avons écrit auparavant ſur la grandeur de la circonférence de cercle [2]).

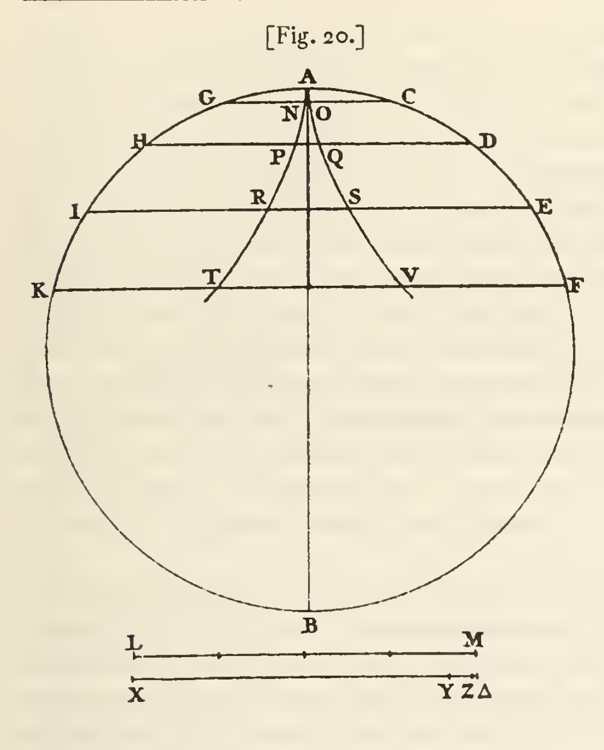
Après avoir fait connaître ce qui ſe rapporte à la conſtruction de l'horloge, nous devons maintenant expliquer auſſi de quelle manière on doit l'ajuſter pour qu'elle donne la vraie meſure des heures. On examinera en premier lieu, de la manière ſuivante, ſi ſon mouvement eſt juſte.

Qu'on choiſiſſe pour l'oeil de l'obſervateur un endroit bien déterminé d'où les aſtres peuvent être aperçus ainſi que des toits ou des murs d'édifices voiſins ainſi placés que lorſque certains d'entre les aſtres, du nombre des étoiles fixes, les atteignent, ces étoiles deviennent inviſibles à l'inſtant même. Il faut placer en cet endroit une ouverture de la grandeur de la pupille afin qu'on puiſſe les jours ſuivants remettre l'oeil au même point ſans aucune erreur. On doit marquer le temps indiqué par l'horloge au moment où une étoile arbitrairement choiſie diſparaît, et la même choſe le

[1]) Comparez la Fig. 22 à la p. 99 du T. XVII.

[2]) Voir à ce ſujet les p. 146—149 du T. XII (Probl. III. Prop. XII du Traité „De circuli magnitudine inventa" de 1654).

[Fig. 20.]



quæ dicta sunt, in sequentibus, ubi de descensu gravium, deque evolutione curvarum agemus, singula demonstrabuntur. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Licebit autem aliter quoque, per inventa puncta, cycloidem designare. Describatur circulus diametro AB, quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis sit [Fig. 20]. In cujus circumferentia sumptis partibus æqualibus quotlibet, AC, CD, DE, EF, AG, GH, HI, IK, jungantur GC, HD, IE, KF, quæ erunt inter se parallelæ. Deinde arcui AF sumatur æqualis linea recta LM, eaque in partes æquales totidem dividatur quot sunt in arcu AF, earumque partium uni æquales ponantur singulæ CN, GO in recta CG; duabus vero partibus rectæ LM, æquales fiant singulæ DP, HQ in recta DH. Tribus vero, singulæ ER, IS in recta EI; atque ita porro si partes plures fuerint acceptæ; ac tandem toti LM æquales fiant singulæ FT, KV in linea extrema FK. Jam si curvæ describantur per puncta AOQSV, ANPRT, hæ rursus quæsitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet [1]). (*p.* 12).

Recta autem LM æqualis arcui AF invenitur, si primum duabus rectis, quæ semissibus arcus AF subtenduntur, æqualis ponatur XZ, totius vero arcus subtensæ AF æqualis ab eodem termino accipiatur XY, differentiæque YZ triens ZΔ ad totam XZ adponatur. Nam tota XΔ toti arcui AF tam prope æqualis erit, ut licet sextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una sexies millesima parte suæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac scripsimus, demonstratum est [2]).

Explicitis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum est, quo pacto ad veram horarum mensuram componi debeat. Ergo primum, an recte se habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.

Oculo observatoris certus eligatur locus, unde sidera despici possint, simulque tecta parietesve vicinarum ædium, sic posita, ut, cum eò appulerint stellæ quædam è fixarum numero, simul videri desinant. Eo loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, constituatur, ut sequentibus diebus, absque errore, oculus ad idem punctum reponi possit. Jam ad momentum ipsum, cum stellarum aliqua è conspectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem postero die, vel potius aliquot diebus intermissis, fiat. (*p.* 13).

Description de l'horloge.

jour ſuivant ou plutôt quelques jours plus tard. Que s'il n'y a qu'un intervalle d'un ſeul jour entre deux obſervations, il faut que dans la deuxième obſervation l'horloge indique la même heure que dans le cas de la première à 3 minutes et 56 ſecondes près. S'il en eſt ainſi il ſera établi que le pendule a la bonne longueur; car c'eſt là la différence de laquelle la durée d'une révolution quelconque des étoiles fixes ſurpaſſe celle du jour ſolaire moyen. Je dis le jour moyen puiſque les jours ſolaires, de midi à midi, ne ſont pas tous égaux entre eux, comme cela ſera plus amplement expliqué un peu plus loin. Mais ſi l'obſervation n'eſt répétée qu'après pluſieurs jours, il faudra compter la même différence pour chacun d'eux. Admettons par exemple que dans la première obſervation, au moment où l'étoile diſparaît, l'heure de l'horloge ſoit 9 h. 30 m. 18 ſ. et qu'enſuite, ſept jours plus tard, elle indique, au moment de la diſparition de la même étoile, 8 h. 50 m. 24 ſ. La différence en moins de cette dernière indication par rapport à la première eſt de 39 m. 54 ſ.; laquelle, étant diviſée par 7, donne une retardation diurne de 5′42″. Mais elle devait être de 3′56″, inférieure à l'autre de 1′46″. C'eſt donc là le retard journalier de l'horloge par rapport à la meſure véritable ou moyenne des jours.

On pourra d'ailleurs comparer encore d'une autre manière le mouvement de l'horloge avec celui du ſoleil. Mais ici il faudra tenir compte de l'inégalité des jours naturels. En effet, comme je l'ai déjà dit, tous les jours naturels n'ont pas la même longueur, et quoique la différence ſoit petite elle monte cependant ſouvent durant un intervalle de pluſieurs jours à un total qui n'eſt aucunement négligeable. Car ſi l'on poſſède un cadran ſolaire de conſtruction parfaite et que d'autre part le mouvement de l'horloge automate eſt rendu abſolument conforme à la plus véritable meſure des jours et ne s'en écarte point, il adviendra cependant néceſſairement qu'à certaines époques de l'année les deux inſtruments montrent une différence d'un quart d'heure ou même d'une demi-heure et que derechef à d'autres époques bien déterminées ils s'accordent d'eux-mêmes. On le comprendra en conſidérant la table de l'équation du temps que nous ajoutons; mais il faut auparavant en expliquer l'uſage qui eſt celui-ci.

Qu'on prenne l'équation de la table correſpondant au jour auquel nous avons au début de nos obſervations mis l'horloge d'accord avec le ſoleil, en d'autres termes avec le cadran ſolaire. Qu'on prenne auſſi l'équation du jour auquel on demande avec quel degré d'exactitude l'horloge a été réglée ſur la durée des jours. Si alors la première équation ſurpaſſe la deuxième, l'heure de l'automate devra ſurpaſſer celle du cadran ſolaire de la même différence. Mais ſi l'équation du jour poſtérieur eſt trouvée plus grande, l'excès ſera du côté de l'heure du cadran, en d'autres termes de l'heure ſolaire. Suppoſons par exemple que le 5 mars le cadran ſolaire et l'automate s'accordent. On trouve dans la table pour ce jour une équation de 3 minutes et 11 ſecondes. Suppoſons enſuite qu'on veuille ſavoir le 20 du même mois ſi l'automate meſure correctement ou non les heures égales. On trouvera indiquée dans la table pour ce jour poſtérieur une équation de 7 minutes et 27 ſecondes. Comme cette dernière ſurpaſſe la précédente de 4 minutes et 16 ſecondes, l'heure du cadran devra ſurpaſſer d'autant

Quod fi tantum unius diei fpatium duabus obfervationibus intercefferit, oportet in postrema obfervatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima obfervatione annotatum fuerat, fcrupulis primis 3, fecundis 56. Ita enim rectè fe habere perpendiculi longitudinem conftabit; quum tanto fuperetur quælibet fiderum fixorum revolutio à die folari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies folares, de meridie ad meridiem, non omnes inter fe æquales funt, ut mox amplius exponetur. Si vero poft plures demum dies obfervatio repetatur, in fingulos tantundem differentiæ caufa computandum erit. Sit, exempli gratiâ, in prima obfervatione, ad momentum evanefcentis ftellæ, adnotata horologii hora 9, cum fcrupulis primis 30, fecundis 18; deinde, feptimo poft die, eâdem difparente ftellâ, indicet horam 8, cum fcrupulis pr. 50, fec. 24. Hæc hora deficit à priore fcrupulis pr. 39, fecundis 54. Quæ, in feptem divifa, dant retardationem diurnam fcrupulorum 5'. 42". Debebat autem effe fcrupulorum 3'. 56". quæ illâ minor eft fcrupulis 1'. 46". | Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, feu media, dierum menfura.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

(*p.* 14).

Cæterum alio quoque modo, ad folem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter fe æquales; & quanquam exiguum fit difcrimen, tamen plurium dierum intervallo fæpe eo usque excrefcit, ut haudquaquam contemni posfit. Etenim fi & folarium quam perfectiffime defcriptum habeatur, & horologii automati motus ad veriffimam dierum menfuram exactus fit, neque ab ea recedat; eveniet tamen neceffario ut, certis anni temporibus, fæpe horæ quadrante, aut etiam femihora, inter fe difcrepent, ac rurfus ftatis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita effe, ex tabula temporis æquatoria quam fubjicimus, intelligetur; poftquam ufum ejus oftenderimus, qui eft hujusmodi.

Accipiatur æquatio tabulæ, affignata diei qua primum cum fole, five cum fciotherico, horologium ut conveniret fecimus. Itemque æquatio diei, qua quæritur quam bene ad dierum menfuram temperatum fit. Quod fi jam prior æquatio major fuerit fequente, fuperare debebit hora automati horam gnomonis eo, quo inter fe æquationes iftæ differunt. At fi pofterioris diei æquatio major inveniatur, erit exceffus penes horam gnomonis, five eam quæ ex fole obfervatur. Ut fi, exempli gratiâ, die 5 Martii in eandem horam conveniant fciothericum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, fcrupulorum primorum 3, fecundorum 11. lubeatque fcire ejusdem menfis die 20, an automaton horas æquales rectè metiatur necne: invenietur die pofteriori adfcripta æquatio fcrupulorum primorum 7, fecundorum 27. quæ quia fuperat præcedentem fcrupulis primis 4, fecundis 16, debebit tanto ferior

Description de l'horloge.

celle de l'automate. Si la différence eſt trouvée autre, on pourra facilement conclure de là combien l'automate avance ou retarde par jour.

Dans la computation de cette table j'ai tenu compte de deux cauſes, connues l'une et l'autre aux aſtronomes, ſavoir l'obliquité de l'écliptique et l'anomalie du mouvement du ſoleil. Tandis que d'une part la raiſon demande [cette inégalité deſjours ſolaires], d'autre part l'expérience auſſi, bâtie ſur ces mêmes horloges et qui ne pouvait aucunement être obtenue ſans elles, la révèle; attendu que les obſervations du ſoleil que nous avons faites ſouvent durant pluſieurs mois, notant chaque jour le moment où le ſoleil ſe trouvait au méridien, ſe ſont trouvées parfaitement d'accord avec l'équation ici propoſée [1]).

TABLE DE L'ÉQUATION DES JOURS.

[1]) Voir sur la question de l'exactitude de la Table de Huygens la p. 51 de l'Avertissement qui précède; et sur les observations de Huygens les p. 101—102 et surtout la note 4 de la p. 112 du T. XVII. Voir aussi les notes 9 et 12 de la p. 123 du même Tome.

esse hora sciotherici, quam quæ automato indicatur. Unde, si diversum reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies singulos exuperet automaton, aut retardet. Descriptio Horologii.

In computanda tabula hac duplicem causam adhibui, utramque Astronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & solaris motus anomaliam. Quod cum ratio postulat, tum experientia quoque, his ipsis horologiis superstructa, quæque sine his nequaquam haberi poterat, evincit; quandoquidem, cum æquatione hìc proposita, observationes solis, quas sæpe per complures menses, quotidie ad momentum quo meridianum circulum sol occuparet, instituimus, planissime consentire inventæ sunt [1]).

TABULA ÆQUATIONIS DIERUM.

(*p.* 15).

Dies.	*Januar.*		*Febr.*		*Mart.*		*Apr.*		*Maj.*		*Jun.*	
	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	22	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	9
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	*Jul.* Min.	Sec.	*Aug.* Min.	Sec.	*Sept.* Min.	Sec.	*Octob.* Min.	Sec.	*Nov.* Min.	Sec.	*Dec.* Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	53	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

Description de l'horloge.

Or, lorſque l'examen de l'horloge a eu lieu d'après les deux méthodes que nous avons mentionnées, mais de préférence ſuivant la première, dans le cas où l'on conſtate qu'elle s'écarte beaucoup de la longueur moyenne des jours, de ſorte que la différence ſurpaſſe trois ou quatre minutes, on y apportera remède en augmentant ou diminuant la longueur du pendule. Dans cette correction on tiendra compte de la règle que le mouvement de l'horloge ſera accéléré ou retardé d'une minute par jour chaque fois que les $\frac{7}{10}$ d'une ligne ſeront ôtés ou ajoutés à la longueur du pendule. Et lorſque de cette manière le pendule aura déjà acquis à fort peu près la bonne longueur, la correction ultime ſe fera commodement par le déplacement du petit poids Δ qui ſe trouve ſur la verge VV. Ce poids a la forme d'une lentille dont nous avons repréſenté dans la figure I [Fig. 17 I] la ſection ſuivant l'axe. Et comme ce poids n'eſt que la vingtième ou trentième partie du poids X ou même encore moins [1]), il s'enſuit qu'en s'écartant notablement de l'endroit qu'il occupait d'abord, il ne change cependant pas beaucoup le mouvement du pendule: il l'accélère chaque fois qu'on le rapproche du point milieu de la verge et il le retarde lorſqu'à partir de ce point on le fait monter ou deſcendre. Or, afin qu'on ne ſoit pas obligé de chercher longtemps la ſituation dans laquelle il donnera la meilleure meſure des jours, nous avons diviſé d'une certaine manière, calculée d'après les lois du mouvement, la moitié inférieure de la verge dans l'hypothèſe que le poids Δ eſt la cinquantième partie du poids X et égal en gravité à la verge VV. Ces diviſions ſont indiquées dans la figure IV [Fig. 17], où la moitié inférieure du pendule eſt vue coupée en trois parties dont AB repréſente la plus baſſe. Le point A eſt le centre de gravité du poids X et les diviſions, à partir du point C, centre d'oſcillation [2]), correſpondent chacune à une différence de quinze minutes par jour lorſque le diſque Δ eſt déplacé de cet intervalle. Quant à la démonſtration et la méthode de trouver les diviſions, ella ſera donnée dans la partie du livre qui traite du centre d'oſcillation.

Nous décririons en outre ici la forme des horloges que l'on porte ſur mer pour rechercher les longitudes ſi nous avions exploré et déterminé auſſi bien que dans le cas précedent celle qui eſt la plus apte à cet uſage. Il eſt vrai que la choſe a déjà été conduite ſi loin qu'il ſemble s'en failloir peu que cette invention ſi utile ne ſoit parachevée. Or, je ne veux pas laiſſer d'expoſer ici ce qui a été tenté et avec quel ſuccès, et ce qui reſte encore à tenter dans la ſuite.

Les deux premières horloges de ce genre furent portées en 1664 par un vaiſſeau anglais; un gentilhomme d'Écoſſe de mes amis [3]) les avait fait fabriquer à l'exemple des nôtres. Celles-ci avaient au lieu du poids une lame d'acier enroulée en ſpirale deſtinée à faire tourner les roues par ſa force; on connaît les reſſorts ſpiraux de ce genre des petites horloges portatives. Or, pour qu'elles puſſent ſupporter l'agitation du navire, il avait ſuſpendu les horloges à une ſphère d'acier enfermée dans un cylindre

[1]) Les mots „aut etiam minorem" ont été ajoutés par Huygens au texte imprimé.

Jam poſtquam utrovis modo eorum quos diximus, ſed priore potius, examen inſti- (p. 16). tutum fuerit, ſi multum aberrare à media dierum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima ſcrupula aſcendat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipſius penduli longitudine. Ubi hæc tenenda eſt regula, tot ſcrupulis primis, in ſingulos dies, motum horologii acceleratum aut retardatum iri, quot $\frac{7}{10}$ unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram menſuram hoc pacto jam prope reductum erit, reliqua correctio tranſpoſitione exigui ponderis Δ, virgæ VV adhærentis, commode peragetur. Id pondus lentis formam habet, cujus ſectionem ſecundum axem in figura 1. [Fig. 17 I] expreſſimus. Et quia tantum viceſimam triceſimamve, aut etiam minorem [1]), partem æquat ponderis X, hinc fit ut ſat magnis ſpatiis è priore loco diſcedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties verſus mediam virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde ſurſum aut deorſum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum ſit quo veriſſimam daturum ſit dierum menſuram, diviſimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, poſito nimirum pondere Δ parte quinquageſima ponderis X, parique gravitate ipſius virgæ VV. Quæ quidem diviſiones figura 4 [Fig. 17 IV] exhibentur, ubi penduli portio inferior in tres partes ſecta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, eſt AB. Punctum A eſt centrum gravitatis ponderis X, à puncto autem C, centro oſcillationis [2]), partes ſingulæ, quindecim ſcrupulorum ſecundorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ. Demonſtratio autem diviſionumque inventio, dabitur in iis quæ de Centro Oſcillationis.

Descriptio Horologii.

Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum inveſtigandarum gratiâ, formam hic deſcriberemus, ſi quænam maxime ad hunc uſum accommodata ſit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus; etſi quidem jam nunc eo res deducta ſit, ut parum deeſſe videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hìc tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum reſtet, exponere non pigebit.

Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis è Scotia nobisque amicus [3]) ad noſtrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in ſpiram convolutam, cujus vi rotæ cir|cumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri ſolent automatis (p. 17). adhiberi ſolent. Ut autem jactationem navis perferre poſſent, è chalybea pila, cylindro

---

[2]) Les mots „centro oscillationis" ont de même été ajoutés par Huygens au texte de l'édition originale.

[3]) Alexandre Bruce, comte de Kincardine. Voir la p. 193 du T. XVII.

Description de l'horloge.

de cuivre, et il avait prolongé par en bas et doublé la manivelle qui entretient le mouvement du pendule, lequel était long d'un demi pied, de ſorte que cette manivelle avait l'aſpect d'une lettre F renverſée [1]); cette conſtruction avait évidemment pour but d'empêcher le mouvement de dégénérer en une rotation ce qui pourrait même cauſer l'arrêt de l'horloge. Après que ce vaiſſeau, avec trois autres qui l'accompagnaient dans ſon voyage, fut de retour en Angleterre, le Commandant de cette flotte rapporta ce qui ſuit [2]). Après avoir quitté la côte de la Guinée et être parvenu à l'ile appelée St. Thomas ſituée ſous la ligne, il dit qu'ayant réglé là ſes horloges ſur le ſoleil, il tira vers l'oueſt et parcourut ſans arrêt environ ſoixante-dix milles, après quoi, à la faveur d'un vent ſud-oueſt, il ſe dirigea de nouveau vers les côtes de l'Afrique. Or, lorſqu'il eut parcouru, en ſuivant cette direction, quelque deux cents ou trois cents lieues, les capitaines des autres navires, craignant qu'ils ne manquaſſent d'eau potable, lui donnèrent le conſeil de ſe détourner pour faire équade vers les îles de l'Amérique appelées Barbades. Ayant tenu conſeil avec les capitaines et leur ayant ordonné de produire leurs éphémérides et leurs ſupputations, il trouva que les calculs des autres étaient bien différents des ſiens, l'un s'en écartant de quatre-vingt lieues, l'autre de cent, le troiſième encore davantage. Il ajoute que lui-même, puiſqu'il avait conclu de l'indication des horloges qu l'île *del Fuego* n'était qu'à une diſtance d'environ trente lieues (laquelle île eſt une de celles, proches de l'Afrique, qui tirent leur nom du Cap Vert) et qu'il pouvait l'atteindre le jour ſuivant, ordonna, ſe fiant à ſes pendules, de faire voile dans cette direction, et que le jour ſuivant vers midi l'île nommée apparut à l'horizon et ſervit après quelques heures de ſtation aux navires. Voilà ce que ce Commandant rapporta.

Depuis ce temps les expériences ont été répétées, quelquefois par les Hollandais [3]), d'autres fois par les Français et cela par ordre du Roi, avec un ſuccès variable, mais de telle ſorte que là où le ſuccès manquait, ceci doive plutôt être imputé à la négligence de ceux à qui les horloges avaient été confiées qu'aux automates eux-mêmes [4]). Le ſuccès fut très grand dans la Mer Méditerranée, dans l'expédition de l'île de Crète, où Monſieur le Duc de Beaufort avait été envoyé avec des troupes françaiſes pour porter ſecours à la ville de Candie aſſiégée par les Turcs, et où il tomba dans le combat. Le duc avait dans ſon navire des horloges pour faire cette expérience et les avait confiées à un habile aſtronome [5]). Nous avons appris par les obſervations journalières de ce dernier que les longueurs des endroits où les navires abordèrent dans ce voyage ou que les voyageurs purent reconnaître en paſſant furent exactement meſurées à l'aide des horloges, de telle manière que l'on trouve dans les deſcriptions géographiques qui ſont réputées les meilleures les mêmes différences des longitudes. On trouva

---

[1]) Fig. 67 de la p. 166 du T. XVII.

[2]) T. XVII, p. 230. Voir aussi la p. 7 qui précède.

[3]) Nous ne savons pas à quelles expériences Huygens fait allusion. Voir cependant le premier

æneo inclusa, horologia suspenderat, clavulamque quæ penduli motum continuat (erat autem semipedale longitudine pendulum) deorsum productum geminaverat, ut literæ F inversæ formam referret [1]); ne videlicet in gyrum evagari posset penduli motus, unde cessationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit [2]). Se nempe, cum à Guineæ littore solvisset, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hìc ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituisse, atque ad septingenta circiter milliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente Libonoto ad Africæ littora declinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent aquâ ad potum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas, Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussisque ut Ephemeridas ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse cæterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipsum vero, cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quam triginta circiter milliaribus abesse insulam *del Fuego* dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse; confisum pendulis suis eò cursum dirigi imperasse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucisque post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum [3]) tum Gallorum opera, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum quibus horologia commissa erant quam ipsamet automata culpari possent [4]). Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam insulam, quò illustrissimus Dux Belfortius, Candiæ à Turcis obsessæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratiâ habebat, virumque Astronomiæ peritum [5]) iis præfecerat, è cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt na|ves, aut quæ prætervecti dignoscere ocu- (*p.* 18). lis potuerant, horologiorum operâ exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus quæ melioris notæ habentur eædemmet longitudinum

alinéa de la p. 17 qui précéde. En mai 1669 F. W. de Nulandt dit qu'il a l'intention de faire cet été un voyage aux îles de l'Amérique et de prendre avec lui une horloge de la façon de Huygens et une de la sienne (T. VI, dernier alinéa de la p. 437).

4) Voir les p. 54—55 du T. VII d'après lesquelles Huygens en 1671 se dit convaincu que „le mauvais succes de cette fois [il s'agit du premier voyage de Richer] procede plus de la nonchalance des observateurs que du deffaut des Horologes".

5) Voir sur les remarques de Huygens au sujet du rapport de de la Voye (qui est sans doute l'„habile astronome" du texte) les p. 501—503 du T. VI et l'Appendice I à la Pars Prima qui suit.

Description de l'horloge.

par exemple entre le port de Toulon et la ville de Candie une différence d'une heure et de 22 minutes, en d'autres termes de 20°30′ de longitude, et la même différence à fort peu près en retournant de Candie à Toulon: cet accord est un indice très certain de la vérité [5]).

Entre le même port de Toulon et une certaine île appelée *Maretimo*, située près du promontoire occidental de Sicile qui portait autrefois le nom de Lilybée, on a trouvé une différence de temps de 25 min. 20 sec. auxquelles correspondent 6°20′ de longitude. De même depuis Toulon jusqu'à l'île appelée Sapienza, située près du Péloponnèse vers l'occident, on trouva 1 h. 5′45″, auxquelles correspondent 16°26′ de longitude [1]).

Les horloges avaient été examinées le matin par rapport au soleil oriental, le soir par rapport au soleil occidental, l'un et l'autre moment ayant été calculé d'après la hauteur donnée du pôle. Et cette manière semble être la meilleure de toutes lorsque les navires sont à l'ancre parce que ces observations sont faites des yeux seuls sans le secours d'instruments [2]).

Quant au pendule qui se trouvait dans ces horloges, sa longueur était de 9 pouces [3]) et son poids d'une demi-livre. Les roues étaient mises en mouvement par la force de poids et renfermées avec ceux-ci dans une même boîte de la longueur de quatre pieds. Au fonds de la boîte un plomb de cent livres et davantage avait été ajouté, afin que la machine suspendue dans le navire gardât d'autant mieux sa situation perpendiculaire.

Or, bien que durant ces expériences le mouvement de l'automate fût trouvé fort égal et uniforme [4]), nous avons cependant encore entrepris de le perfectionner par une autre construction qui était telle. Nous attachâmes avec une petite chaîne artistement construite un petit poids à la roue qui a ses dents en façon de scie et qui est la plus proche du pendule, afin que cette roue seule fût mise en mouvement par ce poids, tout le reste de la machine ne servant qu'à remettre ce petit plomb à sa hauteur primitive toutes les demi-minutes [5]); presqu'en la même façon que l'on peut voir dans la construction de l'horloge exposée plus haut, où le poids est élevé en tirant l'une des deux cordes, tandis que par l'autre il communique sa gravité au mouvement de l'horloge. Les choses étant arrangées de cette manière, c.à.d. l'action étant pour ainsi dire concentrée dans une seule roue, il en résulta une uniformité encore plus grande qu'auparavant et il arriva ceci de remarquable que lorsque nous avions suspendu à une même poutre soutenue par deux appuis deux horloges construites de cette façon, les mouvements de l'une et de l'autre se mirent tellement d'accord par coups opposés que jamais elles ne s'en écartèrent tant soit peu mais que les sons de l'une et de l'autre furent toujours entendus simultanément; et lors même que cet accord était troublé

[5]) Voir la note 5 de la p. 117 et le dernier alinéa de la p. 50 qui précède.

[1]) Voir la note 1 de la p. 10 qui précède.

[2]) Voir la note 2 de la p. 218 du T. XVII.

differentiæ designatæ reperiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum differentia hor. 1. scrup. 22 reperta fuit, hoc est graduum longitudinis 20. scrup. 30. ac rursus à Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem. qui consensus certissimum veritatis est indicium [5]). DESCRIPTIO HOROLOGII.

Inter eundem Toloni portum & insulam quandam cui *Maretimo* nomen est, prope promontorium Siciliæ quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria observata est scrup. prim. 25, sec. 20, quibus respondent gradus longitudinis 6, scrup. 20′. Item à Tolono ad insulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus, hora 1, scrup. prima 5′, sec. 45″, quibus respondent longitudinis gradus 16, scrup. 26 [1]).

Horologia ad solem examinata fuerant, mane ad Orientem, vespere ad Occidentem, supputato ex data poli altitudine utroque temporis momento. Atque hæc ratio cum naves in anchoris stant omnium optima videtur, quod, absque instrumentorum ope, solis oculis eæ observationes peragantur [2]).

Pendulum vero unciarum novem [3]) longitudine inerat horologiis hisce, pondere semissis. Rotæ ponderum attractu circumagebantur, eademque cum illis theca inclusæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum insuper centrum atque amplius librarum additum erat, quo melius perpendicularum situm suspensa in navi machina servaret.

Quanquam autem æquabilis admodum sibique constans automati motus per hæc experimenta comperiebatur [4]), tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggressi sumus, quæ erat hujusmodi. Rotæ illi quæ serratos dentes habet, penduloque proxima est, pondus exiguum ex catenula affabre constructa appendimus, quo sola ipsa moveretur, reliqua omni machina nihil aliud agente quam ut singulis semiscrupulis horariis plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem restitueret [5]); eadem fere ratione atque in constructione horologii superius exposita videre est, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem suam horologii motui impertit. Quibus ita constructis, cum veluti ad unicam rotam omnia essent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam constructa ex eodem tigno suspendissemus, tignum vero fulcris duobus impositum esset; motus penduli | utriusque ita ictibus adversis inter se consensere, (*p.* 19). ut nunquam inde vel minimum recederent, sed utriusque sonus una semper exaudiretur:

---

[3]) La longueur du pendule dépassait donc de deux pouces celle des pendules des remontoirs fabriquées par S. Oosterwijck en 1664 et 1665 (voir les p. 183—184 du T. XVII) qui étaient également enfermés dans de lourdes boîtes. L'horloge du duc de Beaufort n'était pas un remontoir; comparez la p. 9 qui précède. D'ailleurs dans le texte Huygens ne mentionne les remontoirs à poids qu'après avoir parlé de l'expédition de Candie quoiqu'ils soient plus anciens.

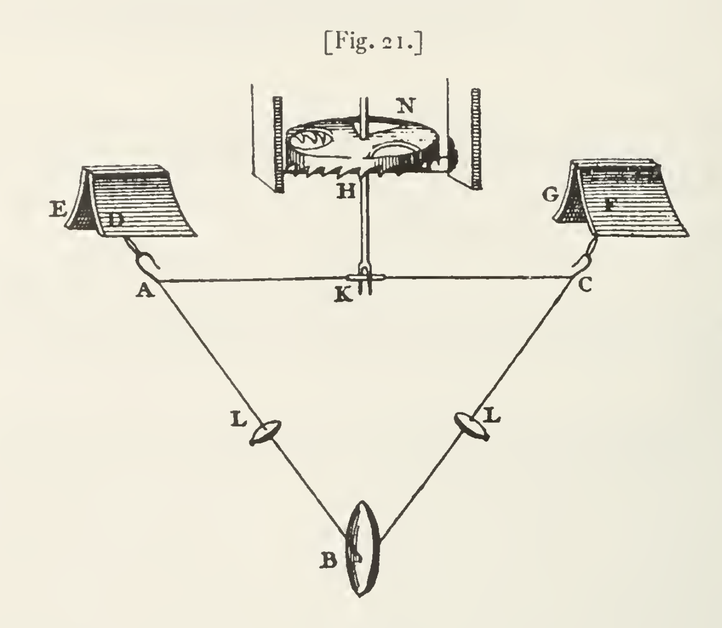
[4]) Voir cependant l'alinéa suivant et l'Appendice II à la p. 21 qui précède.

[5]) Voir sur le remontoir à poids moteurs les p. 171—182 du T. XVII.

Description de l'horloge.

par l'intervention de l'obſervateur, il ſe rétabliſſait en peu de temps. Je demeurai quelque temps émerveillé d'une choſe ſi extraordinaire; mais après un diligent examen je trouvai enfin que la cauſe devait être cherchée dans le mouvement, inſenſible il eſt vrai, de la poutre. L'explication conſiſtait donc en ce que les oſcillations des pendules communiquaient quelque mouvement aux horloges chargées de quelque poids que ce fût, et que ce mouvement imprimé enſuite à la poutre avait néceſſairement pour effet que ſi les deux pendules oſcillaient autrement que par des coups parfaitement

[Fig. 21.]



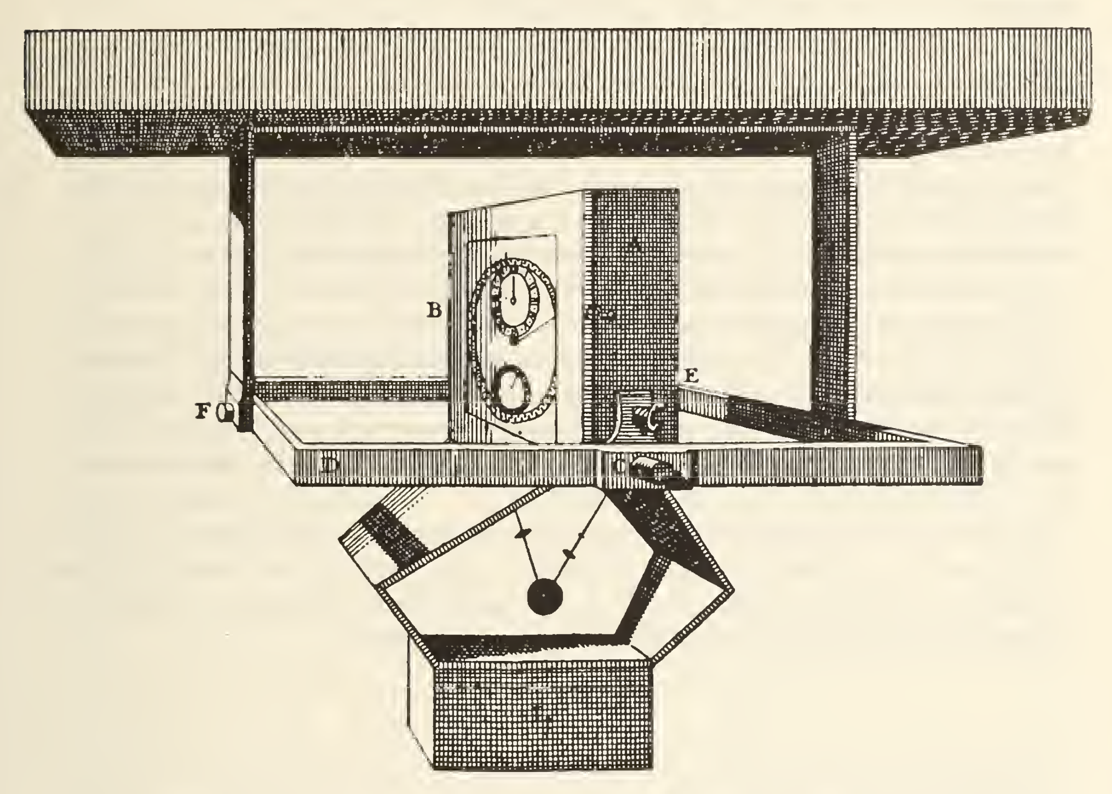
contraires, ils devaient cependant néceſſairement en venir là, et qu'alors ſeulement le mouvement de la poutre pouvait ceſſer entièrement [1]). Toutefois cette cauſe n'aurait pas une efficacité ſuffiſante ſi les mouvements des horloges n'étaient pas par ailleurs très égaux et uniformes.

Du reſte par les expériences faites dans la traverſée de l'Océan, ſurtout dans les cas où une tempête aſſez forte agitait les flots, il fut établi qu'il faut en premier lieu avoir ſoin de conſerver le mouvement ſans interruption des horloges: on remarqua qu'elles ſupportaient difficilement une ſi grande agitation du navire. C'eſt pourquoi nous avons enfin changé d'après un nouveau deſſein la forme du pendule et en même temps la ſuſpenſion des horloges. Le nouveau pendule a la forme d'un triangle, au ſommet duquel, qui eſt tourné vers le bas, eſt attaché une lentille de plomb. Les deux autres angles ſont ſuſpendus entre des lames cycloïdales. La baſe eſt embraſſée en ſon

[1]) Voir la note 1 de la p. 185 du T. XVII.

imo ſi data opera perturbaretur concordia illa, ſemetipſam brevi tempore reduceret. Descriptio Horologii.
Miratus aliquandiu rem adeo inſolitam, inveni denique, inſtituto diligenti examine, à motu tigni ipſius, licet haudquaquam ſenſibili, cauſam petendam eſſe. Nempe pendulorum reciprocationes horologiis, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare; hunc vero motum, tigno ipſi impreſſum, neceſſario efficere ut ſi aliter

[Fig. 22.]



quam contrariis ad unguem ictibus pendulum utrumque moveatur, eo tamen neceſſario tandem deveniant, ac tum demum tigni motum penitus interquieſcere [1]). Quæ tamen cauſa non ſatis efficaciæ haberet, niſi & horologiorum motus aliunde æquabiliſſimus foret atque inter ſe conſentiens.

Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præſertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum abſque interruptione conſervando habendam eſſe, quod jactationem navis tantam ægrè tunc perferre illa animadverſum ſit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipſa ſuſpendimus. Pendulum trianguli formam habet, in cujus vertice deorſum ſpectante plumbea lens affixa eſt. Anguli utrique reliqui filis inter laminas cycloidales ſuſpenſi ſunt. Baſis clavulam biſur-

Description de l'horloge.

point milieu par une baguette fourchée en deux et eſt mue par elle; quant à la baguette elle tient ſon mouvement de la roue faite en façon de ſcie qui eſt horizontale. Le mouvement de toutes les roues tire ſon origine non pas d'un poids mais d'une lame d'acier renfermée dans un barillet [1]). Dans la figure ci-jointe [Fig. 21] [2]) le pendule triangulaire eſt ABC; B eſt la lentille de plomb; ED et FG ſont les lames cycloïdales. La baguette bifurquée eſt HK et N la roue dentée en façon de ſcie, qui eſt la plus baſſe des roues de l'horloge. LL ſont de petites lentilles ſervant à régler la marche du pendule.

La deuxième figure [Fig. 22] [3]) fait voir le mode de ſuſpenſion: d'abord la boîte AB eſt fixée par deux axes, dont l'un C ſeulement apparaît, au rectangle de fer DE, lequel eſt ſoutenu à ſon tour au moyen de ſes axes FG par le gnomon de fer FHKG fermement attaché à l'entablement du navire. Au fond de la boîte on a ſuſpendu à l'horloge un poids de 50 livres. Par cet arrangement l'horloge garde la poſition verticale quelle que ſoit la pente du vaiſſeau. Or, l'axe C ainſi que l'axe oppoſé ſont placés de telle manière que les points de ſuſpenſion du pendule décrit ſont ſitués ſur la ligne droite déterminée par ces axes, d'où réſulte que le mouvement oſcillatoire du pendule ne peut aucunement mettre l'horloge en branle: rien n'eſt plus funeſte en général au mouvement d'un pendule que cet entraînement de l'horloge. D'ailleurs l'épaiſſeur des axes CC et FG, qui eſt d'un pouce, et la lourdeur du plomb ſuſpendu en bas ôtent à l'horloge la trop grande liberté du mouvement et font en ſorte que ſi par haſard elle a été ébranlée par quelque rude ſecouſſe du navire elle retourne cependant auſſitôt au repos et à la perpendicularité.

Reſte à porter la machine ainſi perfectionnée en mer et à en faire l'épreuve [4]). Elle nous donne une eſpérance preſque certaine de ſuccès, parce qu'on a trouvé dans les expériences qu'on a pu faire juſqu'à préſent qu'elle ſupporte beaucoup mieux que celles décrites plus haut toutes les diverſités du mouvement.

---

[1]) Comparez la p. 16 qui précède.

[2]) Auprès de cette figure Huygens a annoté en marge: „l'une jambe de la fourchette K devoit passer en deça de la verge AC". Ce défaut de la figure a été corrigé dans l'édition de 1724 de 's Gravesande. On trouve en marge de l'exemplaire de l'édition originale mentionné dans la note 3 de la p. 92 qui précède plusieurs autres remarques manuscrites de Huygens sur de petites corrections à apporter aux figures. Nous les omettons puisque nous reproduisons ici les figures de 's Gravesande qui a tenu compte de ces remarques.

[3]) Dans cette figure la vis à gauche et au-dessous du point E est de l'invention de 's Gravesande: dans la figure originale on ne voit en cet endroit qu'une petite circonférence de cercle qui ne peut guère représenter une vis.

[4]) L'horloge marine à pendule triangulaire n'a peut-être pas été mise à l'épreuve avant 1686 (voir le troisième alinéa de la p. 57 du T. IX) mais alors sa construction ne fut plus exactement la même qu'en 1672; comparez la note 2 de la p. 17 qui précède. Consultez aussi la suite du présent Tome sur les voyages de 1686 et des années suivantes.

catam puncto fui medio recipit ab eaque movetur, illa vero ab rota ferrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non à pondere fed à chalybea lamina, tympano inclufa, principium habet [1]). In figura adjecta [Fig. 21] [2]) pendulum triangulare eft ABC; lens plumbea B; laminæ cycloidales ED, FG. Clavula | bifurcata HK; rota ferratis dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior eft. Lenticulæ ad temperandum penduli motum LL. Descriptio Horologii. (p. 20).

Sufpenfionis modum altera hæc figura [Fig. 22] [3]) exhibet; ubi theca AB axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo DE inferta eft; quod deinde rectangulum rurfus axibus fuis FG ferreo gnomone FHKG fuftinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus eft. in ima theca pondus 50 librarum appenfum eft. Quibus ita fe habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem pofitum fervat horologium. Axis autem C, cum fibi oppofito, ita collocati funt, ut ad rectam lineam refpondeant punctis fufpenfionum penduli ejus quod diximus: quo fit ut motus ipfius ofcillatorius machinam nequaquam commovere poffit, quo nihil eft alioqui quod magis penduli motum deftruat. Porro axium CC, & FG craffitudo, quæ pollicem æquat, gravitafque plumbi inferius appenfi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut fi forte fuccuffu navis graviore commotum fuerit, continua ad quietem perpendiculumque fuum revertatur.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiæque committatur fupereft [4]), quæ & certam pene fucceffus fpem præbet, quod iis quæ hactenus inftituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diverfitatem perferre reperta fit.



DEUXIÈME PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE.

De la Chute des Corps pesants et de leur Mouvement cycloïdal.

HYPOTHÈSES.

I.

Si la gravité n'existait pas et qu'aucune résistance d'air ne s'opposait au mouvement des corps, chacun d'eux continuerait son mouvement avec une vitesse uniforme en suivant une ligne droite.

II.

Mais maintenant il arrive par l'action de la gravité, de quelque cause qu'elle provienne, que les corps se meuvent d'un mouvement composé de leur mouvement uniforme dans une direction quelconque et de celui de haut en bas qui est dû à la gravité.

III.

On peut considérer ces deux mouvements séparément et l'un n'est pas empêché par l'autre [1]).

Supposons qu'un corps pesant C, partant du repos, parcoure en un certain temps F, grâce à la force de la gravité, un espace CB [Fig. 23]. Supposons de plus que le même corps pesant ait reçu d'ailleurs un mouvement par lequel, s'il n'y avait aucune gravité, il parcourrait dans le même temps F d'un mouvement uniforme la ligne droite CD. La force de la gravité s'y ajoutant le corps pesant ne parviendra donc pas de C en D dans le dit temps F mais en un certain point E situé verticalement au-dessous de D de telle sorte que l'espace DE est toujours égal à l'espace CB; en effet, de cette façon le mouvement uniforme et celui qui provient de la gravité auront chacun leur part, l'un n'empêchant pas l'autre. Quant à la ligne que le corps parcourt de ce mouvement composé lorsque la direction du mouvement uniforme n'est pas verticale mais oblique, sa nature apparaîtra par nos considérations ultérieures. Mais lorsque le mouvement uniforme CD a lieu de haut en bas suivant une verticale, il est clair que la

[1]) Voir la note 1 de la p. 126 du T. XVII, où nous avons remarqué que dans les trois Hypothèses de la Pars Secunda le „principe de la relativité" (pour employer cette expression moderne) n'est pas mentionné aussi expressément que dans les considérations analogues de 1659.



HOROLOGII OSCILLATORII (p. 21).

Pars Secunda.

De descensu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

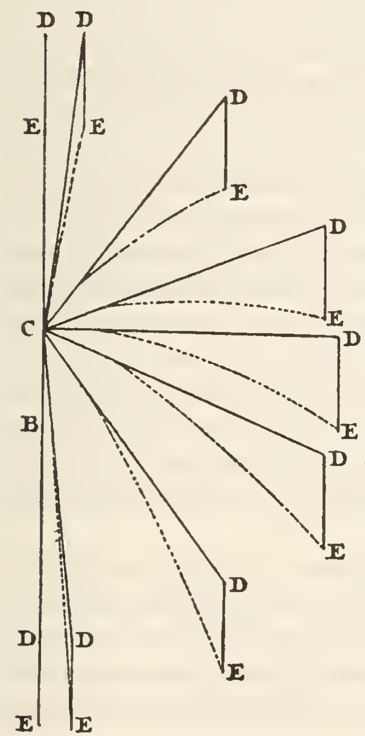
I.

Si gravitas non esset, neque aër motui corporum officeret, unumquodque eorum, acceptum semel motum continuaturum velocitate æquabili, secundum lineam rectam.

II.

Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu composito, ex æquabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorsum à gravitate profecto.

[Fig. 23.]



III.

Et horum utrumque seorsim considerari posse, neque alterum ab altero impediri [1]).

Ponatur grave C è quiete dimissum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis transire spatium CB [Fig. 23]. Ac rursus intelligatur idem grave accepisse alicunde motum quo, si nulla esset gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam CD. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex C in D, dicto tempore F, sed ad punctum aliquod E, recta sub D situm, ita ut spatium DE semper æquetur spatio CB, ita enim, & motus æquabilis, & is qui à gravitate oritur suas partes peragent, altero alterum non impediente. Quamnam vero lineam, composito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta sursum aut deorsum sed in obliquum tendit, è sequentibus definiri poterit. Cum vero deorsum in perpendiculari contingit motus æquabilis CD, | ap- (p. 22).
paret lineam CD, accedente motu ex gravitate, augeri

De la chute des corps graves.

ligne CD eſt augmentée d'une droite DE par l'effet de la gravité. De même, lorſque le mouvement uniforme CD eſt dirigé de bas en haut, il eſt évident que la même longueur CD eſt diminuée de la longueur DE de ſorte qu'après le temps F le corps ſe trouve toujours au point E. Que ſi, dans l'un et l'autre cas, nous conſidérons ſéparément les deux mouvements en admettant, comme nous l'avons dit, que l'un n'eſt nullement empêché par l'autre, il nous ſera poſſible d'en déduire la cauſe et les lois de l'accélération des corps peſants. Premièrement nous ferons voir les deux choſes ſuivantes.

PROPOSITION I[1]).

Dans des temps égaux les accroiſſements de la viteſſe d'un corps tombant ſont toujours égaux et les eſpaces parcourus durant des temps égaux depuis le commencement de la chute forment une ſérie dont les différences ſucceſſives ſont conſtantes.

[Fig. 24.] Suppoſons que quelque corps, partant du repos en A, ſoit tombé dans le premier temps par l'eſpace AB [Fig. 24] et ait acquis lorſqu'il eſt parvenu en B, une viteſſe avec laquelle il pourrait enſuite pendant le deuxième temps parcourir d'un mouvement uniforme un certain eſpace BD. Nous ſavons donc que l'eſpace qui ſera parcouru pendant le ſecond temps ſera plus grand que l'eſpace BD puiſque, même ſi toute action de la peſanteur ceſſait en B, l'eſpace BD ſerait parcouru. Actuellement le corps ſera animé d'un mouvement compoſé du mouvement uniforme par lequel il pourrait parcourir l'eſpace BD et du mouvement des corps tombants par lequel il doit néceſſairement deſcendre d'une longueur égale à l'eſpace AB mentionné plus haut. Nous ſavons donc que le corps parviendra dans le deuxième temps juſqu'au point E, obtenu en ajoutant à BD une longueur DE égale à AB.

Or, ſi nous demandons quelle viteſſe le corps poſſède en E au bout du deuxième temps, nous trouverons qu'elle devra être double de la viteſſe qu'il avait en B au bout du premier temps. En effet, nous avons dit que le corps ſe meut d'un mouvement compoſé d'un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe en B et du mouvement produit par la peſanteur; et ce dernier, étant évidemment le même dans le deuxième temps que dans le premier, doit avoir donné dans le cours du deuxième temps au corps peſant une viteſſe égale à celle qu'il avait reçue à la fin du premier. Or, comme il a conſervé intégralement la viteſſe qu'il poſſédait à la fin du premier temps, il apparaît qu'à la fin du deuxième il poſſédera deux fois la viteſſe acquiſe au bout du premier, en d'autres termes il aura une viteſſe double.

Que ſi, étant parvenu en E, le corps ne faiſait autre choſe que continuer ſon mouvement avec une viteſſe uniforme, telle qu'il l'avait acquiſe en ce point, il apparaît que dans le troiſième temps égal aux précédents, il parcourrait l'eſpace EF double de BD, puiſque nous avons dit que ce dernier eſt parcouru avec une viteſſe deux fois plus petite d'un mouvement uniforme et dans un temps égal. Mais lorſque

recta DE. Item, cum ſurſum tendit motus æquabilis CD, ipſam CD diminui recta DE, ut nempe, peracto tempore F, grave inveniatur ſemper in puncto E. Quod ſi, utroque hoc caſu, ſeorſim, uti diximus, duos motus conſideremus, alterumque ab altero nullo modo impediri cogitemus, hinc jam accelerationis gravium cadentium cauſam legesque reperire licebit. Et primum quidem duo iſta ſimul oſtendemus. De descensu gravium.

PROPOSITIO I[1]).

Æqualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accreſcere, & ſpatia æqualibus temporibus ab initio deſcenſus emenſa, augeri continue æquali exceſſu.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A, primo tempore lapſum eſſe per ſpatium AB [Fig. 24], atque ubi pervenit in B, acquiſiviſſe celeritatem qua deinceps, tempore ſecundo, motu æquabili, percurrere poſſet ſpatium quoddam BD. Scimus ergo ſpatium ſecundo tempore peragendum majus fore ſpatio BD, quia vel ceſſante in B omni gravitatis actione ſpatium BD percurreretur. Feretur vero motu compoſito ex æquabili quo percurſurum eſſet ſpatium BD, & ex motu gravium cadentium, quo deprimi neceſſe eſt per ſpa|tium ipſi AB æquale. Quare ad BD addita DE, æquali AB, ſcimus (p. 23). tempore ſecundo grave perventurum ad E.

Quod ſi vero inquiramus quam velocitatem habeat in E, in fine ſecundi temporis, eam inveniemus duplam eſſe debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri compoſito motu ex æquabili cum celeritate acquiſita in B, & ex motu à gravitate producto, qui cum tempore ſecundo idem plane ſit ac primo, ideo decurſu temporis ſecundi æqualem celeritatem gravi contuliſſe debet atque in fine primi. Quare cum acquiſitam in fine primi temporis celeritatem conſervaverit integram, apparet in fine ſecundi temporis bis eam celeritatem ineſſe quam acquiſiverat in fine temporis primi, ſive duplam.

Quod ſi jam, poſtquam pervenit in E, pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquiſivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percurſurum ſpatium EF, quod duplum futurum ſit ſpatii BD; quia hoc percurri diximus dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem

[1]) Comparez le § 1 à la p. 125 du T. XVII. La Fig. 24 correspond à la Fig. 31 de la p. 127 (voir aussi la note 3) du T. XVII.

De la chute des corps graves.

l'action de la gravité s'y ajoute, il parcourra dans le troisième temps outre l'espace EF encore un espace FG égal à AB ou DE. Au bout du troisième temps le corps se trouvera donc en G. En ce point il aura une vitesse triple de celle qu'il avait en B au bout du premier temps, puisque outre la vitesse acquise en E dont nous avons dit qu'elle était le double de la vitesse acquise en B, la force de la gravité y a ajouté de nouveau dans la cours du troisième temps une vitesse égale à celle qu'elle lui avait donnée à le fin du premier temps. C'est pourquoi l'une et l'autre vitesse, au bout du troisième temps, constitueront ensemble une vitesse triple de celle qui existait à la fin du premier temps.

On démontrera de la même manière que pendant le quatrième temps un espace GH triple de l'espace BD doit être parcouru, et simultanément un espace HK égal à AB; et que la vitesse en K au bout du quatrième temps sera quadruple de celle qui existait en B à la fin du premier. Ainsi il est manifeste que les espaces quelconques que nous pourrions considérer ensuite, nous voulons dire les espaces parcourus chacun dans un temps égal, croîtront d'une même différence égale à BD; et qu'en même temps les vitesses augmenteront uniformément chaque fois que le temps augmentera d'une même quantité.

PROPOSITION II[1]).

L'espace parcouru pendant un certain temps par un corps qui commence sa chute en partant du repos est la moitié de l'espace que ce corps pourrait parcourir d'un mouvement uniforme avec la vitesse acquise par la chute au bout du temps considéré.

Faisons les mêmes hypothèses que dans le cas de la proposition précédente, où AB [Fig. 24] était l'espace parcouru pendant un certain temps par un corps tombant du point A, et BD l'espace qu'il était censé parcourir dans un temps égal avec une vitesse uniforme, savoir la vitesse acquise à la fin du premier temps, en d'autres termes au bout de l'espace AB. Je dis que l'espace BD est le double de AB.

En effet, comme les espaces parcourus par le corps tombant pendant les quatre premiers temps égaux sont AB, BE, EG et GH, lesquels ont etre eux une certaine proportion, si nous prenons le double de chacun de ces temps, de sorte que nous considérons comme le premier temps les deux pendant lesquels les espaces AB, BE ont été parcourus, et comme le second les deux autres pendant lesquels furent parcourus les espaces EG, GK, il faut que les espaces AE et EK parcourus dans des temps égaux par un corps parti du repos, soient entre eux comme les espaces AB et BE également parcourus dans des temps égaux par un corps parti du repos.

Comme on a donc AB : BE = AE : EK et, par conversion, KE : EA = EB (ou DA) : AB, on aura aussi par division: DB est à BA comme la différence de KE et de EA est à EA. Or comme, d'après ce qui a été démontré dans la proposition précédente, KE est égal au double de AB augmenté du quintuple de BD, et que EA est égal tant au double de AB qu'à BD, il apparaît que la dite différence KE — EA est

rurſus gravitatis actione, percurret tempore tertio, præter ſpatium EF, etiam ſpatium FG, ipſi AB vel DE æquale. Itaque in fine tertii temporis grave invenietur in G. Velocitatem vero hic habebit triplam jam ejus quam habebat in B, in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquiſitam in E, quam diximus duplam eſſe acquiſitæ in B, vis gravitatis, temporis tertii decurſu, æqualem rurſus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem conſtituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi. De descensu gravium.

Eodem modo oſtendetur tempore quarto peragi debere & ſpatium GH triplum ſpatii BD, & ſpatium HK ipſi AB æquale: velocitatemque in K, in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B, in fine temporis primi. Atque ita ſpatia quotlibet deinceps conſiderata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æquali exceſſu, qui ipſi BD æqualis ſit, creſcere manifeſtum eſt, ſimulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.

PROPOSITIO II[1]). (p. 24).

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete caſum inchoante, dimidium eſt ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum velocitate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

Ponantur quæ in propoſitione præcedenti, ubi quidem AB [Fig. 24] erat ſpatium certo tempore, à gravi cadente ex A, peractum. BD vero ſpatium quod pari tempore tranſiri intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquiſita erat in fine primi temporis, ſeu in fine ſpatii AB. Dico itaque ſpatium BD duplum eſſe ad AB.

Quum enim ſpatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente transmiſſa ſint AB, BE, EG, GH, quorum inter ſe certa quædam eſt proportio: ſi eorum temporum dupla tempora ſumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus ſpatia AB, BE, peracta fuere; pro ſecundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere ſpatia EG, GK, oportet jam ſpatia AE, EK, quæ ſunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter ſe eſſe ſicut ſpatia AB, BE, quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrebantur.

Quum igitur ſit ut AB ad BE, ita AE ad EK; & convertendo, ut EB ſive DA ad AB ita KE ad EA: erit quoque, dividendo, DB ad BA ut exceſſus KE ſupra EA ad EA. Quum ſit autem, ex oſtenſis propoſitione præcedenti, KE æqualis tum duplæ AB, tum quintuplæ BD: EA vero æqualis tum duplæ AB, tum ſimplici BD; apparet dictum exceſſum KE ſupra EA æquari quadruplæ BD. Sicut igitur DB ad BA ita erit

[1]) Comparez la fin du § 1 (p. 128, avec la note 1) et le § 2 (p. 128—130) du T. XVII.

égale à quatre fois BD. Donc $DB : BA = 4DB : EA$. Par conſéquent on aura $EA = 4BA$. Mais le même eſpace EA eſt égal, comme nous l'avons dit, au double de AB augmenté de BD. BD eſt donc égal au double de AB. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

Deux eſpaces parcourus par un corps tombant dans des temps quelconques, dont chacun eſt pris depuis le commencement de la chute, ſont entre eux comme les carrés de ces temps, ou bien comme les carrés des viteſſes acquiſes.

[Fig. 24.]

A B D E F G H K

En effet, comme il a été démontré dans la propoſition précédente que les eſpaces AB, BE, EG et GK [Fig. 24] en nombre quelconque, parcourus dans des temps égaux par un corps tombant, croiſſent par un excès égal, lequel a la valeur BD; il apparaît maintenant, puiſque $BD = 2AB$, qu'on aura $BE = 3AB$, $EG = 5AB$, $GK = 7AB$, et qu'en général les eſpaces parcourus augmenteront ſuivant la ſérie des nombres impairs à partir de l'unité 1, 3, 5, 7, 9, etc.; et comme un nombre quelconque de ces valeurs priſes conſécutivement font un carré dont le côté eſt égal à ce nombre quelconque lui-même (p.e. la ſomme des trois premières eſt neuf, celle des quatre premières ſeize, etc.), il s'enſuit que les eſpaces parcourus par un corps tombant et pris chacun à partir du commencement de la chute, ſont entre eux en raiſon double des temps de chute, bien entendu ſi l'on prend des temps commenſurables.

Or, la démonſtration peut aiſément être étendue aux temps incommenſurables eux auſſi. En effet, conſidérons des temps de ce genre ayant entre eux un rapport égal à celui des longueurs AB et CD [Fig. 25] et ſoient E et F les eſpaces parcourus dans ces temps pris l'un et l'autre depuis le commencement de la chute. Je dis que l'eſpace E ſera à l'eſpace F comme le carré de AB eſt à celui de CD.

Car ſi cela eſt nié: que l'eſpace E ait d'abord à l'eſpace F un rapport ſupérieur à celui de AB^2 à CD^2, ſavoir celui de AB^2 à CG^2, CG étant pris inférieur à CD. Qu'on ôte de CD la partie DH moindre que $DG - CG$ et telle que le reſte HC ſoit commenſurable avec AB; car il eſt certain que ceci eſt poſſible. On aura donc $CH > CG$. Mais comme le carré du temps AB eſt à celui du temps CH, ainſi eſt l'eſpace E parcouru pendant le temps AB à l'eſpace parcouru pendant le temps CH, d'après ce qui a été démontré plus haut. Mais l'eſpace F, parcouru pendant le temps CD, eſt plus grand que celui parcouru pendant le temps CH. Or, $E : F = AB^2 : CG^2$ par hypothèſe; par conſéquent le rapport $AB^2 : CG^2$ ſera auſſi inférieur au rapport $AB^2 : CH^2$; il en réſulte que le carré de CG

quadrupla DB ad EA: unde EA quadrupla erit ipſius BA: eadem vero EA æquatur, uti diximus, & duplæ AB & ſimplici BD. ergo BD duplæ AB æqualis erit; quod erat demonſtrandum. De descensu gravium.

PROPOSITIO III. (p. 25).

Spatia duo, à gravi cadente quibuſlibet temporibus transmiſſa, quorum utrumque ab initio deſcenſus accipiatur, ſunt inter ſe in ratione duplicata eorundem temporum, ſive ut temporum quadrata, ſive etiam ut quadrata celeritatum in fine cujusque temporis acquiſitarum.

[Fig. 25.]

Quum enim oſtenſum ſit propoſitione antecedenti ſpatia AB, BE, EG, GK [Fig. 24], quotcunque fuerint, æqualibus temporibus à cadente, peracta, creſcere æquali exceſſu, qui exceſſus ſit ipſi BD æqualis: Patet nunc, quoniam BD eſt dupla AB, ſpatium BE fore triplum AB; EG quintuplum ejuſdem AB; GK ſeptuplum; aliaque deinceps auctum iri ſecundum progreſſionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotlibet horum numerorum, ſeſe conſequentium, ſumma faciat quadratum, cujus latus eſt ipſa adſumptorum numerorum multitudo (velut ſi tres primi addantur, facient novem, ſi quatuor ſexdecim) ſequitur hinc ſpatia, à gravi cadente tranſmiſſa, quorum utrumque à principio caſus inchoetur, eſſe inter ſe in ratione duplicata temporum quibus caſus duravit, ſi nempe tempora commenſurabilia ſumantur.

Facile autem & ad tempora incommenſurabilia demonſtratio extendetur. Sint enim tempora hujuſmodi, quorum inter ſe ratio ea quæ linearum AB, CD [Fig. 25]. ſpatiaque temporibus his transmiſſa ſint E, & F, utraque nimirum ab initio deſcenſus adſumpta. Dico eſſe, ut quadratum AB ad quadratum CD, ita ſpatium E ad F.

Si enim negetur; habeat primo, ſi poteſt, ſpatium E ad F majorem rationem quam quadratum AB ad quadratum CD, nempe eam quam quadratum AB ad quadratum CG, ſumta CG minore quam CD, & à CD auferatur pars DH, minor quam DG exceſſus CD ſupra CG, atque ita ut reliqua HC commenſurabilis ſit ipſi AB; hoc enim fieri poſſe conſtat. Erit ergo CH major quam CG. Atqui ut quadratum temporis AB ad quadratum temporis CH, ita ſpatium E, quod tempore AB peractum eſt, ad ſpatium peractum tempore CH, per ſuperius oſtenſa. Hoc vero ſpatio majus eſt illud quod tempore CD percurritur, nempe ſpatium F. ergo ſpatii E ad ſpatium F minor eſt ratio quam quadratri AB ad quadratum CH. Sicut autem ſpatium E ad F, ita ponebatur eſſe quadratum AB ad quadratum CG, ergo minor quoque erit ra|tio quadrati AB ad quadratum CG, quam quadrati AB ad quadratum CH, (p. 26).

De la chute des corps graves.

eſt plus grand qu le carré de CH, ce qui eſt abſurde puiſque nous avons poſé $CH > CG$. Ainſi le rapport $E : F$ n'eſt pas ſupérieur à $AB^2 : CD^2$.

Qu'il lui ſoit donc inférieur, ſi cela ſe peut; et ſoit le rapport de l'eſpace E à l'eſpace F le même que celui du carré AB au carré CL, CL étant pris plus grand que CD. Ôtons de CL LK, plus petit que LD, c.à.d. que $CL - CD$, de telle manière que le reſte KC ſoit commenſurable avec AB. Comme l'eſpace E, parcouru dans le temps AB, eſt à l'eſpace parcouru dans le temps CK comme le carré du temps AB eſt au carré du temps CK, mais que l'eſpace F parcouru dans le temps CD eſt inférieur à l'eſpace parcouru dans le temps CK, le rapport de l'eſpace E à l'eſpace F ſera ſupérieur à $AB^2 : CK^2$. Mais $E : F = AB^2 : CL^2$ par hypothèſe. Donc $AB^2 : CL^2 > AB^2 : CK^2$, et par conſéquent $CL^2 < CK^2$. Ce qui eſt abſurde, puiſque $CL > CK$. Par conſéquent il eſt également faux de dire que $E : F < AB^2 : CD^2$. Il eſt donc néceſſaire que ces deux rapports ſoient égaux. Enfin, attendu que les viteſſes acquiſes au bout des temps AB et CD ſont entre elles comme ces temps, il apparaît que le rapport des eſpaces E et F eſt auſſi le même que celui des carrés des temps AB et CD pendant leſquels ils ont été parcourus. La propoſition eſt donc démontrée.

[Fig. 24.]

PROPOSITION IV [1]).

Lorſqu'un corps peſant aura commencé à tendre vers le haut avec la viteſſe acquiſe à la fin de ſa chute, il arrivera qu'il parcourra dans des temps égaux en remontant les eſpaces parcourus d'abord en deſcendant et qu'il s'élèvera de cette façon juſqu'à la hauteur dont il était tombé. De plus il arrivera qu'en des parties égales de temps il perdra des quantités égales de viteſſe.

En effet, que l'on conſidère, comme dans le cas de la Prop. II, des eſpaces en nombre quelconque parcourus en tombant depuis le repos dans d'égales durées de temps, dont l'eſpace AB [Fig. 24] ſoit le premier, et dont le deuxième ſoit la ſomme de BD, qui pourrait être parcouru uniformément avec la viteſſe acquiſe par la chute AB, et de DE égal à AB, tandis que le troiſième eſt la ſomme de EF, double de BD, et de FG, égal à AB; le quatrième la ſomme de $GH = 3BD$ et de HK de nouveau égal à AB, et ainſi de ſuite s'il y en a encore davantage. Je dis que lorſque le corps remonte, il devra parcourir de nouveau les eſpaces KG, GE, EB, BA dans des temps égaux aux temps reſpectifs de la deſcente, en commençant ſon aſcenſion avec la viteſſe qu'il avait acquiſe à la fin de la chute au point K.

Pour être plus court, je déſignerai de nouveau chaque viteſſe par la longueur de l'eſpace que le corps pourrait parcourir avec cette viteſſe dans un élément de temps pareil à ceux conſidérés dans le cas de la deſcente.

D'aprés ce qui a été démontré dans la propoſition précédente, le corps, lorſqu'il eſt parvenu en K, poſſède une viteſſe $GH + BD$ ou KF, puiſque $KF = HG + BD$; en effet, les parties HK et FG ſont l'une et l'autre égales à AB et

ac proinde quadratum CG majus quadrato CH; quod eſt abſurdum, quum CH major dicta ſit quam CG. Non habet igitur ſpatium E ad F majorem rationem quam quadratum AB ad quadratum CD. De descensu gravium.

Habeat jam, ſi poteſt, minorem; ſitque ratio ſpatii E ad F eadem quæ quadrati AB ad quadratum CL, ſumptâ CL majore quam CD, & à CL auferatur LK minor exceſſu LD, quo CD ſuperatur à CL, atque ita ut reliqua KC ſit commenſurabilis AB. Quia ergo ut quadratum temporis AB ad quadratum temporis CK, ita eſt ſpatium E, peractum tempore AB, ad ſpatium peractum tempore CK. Hoc vero ſpatio minus eſt ſpatium peractum tempore CD, nempe ſpatium F. erit proinde ſpatii E ad F major ratio quam quadrati AB ad quadratum CK. Sicut autem ſpatium E ad F, ita ponebatur eſſe quadratum AB ad quadratum CL. Ergo major erit ratio quadrati AB ad quadratum CL quam ejuſdem quadratri AB ad quadratum CK, ideoque quadratum CL minus erit quam qu. CK. quod eſt abſurdum, quum CL major ſit quam CK. Ergo neque minorem rationem habet ſpatium E ad F quam quadratum AB ad quadratum CD. quare neceſſe eſt ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine temporum AB, CD acquiſitæ ſint inter ſe ſicut ipſamet tempora; apparet rationem ſpatiorum E ad F eandem quoque eſſe quæ quadratorum temporum AB, CD, quibus transmiſſa ſunt. Itaque conſtat propoſitum.

PROPOSITIO IV[1]).

Si grave celeritate ea quam in fine deſcenſus acquiſivit ſurſum tendere cæperit, fiet ut paribus temporis partibus, ſpatia quæ prius ſurſum, eadem deorſum tranſeat, adeoque ad eandem unde deſcenderat altitudinem aſcendat. Item ut æqualibus temporis partibus æqualia amittat celeritatis momenta.

Sunto enim ut in propoſitione 2, ſpatia quotlibet, æqualibus | temporis partibus (p. 27). cadendo è quiete peracta, quorum primum AB [Fig. 24]; ſecundum compoſitum ex BD, quod celeritate æquabili acquiſita per AB tranſeundum erat, & ex DE ipſi AB æquali; tertium compoſitum, ex EF, duplo ipſius BD, & ex FG, eidem AB æquali; quartum compoſitum ex GH, triplo ipſius BD, & ex HK ipſi itidem AB æquali, atque eadem ratione porro creſcentia, ſi plura fuerint. Dico totidem æqualibus temporibus eadem ſpatia KG, GE, EB, BA, ſingula ſingulis peragenda eſſe à gravi ſurſum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine deſcenſus K acquiſita.

Brevitatis autem gratia celeritas quæque deſignetur deinceps longitudine ſpatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in deſcenſu conſideravimus, tranſmiſſurum eſſet.

Itaque ex oſtenſis dicta propoſitione, cum in K grave pervenerit, habet celeritatem GH auctam celeritate BD, hoc eſt celeritatem KF, quia KF æquatur ipſis HG, BD, ſunt enim partes ſingulæ HK, FG, æquales ipſi AB, ac proinde utraque ſimul ipſi BD,

[1]) Comparez le § 4 à la p. 130 du T. XVII.

DE LA CHUTE DES CORPS GRAVES.

par conſéquent leur ſomme eſt égale à BD, que nous avons démontré dans la Prop. II être le double de AB. Par conſéquent ſi au bout de la chute le corps, invertiſſant la viteſſe verticale acquiſe en K, s'élevait d'un mouvement uniforme, il parcourrait l'eſpace KF en un élément de temps. Mais, puiſque l'action de la gravité s'en mêle, ſon aſcenſion KF ſera diminuée d'un eſpace FG égal à AB, comme cela reſſort de l'énoncé d'une de nos hypothèſes initiales. Pendant le premier élément de temps le corps ne montera donc qu'à la hauteur KG dont il était deſcendu dans l'élément de temps précédent. Mais il eſt néceſſaire qu'en même temps la viteſſe ait diminué de BD, qui eſt la viteſſe acquiſe par une chute d'un élément de temps. Lorſque le corps ſera remonté juſqu'en G, il lui reſte donc une viteſſe HG, puiſqu'au début de l'aſcenſion il poſſédait une viteſſe HG + BD. Or GD = HG, puiſque HG = FE + DB = FE + 2AB = FE + FG + ED. Par conſéquent, ſi le corps montait de G d'un mouvement uniforme avec la viteſſe qu'il poſſède en ce point. il parcourrait l'eſpace GD en un élément de temps. Mais grâce à l'action de la peſanteur cette hauteur ſera diminuée de l'eſpace DE égal à AB. Pendant le deuxième élément de temps le corps s'élèvera donc d'un eſpace GE, le même qu'il avait parcouru en tombant dans un élément égal de temps. En même temps il faut qu'il ait perdu de nouveau une partie de ſa viteſſe égale à celle qui correſpond à une chute d'un élément de temps, ſavoir la viteſſe BD. Lorſqu'il ſe ſera élevé juſqu'en E, il a donc la viteſſe FE qui eſt égale à la différence GD — BD. Car BD, comme nous l'avons déjà dit, eſt égale a la ſomme DE + FG.

Or, on a FE = EA, puiſque FE = 2BD, en d'autres termes FE = BD + 2AB = BD + AB + DE. Par conſéquent ſi le corps continuait à monter à partir de E d'un mouvement uniforme avec la viteſſe qu'il a en ce point, il parcourrait l'eſpace EA en un élément de temps. Mais puiſque la gravité exerce ſon action, cette hauteur ſera diminuée de l'eſpace AB. Par conſéquent pendant cet élément de temps il ne montera que d'une hauteur EB, eſpace qu'il avait auſſi parcouru en deſcendant dans un élément égal de temps. En ce moment il doit néceſſairement avoir perdu de nouveau une viteſſe telle qu'il pourrait l'acquérir en tombant durant un élément de temps, c.à.d. la viteſſe BD. Par conſéquent le corps arrivé en B a pour reſte de viteſſe la viteſſe BD, tandis qu'en E il avait la viteſſe FE double de BD. S'il continuait donc à monter à partir de B avec une viteſſe conſtante telle qu'il la poſſède en ce point, il parcourrait en un élément de temps un eſpace égal à DB ou 2AB. Mais par l'effet de la gravité cette hauteur eſt diminuée d'un eſpace égal à AB. Pendant cet élément de temps le corps ne montera donc que de BA qu'il avait auſſi parcouru en deſcendant pendant le premier élément de temps. Et à la fin du dernier élément de temps conſidéré ici le corps ſe trouvera néceſſairement au point A. Mais quelqu'un dira peut-être qu'il s'eſt élevé plus haut que le point A et eſt retombé à partir de là. Ceci toutefois ſerait abſurde puiſqu'il ne peut, par un mouvement dû à la gravité, monter à une plus grande hauteur que celle dont il était deſcendu. D'ailleurs comme de la viteſſe qu'il avait en B la portion BD a été anéantie, il eſt évident que lorſque le corps atteignait

quam esse duplam AB ostendimus propositione 2. Itaque celeritatem in fine descensus K acquisitam sursum convertendo, si grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte spatium KF. Atqui, gravitatis actione accedente, diminuetur ascensus KF spatio FG ipsi AB æquali, ut patet ex dictis ad hypothesin initio sumptam. Ergo parte prima temporis ascendet grave tantum per KG, quo eodem spatio parte temporis novissima descenderat. Simul vero & celeritati tantum decessisse necesse est, quantum acquiritur temporis parte una deorsum cadendo, hoc est celeritatem BD. Itaque grave, ubi ad G ascenderit, habet celeritatem reliquam HG, cum initio ascensus habuerit celeritatem HG una cum celeritate BD. Est autem ipsi HG æqualis GD; quum æquetur ipsi FE una cum DB, hoc est una cum dupla AB, hoc est una cum duabus FG & ED; Ergo si ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, conficeret una parte temporis spatium GD. Accedente autem gravitatis actione, diminuetur ascensus iste spatio DE, ipsi AB æquali. Ergo, hac secunda parte temporis, ascendet per spatium GE, quod simili temporis parte etiam cadendo transierat. Simul autem celeritate tantum decessisse denuo debet quantum temporis parte una ex casu acquiritur; nempe celeritas BD. Itaque ubi usque ad | E ascenderit, habet (p. 28). duntaxat celeritatem FE, quæ nimirum relinquitur quum à celeritate GD aufertur celeritas BD. Nam BD, ut jam diximus, æqualis est duabus DE, FG.

De descensu gravium.

Est autem ipsi FE æqualis EA, quum FE æquetur ipsi BD bis sumptæ, hoc est ipsi BD una cum dupla AB, hoc est una cum duabus AB, DE. Ergo si ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset una temporis parte spatium EA. Sed accedente actione gravitatis, diminuetur ascensus iste ipso spatio AB. Proinde hac parte temporis per spatium EB tantum ascendet, quod simili parte temporis descendendo quoque transierat. Hic vero rursus celeritati tantum decessisse necesse est quantum una temporis parte cadendo deorsum acquiritur, hoc est celeritatem BD. Itaque grave, ubi usque ad B ascenderit, habet celeritatem ipsam BD reliquam, cum in E habuerit celeritatem FE ipsius BD duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset parte una temporis spatium æquale ipsi DB, hoc est duplum AB. Sed accedente gravitatis actione, diminuitur ascensus iste spatio quod ipsi AB æquale sit. Igitur hac parte temporis ascendet tantummodo per spatium BA, quod etiam primo descensus tempore transierat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus necessario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forsan altius ascendisse quam ad A, atque inde eo relapsum esse. At hoc absurdum esset, cum non possit, motu à gravitate profecto, altius quam unde decidit ascendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rursus decesserit celeritas BD,

De la chute des corps graves.

A il ne lui reſtait aucune viteſſe et que par conſéquent il n'a pu s'élever plus haut. Il eſt donc démontré qu'il eſt parvenu à la hauteur même dont il était tombé et qu'il a de nouveau parcouru chacun des divers eſpaces (qu'il avait traverſés en deſcendant en des éléments de temps égaux entre eux) dans des temps d'aſcenſion de même durée; et il s'eſt montré de plus que dans des éléments égaux de temps il a perdu des quantités égales de viteſſe. La propoſition eſt donc prouvée.

Or, comme il a été admis dans la démonſtration de la Prop. II, dont la propoſition précédente dépend, qu'il exiſte un rapport déterminé entre les eſpaces parcourus par un corps tombant dans des temps conſécutifs égaux, et que ce rapport eſt le même quels que ſoient les temps égaux conſidérés — ce qui doit être ainſi d'après la nature du phénomène et, ſi on voulait le nier, il faudrait avouer que la recherche du rapport de ces eſpaces eſt vaine [1]) — cependant, comme la propoſition peut auſſi être démontrée ſans ce prémice, en ſuivant la méthode de Galilée, il ſera utile de formuler ici plus correctement la démonſtration qu'il a donnée dans une forme moins parfaite [2]). Nous démontrerons donc de nouveau la

PROPOSITION V.

L'eſpace parcouru pendant un certain temps par un corps qui commence ſa chute en partant du repos eſt la moitié de l'eſpace que ce corps pourrait parcourir d'un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe par la chute au bout du temps conſidéré.

Soit AH [Fig. 26] le temps de la chute entière; puiſſe le mobile avoir parcouru en ce temps une diſtance dont le plan P indique la grandeur. De plus, en tirant HL, de longueur quelconque, perpendiculairement à AH [3]), nous admettons que cette lon-

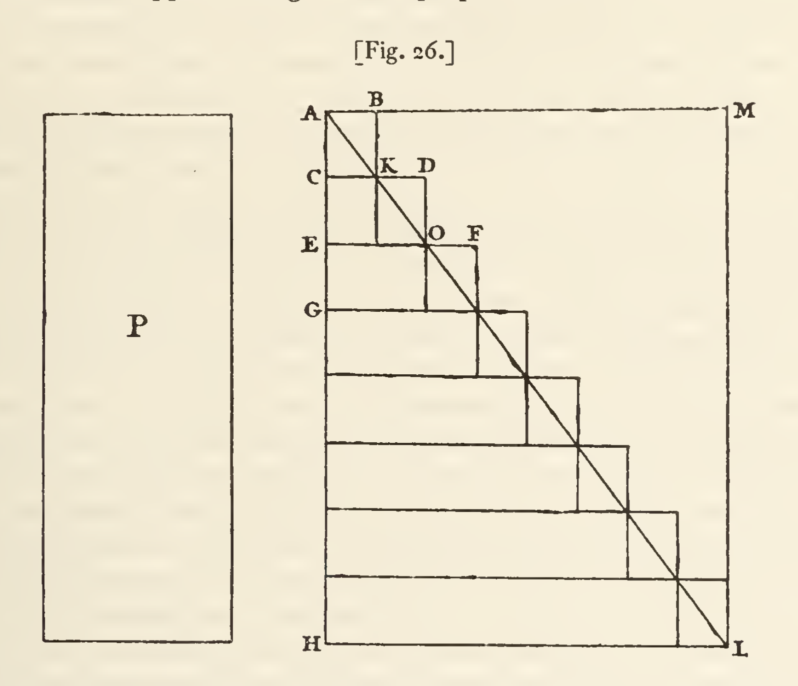
[1]) Comparez la p. 128 (avec la note 1) du T. XVII, déjà citée dans la note 1 de la p. 129 qui précède.

[2]) „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Giornata Terza", Th. II, Prop. II avec le Cor. I (Ed. Naz. VIII, p. 209—210); cette proposition de Galilée a aussi été citée à la p. 127 (note 5) du T. XVII. Comparez avec la Fig. 26 la Fig. 34, probablement intercalée plus tard, de la p. 130 du T. XVII.

[3]) Huygens annote en marge au crayon (les mots sont à peine lisibles): „spatium designatum plano P potius post spatium rectanguli post designatum [il s'agit évidemment du rectangle AHL] poni debuerat, quum HL longitudinis cujuslibet ducatur".

patet jam gravi in A conſtituto nullam celeritatem ſupereſſe, ac proinde non altius excurſurum. Itaque oſtenſum eſt ad eandem unde decidit altitudinem perveniſſe, & ſingula ſpatia, quæ æqualibus deſcenſus temporibus tranſmiſerat, eadem totidem aſcenſus temporibus remenſum eſſe: ſed & æqualibus temporibus æqualia ipſi deceſſiſſe celeritatis momenta apparuit. Ergo conſtat propoſitum. DE DESCENSU GRAVIUM.

[Fig. 26.]



Quia vero in demonſtratione propoſitionis ſecundæ, ex qua pendet præcedens, adſumptum fuit certam quandam eſſe proportionem ſpatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à gravi cadente transeuntur, quæque eadem ſit, quæcunque æqualia tempora accipiantur; quod quidem & ex rei natura ita ſe habere neceſſe eſt, & ſi negetur, fatendum fruſtra proportionem iſtorum ſpatiorum inveſtigari [1]). Tamen, quia propoſitum etiam absque hoc demonſtrari poteſt, Galilei methodum ſequendo, | operæ pretium erit demonſtrationem, ab illo minus perfecte traditam [2]), hic accuratius conſcribere. itaque rurſum hic demonſtrabimus. (p. 29).

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete caſum inchoante, dimidium eſſe ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum celeritate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

Sit tempus deſcenſus totius AH [Fig. 26], quo tempore mobile peregerit ſpatium quoddam cujus quantitas deſignetur plano P. ductaque HL perpendiculari ad AH [3]),

De la chute des corps graves.

gueur-là repréſente la viteſſe acquiſe au bout de la chute. Complétant enſuite le rectangle AHLM, nous entendons repréſenter par lui la grandeur de l'eſpace qui ſerait parcouru dans le temps AH avec la viteſſe HL. Il faut donc démontrer que le plan P eſt la moitié du rectangle MH, en d'autres termes, lorſqu'on tire la diagonale AL, qu'il eſt égal au triangle AHL.

Si le plan P n'eſt pas égal au triangle AHL, il ſera donc ou plus petit ou plus grand. Suppoſons d'abord, ſi la choſe eſt poſſible, le plan P inférieur au triangle AHL. Diviſons AH en autant de parties égales AC, CE, EG etc. que — lorſque nous circonſcrivons au triangle AHL une figure compoſée de rectangles dont la hauteur ſoit égale à la longueur de chacune de ces parties de AH, tels que les rectangles BC, DE et FG, et que nous inſcrivons dans le même triangle une deuxième figure compoſée de rectangles de la même hauteur tels que KE, OG, etc. — l'excès de la première figure ſur la deuxième ſoit moindre que celui du triangle AHL ſur le plan P. En effet, il eſt évident que ceci eſt poſſible, puiſque l'excès total de la figure circonſcrite ſur la figure inſcrite eſt égal à un très petit rectangle ayant HL pour baſe. Conſéquemment l'excès du triangle AHL ſur la figure inſcrite ſera certainement moindre que ſon excès ſur le plan P; la figure inſcrite au triangle ſera donc plus grande que le plan P. D'autre part, comme la droite AH repréſente le temps de la chute totale, ſes parties égales AC, CE, EG repréſenteront des parties égales de ce temps. Or, puiſque les viteſſes du mobile tombant croiſſent dans le même rapport que les temps de chute,* et que la viteſſe acquiſe à la fin du temps entier eſt HL, la viteſſe acquiſe au bout de la première partie AC du temps ſera CK, parce que AH : AC = HL : CK. Pareillement la viteſſe acquiſe au bout de la deuxième partie CE du temps, ſera ED et ainſi de ſuite. Il eſt évident que pendant le premier temps AC un certain eſpace ſupérieur à zéro a été traverſé par le mobile, et que pendant le deuxième temps CE un eſpace ſupérieur à KE a été parcouru, puiſque l'eſpace KE eût été parcouru dans le temps CE d'un mouvement uniforme avec la viteſſe CK. En effet, les eſpaces parcourus uniformément ont entre eux un rapport compoſé du rapport des temps et de celui des viteſſes; par conſéquent, puiſque nous avons admis que l'eſpace MH eſt parcouru dans le temps AH avec la viteſſe conſtante HL, il s'enſuit que l'eſpace KE eſt parcouru dans le temps CE avec la viteſſe CK, attendu que le rapport du rectangle MH au rectangle KE eſt compoſé des rapports AH : CE et HL : EO [1]).

* Prop. I. de cette Partie.

Comme l'eſpace KE, ainſi que je l'ai dit, eſt donc celui qui ſerait parcouru dans le temps CE avec la viteſſe uniforme CK, et que le mobile eſt tranſporté durant le temps CE d'un mouvement accéléré qui avait déjà au début de ce temps la viteſſe CK, il eſt manifeſte que par ce mouvement accéléré le mobile parcourra dans le temps CE un eſpace ſupérieur à KE. Pour la même raiſon il traverſera pendant le troiſième temps EG une diſtance ſupérieure à OG: car c'eſt OG qu'il parcourrait dans ce même temps EG avec la viteſſe uniforme EO. Et ainſi de ſuite, dans chacune des parties du temps AH, le mobile parcourra un eſpace ſupérieur au rectangle correſpondant de la figure inſcrite. C'eſt pourquoi l'eſpace entier parcouru d'un mouvement accéléré ſera plus

longitudinis cujuslibet, referat illa celeritatem in fine casus acquisitam. Deinde completo rectangulo AHLM, intelligatur eo notari quantitas spatii quod percurreretur tempore AH, cum celeritate HL. Ostendendum est igitur planum P dimidium esse rectanguli MH, hoc est, ducta diagonali AL, æquale triangulo AHL. De descensu gravium.

Si planum P non est æquale triangulo AHL, ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, si fieri potest, planum P minus triangulo AHL. dividatur autem AH in tot partes æquales AC, CE, EG &c. ut, circumscriptâ triangulo AHL figurâ è rectangulis quorum altitudo singulis divisionum ipsius AH partibus æquetur, ut sunt rectangula BC, DE, FG, alterâque eidem triangulo inscriptâ, ex rectangulis ejusdem altitudinis, ut sunt KE, OG &c. ut, inquam, excessus illius figuræ supra hanc, minor sit excessu | trianguli AHL supra planum P. hoc enim fieri posse perspicuum est, cum totus (*p.* 30). excessus figuræ circumscriptæ super inscriptam æquetur rectangulo infimo, basin habenti HL. Erit itaque omnino excessus ipsius trianguli AHL supra figuram inscriptam minor quam supra planum P, ac proinde figura triangulo inscripta major plano P.

Porro autem, quum recta AH tempus totius descensus referat, ejus partes æquales AC, CE, EG, æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis crescant eadem proportione qua tempora descensus *; sitque celeritas in fine totius temporis acquisita HL; erit ea, quæ in fine primæ partis temporis AC acquiretur, CK; quia ut AH ad AC, ita HL ad CK. Similiter quæ in fine partis temporis secundæ CE acquiritur, erit EO, atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo AC, spatium aliquod à mobili transmissum esse, quod majus sit nihilo; tempore vero secundo CE transmissum esse spatium quod majus sit quam KE, quia spatium KE transmissum fuisset tempore CE, motu æquabili, cum celeritate CK. habent enim spatia, motu æquabili transacta, rationem compositam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore AH, celeritate æquabili HL percurri posuerimus spatium MH, sequitur tempore CE, cum celeritate CK, percurri spatium KE, quum ratio rectanguli MH ad rectangulum KE componatur ex rationibus AH ad CE, & HL ad EO [1]).

* Prop. 1. huj.

Quum ergo, ut dixi, spatium KE sit illud quod transmitteretur tempore CE, cum celeritate æquabili CK, mobile autem feratur tempore CE motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem CK; manifestum est isto accelerato motu, tempore CE, majus spatium quam KE confecturum. Eadem ratione, tempore tertio EG, majus spatium conficiet quam OG, quia nempe hoc confecturum esset tempore eodem EG, cum celeritate æquabili EO. Atque ita deinceps, singulis temporis AH partibus, à mobili majora spatia quam sunt rectangula figuræ inscriptæ, ipsis partibus

[1]) Lisez: CK (correction de 's Gravesande).

De la chute des corps graves.

grand que la figure inſcrite. Or, cet eſpace fut poſé égal au plan P. Par conſéquent la figure inſcrite ſera plus petite que l'eſpace P, ce qui eſt abſurde, car il a été démontré qu'elle lui eſt ſupérieure. Le plan P n'eſt donc pas inférieur au triangle AHL. Nous ferons voir qu'il ne lui eſt pas non plus ſupérieur.

En effet, qu'il le ſoit, ſi cela eſt poſſible. Diviſons AH en parties égales et ſuppoſons de nouveau, comme précédemment, qu'au triangle AHL ſoit inſcrit et circonſcrit une figure compoſée de rectangles, de telle manière que l'une ſurpaſſe l'autre d'un excès inférieur à celui du plan P ſur le triangle AHL. La figure circonſcrite ſera donc néceſſairement inférieur au plan P. Il eſt évident d'abord que pendant la première partie AC du temps un eſpace inférieur à BC eſt traverſé par le mobile, puiſque ce dernier ſerait parcouru dans le même temps AC avec une viteſſe uniforme CK, viteſſe que le mobile ne poſſède qu'à la fin du temps AC. De la même manière dans la deuxième partie CE du temps un eſpace inférieur à DE ſera parcouru du mouvement accéléré, puiſque DE ſerait parcouru dans le même temps CE avec la viteſſe conſtante EO que le mobile n'atteint qu'à la fin du temps CE. Et ainſi de ſuite dans chacune des parties du temps AH il ſera parcouru par le mobile un eſpace inférieur au rectangle correſpondant de la figure circonſcrite. C'eſt pourquoi l'eſpace total parcouru d'un mouvement accéléré ſera moindre que la figure circonſcrite entière. Or, cet eſpace fut poſé égal au plan P; par conſéquent le plan P ſera auſſi inférieur à la figure circonſcrite. Ce qui eſt abſurde, attendu qu'il a été démontré que cette figure eſt plus petite que le plan P. Par conſéquent le plan P n'eſt pas plus grand que le triangle AHL. Mais il a auſſi été démontré qu'il n'eſt pas plus petit. Il lui eſt donc néceſſairement égal. C. Q. F. D.

Il faut ſavoir en outre que tout ce qui a été démontré juſqu'à préſent, s'applique aux corps graves deſcendant ou montant le long de plans inclinés tout auſſi bien qu'à ceux qui ſe meuvent ſuivant la verticale, puiſque ce que nous avons poſé touchant l'effet de la peſanteur doit être admis par même raiſon dans les deux cas [1]).

Or de là il ne ſera pas difficile de prouver la propoſition ſuivante laquelle Galilée demandait qu'on lui accordât comme en quelque ſorte évidente par elle-même. Car la démonſtration qu'il a tâché d'en donner plus tard et qui ſe trouve dans l'édition poſtérieure [2]) de ſes ouvrages eſt peu ſolide, du moins à mon avis. Cette propoſition eſt la ſuivante.

PROPOSITION VI.

Les viteſſes des corps peſants, acquiſes en deſcendant par des plans diverſement inclinés, ſont égales lorſque les élévations des plans le ſont.

Nous appelons élévation d'un plan ſa hauteur verticale.

---

[1]) Comparez la note 3 de la p. 131, ainsi que la note 7 de la p. 284 du T. XVII.

adjacentia, peragentur. Quare totum ſpatium motu accelerato peractum majus erit ipſa figura inſcripta. Spatium vero illud æquale poſitum fuit plano P. Itaque figura inſcripta minor erit ſpatio P. quod eſt abſurdum; eodem enim ſpatio major oſtenſa fuit. Non eſt igitur planum P minus triangulo AHL. At neque majus eſſe oſtendetur. DE DESCENSU GRAVIUM.

Sit enim, ſi poteſt; & dividatur AH in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inſcripta circumſcriptaque rurſus, | ut ante, ſit triangulo AHL figura ex rectangulis, (p. 31). ita ut altera alteram excedat minori exceſſu quam quo planum P ſuperat triangulum AHL, erit igitur neceſſario figura circumſcripta minor plano P. Conſtat jam, prima temporis parte AC, minus ſpatium à mobili tranſmitti quam ſit BC, quia hoc percurreretur eodem tempore AC cum celeritate æquabili CK, quam demum in fine temporis AC mobile adeptum eſt. Similiter ſecunda parte temporis CE, minus ſpatium motu accelerato transmittetur quam ſit DE, quia hoc percurreretur eodem tempore CE, cum celeritate æquabili EO, quam demum in fine temporis CE mobile aſſequitur. Atque ita deinceps, ſingulis partibus temporis AH, minora ſpatia à mobili trajicientur quam ſunt rectangula figuræ circumſcriptæ, ipſis partibus adjacentia. Quare totum ſpatium motu accelerato peractum, minus erit ipſa figura circumſcripta. Spatium vero illud æquale poſitum fuit plano P; ergo planum P minus quoque erit figura circumſcripta. quod eſt abſurdum, cum figura hæc plano P minor oſtenſa fuerit. Ergo planum P non majus eſt triangulo AHL, ſed nec minus eſſe jam oſtenſum fuit. Ergo æquale ſit neceſſe eſt; quod erat demonſtrandum.

Et hæc quidem omnia quæ hactenus demonſtrata ſunt, gravibus per plana inclinata deſcendentibus atque aſcendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire ſciendum eſt: cum, quæ de effectu gravitatis poſita fuerunt, eadem ratione utrobique ſint admittenda [1]).

Hinc vero non difficile jam erit demonſtrare propoſitionem ſequentem quam concedi ſibi, ut quodammodo per ſe manifeſtam, Galileus poſtulavit. nam demonſtratio illa quam poſtea adferre conatus eſt, quæque in poſteriori operum ejus editione [2]) extat, parum ſirma meo quidem judicio videtur. Eſt autem propoſitio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, ſuper diverſis planorum inclinationibus deſcendendo acquiſitæ, æquales ſunt, ſi planorum elevationes fuerint æquales.

Elevationem plani vocamus altitudinem ejus ſecundum perpendiculum.

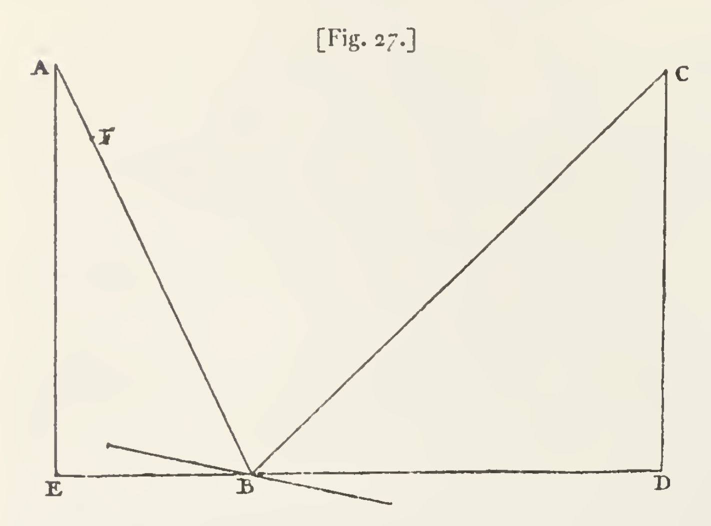
---

[2]) On peut considérer comme une première édition des „Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" les „Mechaniques de Galilee" de 1634 par Mersenne (T. XVII, p. 336, note 5). L'édition italienne de 1638 de Leiden des „Discorsi" ne contient pas non plus de démonstration en règle (voir les p. 205 et suiv. du T. VIII de 1898 de l'Ed. Naz.). Comparez les p. 346 du T. XVI et 131—132 (§ 5) du T. XVII.

De la chute des corps graves.

Confidérons donc des plans inclinés dont AB et CB [Fig. 27] foient les fections faites par un plan vertical et dont les élévations AE et CD foient égales. Suppofons que le corps defcende en tombant de A le long du plan AB et une autre fois de C le long du plan CB. Je dis que dans l'un et l'autre cas ce corps acquerra le même degré de viteffe au point B.

[Fig. 27.]



En effet fi l'on dit que le corps tombant le long de CB acquiert une viteffe moindre qu'en tombant le long de AB, qu'il ait donc, après être tombé fuivant CB, la viteffe qu'il pourrait acquérir auffi par une chute fuivant FB, par hypothèfe inférieure à AB. Mais en tombant fuivant CB il acquerra une viteffe par laquelle il pourrait de nouveau remonter tout le long de BC*. Par conféquent il acquerra auffi en tombant felon FB la viteffe qui lui permettrait de remonter tout le long de BC. Si après être tombé de F en B il continue fon mouvement par BC, ce qui peut être obtenu par réflexion fur une furface oblique, il s'élèvera donc jufqu'en C, c.à.d. à une hauteur fupérieure à celle dont il était defcendu, ce qui eft abfurde.

* Prop. 4 de cette Partie.

On démontrera de la même manière qu'en tombant le long du plan AB il ne peut pas non plus acquérir une viteffe moindre que celle provenant de la chute le long de CB. Par conféquent la viteffe acquife par la chute fuivant l'un ou l'autre plan eft la même. C. Q. F. D.

Que fi, au lieu de l'un ou de l'autre plan, on prend la verticale elle-même qui correfpond à l'élévation des plans et qu'on fait tomber le mobile fuivant cette verticale, il eft certain que de cette façon auffi la même viteffe eft obtenue que par la chute fuivant les plans inclinés; en effet, la démonftration eft la même.

En nous bafant là-deffus, nous pourrons maintenant donner auffi une bonne démonftration d'un deuxième théorème de Galilée fur lequel eft bâtie toute la théorie qu'il a enfeignée fur les plans inclinés. Savoir la

PROPOSITION VII.

Les temps de chute le long de plans diverfement inclinés, mais dont l'élévation eft la même, font entre eux comme les longueurs de ces plans [1]).

Sunto itaque plana inclinata, quorum ſectiones factæ plano ad horizontem erecto, AB, CB [Fig. 27], quorumque elevationes AE, CD | ſint æquales; & cadat grave ex (p. 32). A per planum AB, & rurſus ex C per planum CB. dico utroque caſu eundem gradum De descensu velocitatis in puncto B acquiſiturum. gravium.

Si enim per CB cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per AB, habeat ergo, per CB cadens, eam duntaxat quam per FB acquireret, poſita nimirum FB minore quam AB. Acquiret autem per CB cadens eam velocitatem qua rurſus per totam BC poſſit aſcendere *. Ergo & per FB acquiret eam velocitatem qua * Prop. 4 huj. poſſit aſcendere per totam BC. Ideoque cadens ex F in B, ſi continuet porro motum per BC; quod repercuſſu ad ſuperficiem obliquam fieri poteſt; aſcendet uſque in C, hoc eſt, altius quam unde decidit, quod eſt abſurdum.

Eodem modo oſtendetur neque per planum AB decidenti minorem velocitatem acquiri quam per CB. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonſtrandum.

Quod ſi vero, pro plano alterutro, ſumatur perpendiculum ipſum planorum elevationi æquale, per quod decidere mobile ponatur, ſic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem ei acquiri conſtat; eadem namque eſt demonſtratio.

Porro hinc jam recte quoque procedet demonſtratio alterius theorematis Galileani, cui reliqua omnia, quæ de deſcenſu ſuper planis inclinatis tradidit, ſuperſtruuntur. Nempe

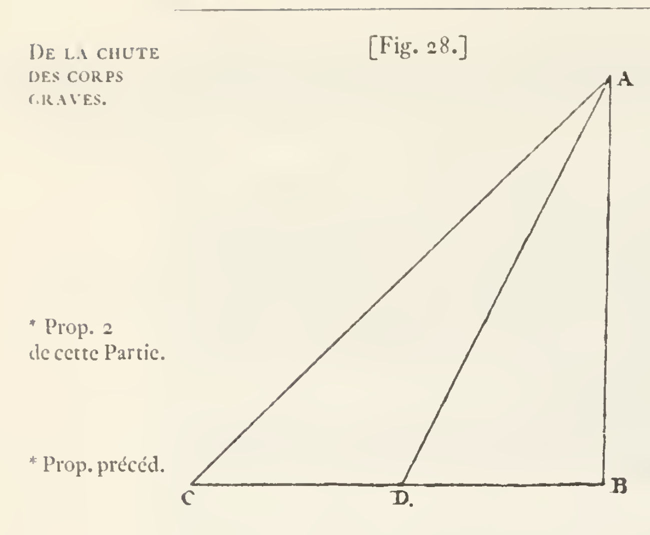
PROPOSITIO VII.

Tempora deſcenſuum ſuper planis diverſimode inclinatis, ſed quorum eadem eſt elevatio, eſſe inter ſe ut planorum longitudines [1]).

[1]) Comparez la § 6 à la p. 132 du T. XVII.

De la chute des corps graves.

[Fig. 28.]



Soient AC et AD les plans inclinés de même élévation AB [Fig. 28]. Je dis que le temps de la descente le long du plan AC est à celui correspondant à AD comme la longueur AC est à AD. En effet, le temps d'une chute par AC est égal au temps d'un mouvement uniforme le long de AC avec la moitié de la vitesse acquise par la chute suivant AC*. De la même manière le temps correspondant à AD est égal à celui d'un mouvement uniforme suivant AD avec la moitié de la vitesse acquise par la chute suivant AD. Or, cette demi-vitesse est égale à l'autre*: par conséquent le temps rapporté du mouvement uniforme suivant AC sera au temps du mouvement uniforme suivant AD comme AC est à AD. Par conséquent les temps respectivement égaux à ceux-là, savoir le temps de chute le long de AC et celui le long de AD, auront entre eux le même rapport AC : AD. C. Q. F. D.

* Prop. 2 de cette Partie.

* Prop. précéd.

On démontrera de la même manière que le temps de la descente suivant AC est au temps de la chute verticale le long de AB, comme sont entre elles les longueurs AC et AB.

PROPOSITION VIII.

Lorsqu'un mobile descend d'un mouvement continu d'une hauteur déterminée par un nombre quelconque de plans contigus d'inclinaison quelconque, il finira toujours par acquérir la même vitesse, laquelle sera égale à celle qu'il acquerrait par une chute verticale de même hauteur [1]).

Soient AB, BC, et CD [Fig. 29] les plans contigus, dont l'extrémité A ait au-dessus de la ligne horizontale DF, tracée par l'extrémité inférieure D, une hauteur égale à la perpendiculaire EF. Puisse le mobile descendre le long de ces plans de A jusqu'en D. Je dis qu'il aura en D la vitesse qu'il aurait en F s'il était tombé de E.

En effet, supposons que le prolongement de CB coupe la droite AE en G, et celui de DC la même AE en E. Puisque le mobile en descendant suivant AB acquiert la même vitesse à l'extrémité B que lorsqu'il descend suivant GB*, il est manifeste, vu que par hypothèse le changement de direction au point B ne modifie nullement le mouvement, qu'il aura en parvenant au point C la même vitesse que s'il était descendu le long du plan GC, en d'autres termes que s'il était descendu suivant EC. Il parcourra donc aussi le dernier plan CD de la même manière que s'il était venu suivant EC, et il aura par conséquent au point extrême D une même vitesse que s'il était

* Prop. 6 de cette Partie.

[1]) Comparez le § 7 à la p. 133 du T. XVII.

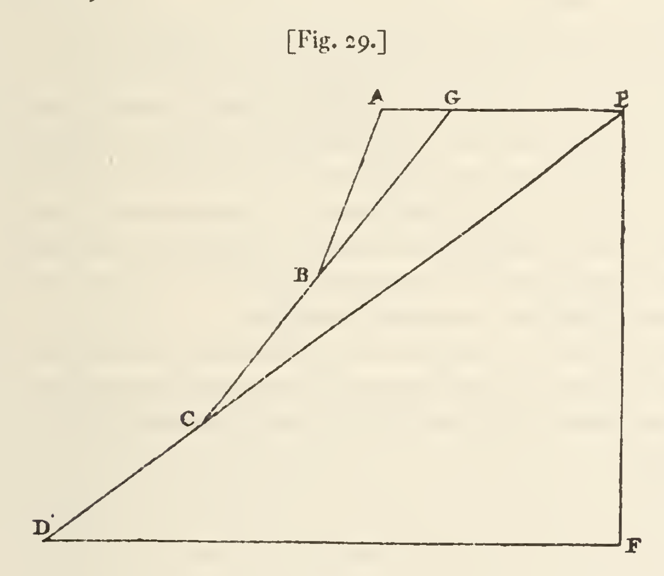
Sint plana inclinata AC, AD quorum eadem elevatio AB [Fig. 28]. dico | tempus (p. 33). defcenfus per planum AC ad tempus defcenfus per AD effe ut longitudo AC ad AD. De descensu Eft enim tempus per AC æquale tempori motus æquabilis per eandem AC, cum cele- gravium. ritate dimidia ejus quæ acquiritur cafu per AC *. Similiter tempus per AD eft æquale * Prop. 2. huj. tempori motus æquabilis per ipfam AD, cum dimidia celeritate ejus quæ acquiritur cafu per AD. Eft autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis *, ideoque * Prop. præced. dictum tempus motus æquabilis per AC, ad tempus motus æquabilis per AD, erit ut AC ad AD. Ergo & tempora fingulis iftis æqualia, nimirum tempus defcenfus per AC, ad tempus defcenfus per AD, eandem rationem habebunt, nempe quam AC ad AD. quod erat demonftrandum.

Eodem modo oftendetur & tempus defcenfus per AC, ad tempus cafus per AB perpendicularem, effe ut AC ad AB longitudine.

PROPOSITIO VIII.

Si ex altitudine eadem defcendat mobile continuato motu per quotlibet ac quælibet plana contigua, utcunque inclinata; femper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine [1]).

[Fig. 29.]



Sint plana contigua AB, BC, CD [Fig. 29], quorum terminus A, fupra horizontalem lineam DF per infimum terminum D ductam, altitudinem habeat quanta eft perpendicularis EF. defcendatque mobile per plana illa ab A ufque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F.

Producta enim CB occurrat rectæ AE in G. Itemque DC producta | occurrat eidem AE (p. 34). in E. Quoniam itaque per AB defcendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque defcendens per GB *; manifeftum eft, cum flexus ad * Prop. 6. huj. B nihil obftare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam fi per GC planum defcendiffet; hoc eft, quantam haberet ex defcenfu per EC. Quare & reliquum planum CD eodem modo tranfibit ac fi per EC adveniffet, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac fi defcendiffet per planum ED,

De la chute des corps graves.

descendu suivant le plan ED, c.à.d. celle qui proviendrait aussi de la chute verticale selon EF. C. Q. F. D.

Par là il appert aussi que si le mobile descend le long d'une circonférence de cercle ou bien d'une ligne courbe quelconque (car il est ici permis de considérer les courbes comme composées d'une infinité de lignes droites) il acquiert toujours la même vitesse en descendant d'une même hauteur, savoir la vitesse qui résulterait d'une chute verticale.

PROPOSITION IX.

Lorsqu'un corps grave, après être tombé, tourne son mouvement vers le haut, il atteindra la hauteur même dont il est venu, quel que soit le nombre des surfaces planes contigues et quelles que soient leurs inclinaisons [1]).

Puisse le corps tomber de la hauteur AB [Fig. 30]. Soient DC, CD et DE les plans inclinés. B représente le point le plus bas, l'autre extrémité E est située à la même hauteur que le point A. Je dis que si le mobile, après la chute le long de AB, change la direction de son mouvement de sorte qu'il le continue suivant les dits plans inclinés, il parviendra jusqu'en E.

Qu'on dise en effet, si la chose est possible, qu'il n'arrive qu'en G. Prolongeons BC et CD jusqu'à leur rencontre en F et en H avec l'horizontale GF. Comme le mobile, après avoir parcouru les plans BC et CD, possède seulement la vitesse nécessaire pour escalader DG ou DH (car il est établi par la Prop. VI qu'il lui faut la même vitesse dans les deux cas), il avait donc, après avoir parcouru le plan BC, la vitesse nécessaire pour monter suivant CH ou CF. Il avait par conséquent en B la vitesse nécessaire pour monter le long de BF, c.à.d. celle qu'il pourrait acquérir en descendant le long de FB. Mais il possède en B une vitesse suffisante pour remonter jusqu'en A. Le corps pourrait donc avec la vitesse qu'il acquiert en descendant le long de FB remonter par BA, c.à.d. plus haut que son point de départ, ce qui est impossible.

La démonstration est absolument la même quel que soit le nombre des plans suivant lesquels le mobile doive monter. Partant, lors même que le nombre des plans est infini, c.à.d. lorsqu'on a affaire à une courbe, le mobile s'élèvera par celle-ci aussi jusqu'à la hauteur dont il était descendu.

---

[1]) Comparez le § 8 à la p. 134 du T. XVII.

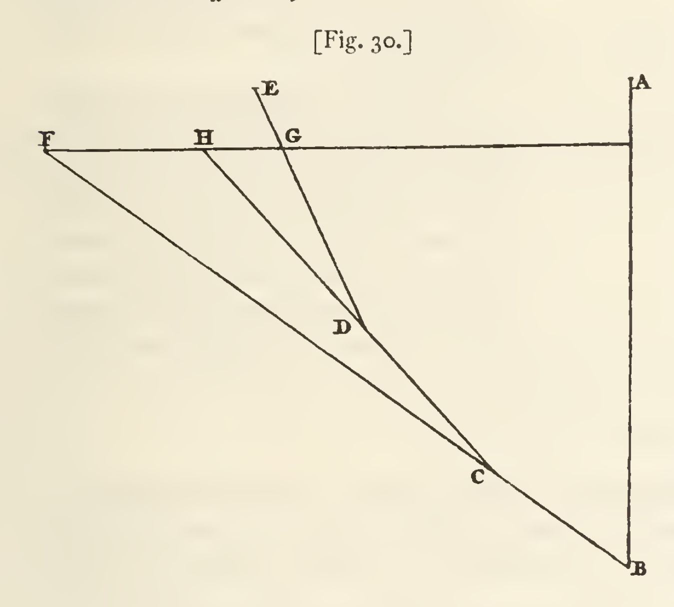
hoc eſt, eandem quam ex caſu perpendiculari per EF. quod erat demonſtrandum. De descensu gravium.

Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam deſcendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compoſitæ eſſent hic conſiderare licet) ſemper eandem illi velocitatem acquiri ſi ab æquali altitudine deſcenderit: tantamque eam eſſe velocitatem, quantam caſu perpendiculari ex eadem altitudine adipiſceretur.

PROPOSITIO IX.

Si grave, à deſcenſu, ſurſum convertat motum ſuum, aſcendet ad eandem unde venit altitudinem, per quaſcunque planas ſuperficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, inceſſerit[1]).

[Fig. 30.]



Cadat grave ex altitudine AB [Fig. 30], & ex puncto B inclinata ſint ſurſum plana BC, CD, DE, quorum extremitas E ſit eadem altitudine cum puncto A. Dico ſi mobile, poſt caſum per AB, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventurum uſque in E.

Dicatur enim, ſi fieri poteſt, (*p.* 35). tantum ad G perventurum. Producantur BC & CD, donec occurrant horizontali GF in F & H. Cum igitur mobile, ſuperatis planis BC, CD, habeat tantum eam velocitatem quâ poſſit aſcendere per DG, vel per DH; nam ad hæc utraque eadem velocitate opus eſſe conſtat ex propoſitione 6; Ergo, ſuperato plano BC, eam duntaxat habebat qua potuiſſet aſcendere per CH, vel per CF. Ergo in B duntaxat eam qua potuiſſet aſcendere per BF, hoc eſt, eandem quam acquireret deſcendendo per FB. Atqui in B habet velocitatem qua poteſt aſcendere uſque in A. Ergo illa velocitate quam acquirit grave deſcendendo per FB, poſſet aſcendere per BA, hoc eſt, altius quam unde diſceſſerat, quod fieri non poteſt.

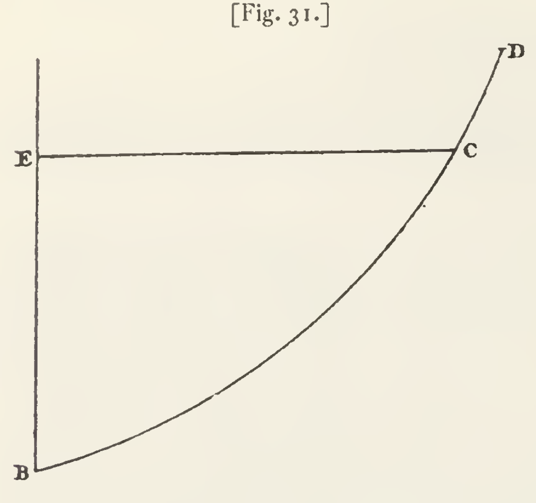
Eſt autem eadem prorſus demonſtratio quotcunque plana fuerint per quæ mobile aſcendat. Unde & ſi infinita fuerit planorum multitudo, hoc eſt, ſi ſuperficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile aſſurget.

De la chute des corps graves.

PROPOSITION X.

Lorſqu'un mobile tombe perpendiculairement ou ſuivant une ſurface quelconque et qu'il eſt de nouveau porté en haut par la viteſſe acquiſe ſuivant une autre ſurface quelconque, il aura toujours en montant et en deſcendant la même viteſſe en des points ſitués à la même hauteur [1]).

[Fig. 31.]



Conſidérons par exemple le cas où un mobile qui tombe de la hauteur AB [Fig. 31] continue enſuite ſon mouvement par la ſurface BCD dont le point C ſoit à la même hauteur que le point E ſitué ſur la droite AB. Je dis que le mobile a en C la même viteſſe qu'auparavant en E.

En effet, comme il lui reſte en C la viteſſe néceſſaire pour s'élever juſqu'au point D ſitué à la même hauteur que A *, et comme il acquiert en tombant le long de AE la viteſſe qui lui permettrait de s'élever, après invertiſſement du mouvement, ſuivant CD *, il apparaît que lorſqu'en montant il a attteint C il poſſède la même viteſſe qu'il avait en E en deſcendant. C. Q. F. D.

* Prop. précéd.

* Prop. précéd.

PROPOSITION XI.

Lorſqu'un mobile tend à deſcendre par quelque ſurface et qu'après l'invertiſſement du mouvement il eſt porté en haut par la même ſurface ou par une autre ſemblable et ſemblablement poſée, il montera et deſcendra par le même eſpace en des temps égaux [2]).

Conſidérons par exemple le cas où le mobile deſcend par la ſurface AB [Fig. 32] et remonte, après être parvenu en B (le mouvement étant interverti) le long de la même ſurface AB ou bien le long de la ſurface BC ſemblable et ſemblablement placée par rapport au plan de l'horizon; il apparaît par les démonſtrations antérieures qu'il atteindra de nouveau la hauteur dont il eſt deſcendu. Or, comme il a partout aux points de même hauteur la même viteſſe tant en montant qu'en deſcendant *, il eſt clair que la même ligne eſt parcourue deux fois avec des viteſſes partout égales dans les deux cas, d'où réſulte auſſi que les temps des deux mouvements doivent être égaux. C. Q. F. D.

* Prop. précéd.

[1]) Comparez le § 9 à la p. 135 du T. XVII.

PROPOSITIO X.

De descensu gravium.

Si mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet ſuperficiem deſcendat, ac rurſus impetu concepto per quamlibet aliam feratur ſurſum, habebit aſcendendo ac deſcendendo in punctis æque altis eandem ſemper velocitatem [1]).

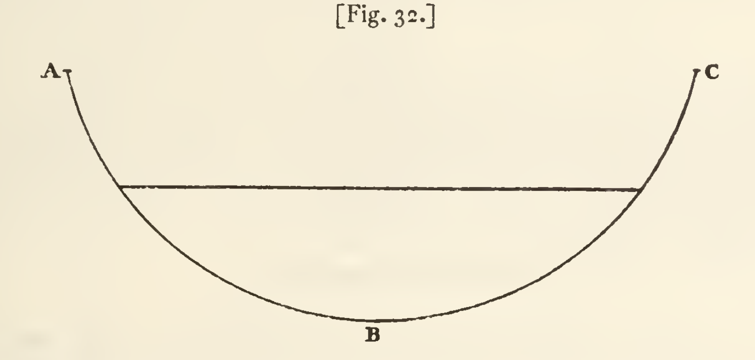
Ut ſi mobile ex altitudine AB [Fig. 31] decidens, motum deinde continuet per ſuperficiem BCD, in qua punctum C ſit pari altitudine atque in AB eſt punctum E. Dico in C eandem velocitatem ineſſe mobili atque in E fuerat.

Quum enim in C ea velocitas ſuperſit mobili qua porro aſcendat usque ad D pun- (*p.* 36). ctum, æque altum ac A*: cumque & ex deſcenſu per AE velocitatem eam acquirat * Prop.præced. qua, converſo motu, aſcenſurum ſit per CD*; Patet cum pervenit ad C aſcendendo, * Prop.præced. eandem ipſum habere velocitatem, quam habebat in E deſcendendo; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

Si mobile per ſuperficiem aliquam deorſum tendat, ac deinde converſo motu ſurſum per eãdem ſuperficiem vel aliam ſimilem ſimiliterque poſitam feratur, æqualibus temporibus per idem ſpatium deſcendet atque aſcendet [2]).

[Fig. 32.]



Velut ſi per ſuperficiem AB deſcendat mobile [Fig. 32], atque ubi ad B pervenerit, converſo motu ſurſum per eandem AB, vel ei ſimilem & reſpectu plani horizontalis ſimiliter poſitam BC, aſcendat, conſtat ex ante demonſtratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem. Cum autem perpetuo, in punctis quorum eadem altitudo, eandem velocitatem habeat aſcendendo ac deſcendendo*; apparet eandem lineam bis * Prop.præced. eadem velocitate ſingulis ſui partibus percurri: unde & tempora utriusque motus æqualia eſſe neceſſe eſt; quod erat demonſtrandum.

---

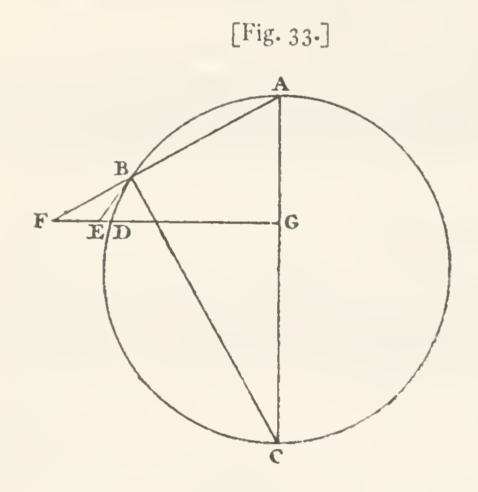
[2]) Comparez le § 10 à la p. 135 du T. XVII.

De la chute des corps graves.

PROPOSITION XII[1]).

Considérons un cercle ABC [Fig. 33] *de diamètre* AC, *auquel la droite* FG *est perpendiculaire. Supposons que cette dernière soit coupée en dehors du cercle par* AF *émanant de l'extrémité* A *du diamètre et coupant nécessairement la circonférence, par exemple en* B. *Je dis que l'arc* BD, *intercepté par les lignes* GF *et* AF, *est inférieur à la droite* DF.

[Fig. 33.]



Joignons en effet les points B et C par une droite et tirons du point B une tangente BE à la circonférence, laquelle rencontrera nécessairement la droite FG entre F et D. L'angle BAC intérieur au cercle est donc égal à l'angle EBC [2]). Par conséquent aussi l'angle FBE qui forme avec EBC l'angle droit FBC sera égal à BCA. Or, comme les triangles ABC et AGF sont semblables, l'angle F lui aussi sera égal à l'angle ACB. Le même angle F est donc égal à l'angle FBE. Par conséquent le triangle FEB est isoscèle, ayant les côtés égaux FE et EB. En ajoutant à chacun d'eux la droite ED, on aura donc l'égalité FD = BE + ED. Or, il est certain que l'ensemble de ces deux dernières droites est plus grand que l'arc BD ayant les mêmes extrémités et concave dans le même sens. Par conséquent FD sera aussi plus grand que le même arc BD. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XIII[1]).

Si, dans les mêmes hypothèses, la droite AB *coupe* DG *à l'intérieur du cercle* [Fig. 34], *je dis que l'arc* BD, *intercepté entre les droites* GD *et* AB, *est plus grand que la droite* DF.

En effet, joignons par une droite les points D et C et traçons la corde correspondant à l'arc DB. Comme l'angle ABD est alors égal à ACD, c.à.d. à l'angle ADG, et que l'angle DFB est plus grand que l'angle ADF ou ADG, le même angle DFB sera plus grand que DBF. Par conséquent dans le triangle DFB le côté DB est plus grand que le côté DF. A-fortiori l'arc DB sera plus grand que la même droite DF. La proposition est donc démontrée.

[1]) Comparez sur les Prop. XII, XIII et XV la note 13 de la p. 121 du T. XVII.

PROPOSITIO XII[1]). (p. 37).

De descensu gravium.

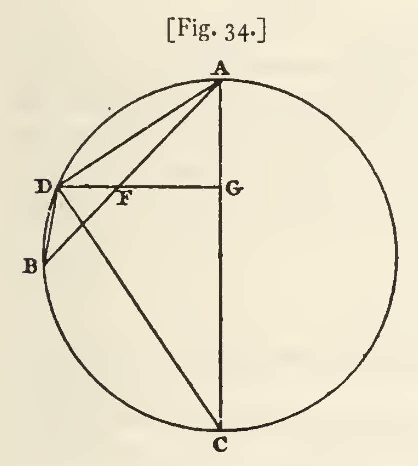
Esto circulus ABC [Fig. 33], *diametro* AC, *cui ad angulos rectos sit* FG; *huic vero occurrat à termino diametri* A *educta* AF *extra circulum, quæ quidem necessario secabit circumferentiam, puta in* B. *Dico arcum* BD, *lineis* GF, AF *interceptum, minorem esse recta* DF.

Jungatur enim BC, & ducatur ex B puncto tangens circumferentiam recta BE, quæ necessario occurret rectæ FG inter F & D. Est igitur angulus BAC in circulo æqualis angulo EBC*. quare & angulus FBE, qui una cum EBC constituit angulum rectum FBC, erit æqualis BCA. Quia autem similia sunt triangula ABC, AGF, erit & angulus F æqualis angulo ACB. Ergo idem angulus F æqualis angulo FBE. Itaque isosceles est triangulus FEB, habens crura æqualia FE, EB. Addita ergo utrique eorum recta ED, fiet FD, æqualis duabus BE, ED. Hasce vero duas majores esse constat arcu BD, iisdem terminis intercepto, & in eandem partem cavo. Ergo & FD eodem arcu BD major erit: quare constat propositum. [* Prop. 32. Lib. 3. Eucl.]

PROPOSITIO XIII[1]).

Iisdem positis, si recta AB *occurrat ipsi* DG *intra circulum* [Fig. 34]; *Dico arcum* BD, *rectis* GD, AB *interceptum, majorem esse recta* DF.

[Fig. 34.]



Jungatur enim DC & ducatur arcui DB subtensa DB. Quoniam ergo angulus ABD æqualis ACD, hoc est, angulo ADG; angulus autem DFB major angulo ADF, sive ADG; erit | idem DFB etiam (p. 38). major DBF. Ergo in triangulo DFB latus DB majus latere DF; unde multo magis arcus DB superabit eandem DF. Quare constat propositum.

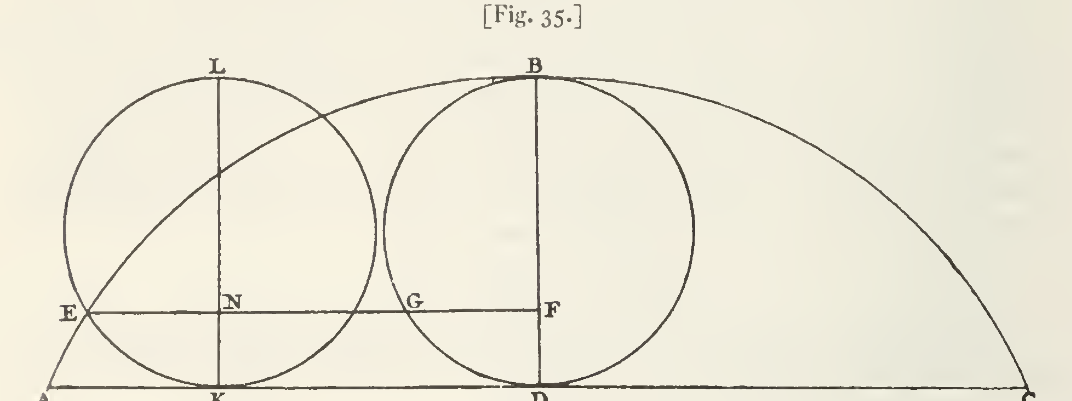
[2]) 's Gravesande annote en marge que c'est là la „Prop. 32 du livre 3 d'Euclide", ce qui était sans doute l'intention de Huygens, puisque l'astérisque de renvoi se trouve dans le texte de l'édition originale.

De la chute des corps graves.

PROPOSITION XIV.

Soit ABC *une cycloïde* [Fig. 35], AC *ſa baſe*, BD *ſon axe. Je penſe qu'on voit avec évidence comment cette ligne eſt engendrée ſuivant ce qui a été expoſé plus haut ſur ſa définition et ſa deſcription mécanique* [1]). *Soit de plus* BGD *un cercle ſymétrique par rapport à l'axe* BD. *Traçons* EF *parallèlement à la baſe* AC *par un point* E *arbitrairement choiſi ſur la cycloïde, laquelle parallèle coupe l'axe* BD *en* F *et la circonférence* BGD *en* G. *Je dis que la droite* GE *eſt égale à l'arc* GB [2]).

[Fig. 35.]



En effet, ſoit décrite par le point E une circonférence de cercle LEK égale à BGD et touchant la baſe de la cycloïde en K. Menons auſſi le diamètre KL. La droite AK eſt donc égale à l'arc EK. Mais la longueur entière AD eſt égale à la demi-circonférence KEL; par conſéquent KD eſt égale à l'arc EL ou GB. Or, KD ou NF eſt égale à EG, puiſque EN = GF et que la partie NG leur eſt commune. Il eſt donc prouvé qu'on a auſſi : GE = arc GB.

PROPOSITION XV.

Un point ſur une cycloïde étant donné, mener par lui une tangente à la cycloïde [3]).

Soit ABC [Fig. 36] la cycloïde et B le point donné ſur lui par lequel il faut mener la tangente.

Conſtruiſons autour de l'axe AD de la cycloïde le cercle générateur AED et menons BE parallèlement à la baſe de la cycloïde, laquelle parallèle coupe la circonférence du cercle nommé en E. Joignons les points A et E par une droite et tirons enfin par B une parallèle HBN à cette dernière. Je dis que cette parallèle touche la cycloïde en B.

En effet, prenons ſur la parallèle un point H quelconque différent de B, d'abord

[1]) Voir les p. 102—105 qui précédent.

PROPOSITIO XIV.

De descensu gravium.

Sit cyclois ABC [Fig. 35] *cujus basis* AC *axis* BD. *Quomodo autem generetur ex definitione & descriptione mechanica superius traditis satis manifestum arbitror* [1]). *Et circa axem* BD, *circulus descriptus sit* BGD, *& à quolibet puncto* E *in cycloide sumpto agatur* EF *basi* AC *parallela*, *quæ occurrat axi* BD *in* F, *secetque circumferentiam* BGD *in* G, *Dico rectam* GE *arcui* GB *æqualem esse* [2]).

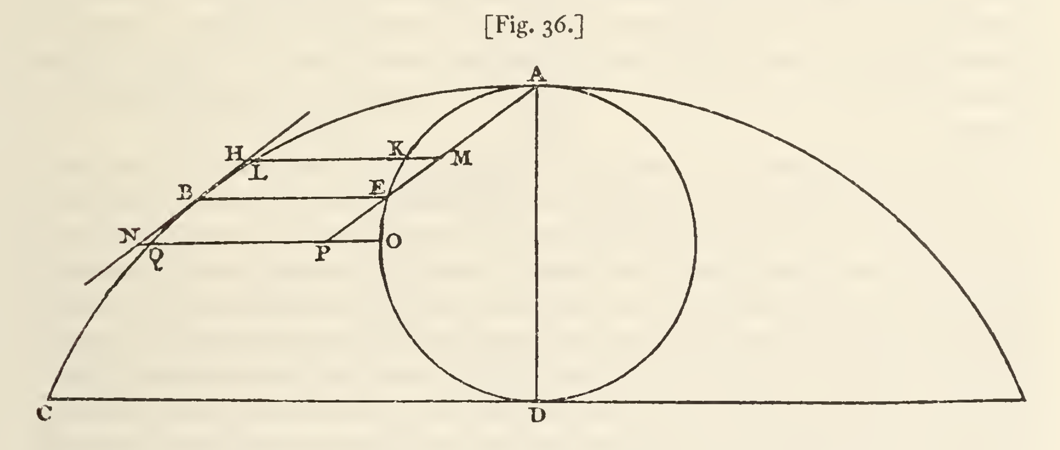
Describatur enim per E punctum circulus LEK ipsi BGD æqualis, quique tangat basin cycloidis in K, & ducatur diameter KL. Est igitur recta AK arcui EK æqualis; sed tota AD æqualis semicircumferentiæ KEL; ergo KD æqualis arcui EL sive GB. Est autem KD sive NF æqualis EG, quoniam EN æqualis GF, & communis utrique NG. Ergo constat & GE æqualem esse arcui GB.

PROPOSITIO XV.

(*p.* 39).

Dato in Cycloide puncto, *rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat* [3]).

[Fig. 36.]



Sit cyclois ABC [Fig. 36], & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat.

Circa axem cycloidis AD describatur circulus genitor AED, & ducatur BE parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur AE, cui denique parallela per B agatur HBN. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac primo versus superiora

[2]) Huygens avait trouvé cette Proposition en 1658; voir la p. 347 du T. XIV.
[3]) Comparez le Théorème de la p. 375 du T. XIV. Voir aussi la note 1 de la p. 150 qui précède.

De la chute des corps graves.

vers le haut, et menons par H une droite parallèle à la baſe de la cycloïde, coupant celle-ci en L, la circonférence AED en K et la droite AE en M. Comme KL eſt alors égale à l'arc KA et que la droite KM eſt plus petite que l'arc KE, la droite ML ſera inférieure à l'arc AE, c.à.d. à la droite EB ou MH; d'où il apparaît que le point H eſt ſitué en dehors de la cycloïde.

Prenons en ſecond lieu ſur la droite HN un point N ſitué au-deſſous de B et menons, comme plus haut, par N une droite parallèle à la baſe, coupant la cycloïde en Q, la circonférence AED en O, et le prolongement de la droite AE en P. Comme OQ eſt alors égale à l'arc OA et que OP eſt plus grande que l'arc OE, PQ ſera inférieure à l'arc EA, c.à.d. à la droite EB ou PN. D'où il apparaît de nouveau que le point N ſe trouve en dehors de la cycloïde. Puiſque tous les points pris ſur la droite HBN, excepté B, ſont donc ſitués en dehors de la cycloïde, il eſt établi que cette droite touche la cycloïde en B. C. Q. F. D.

J'ai douté ſi je laiſſerais cette place à cette démonſtration, puiſque je trouve qu'une preuve preſque ſemblable de Mons. Wren a été publiée dans le livre de Wallis ſur la Cycloïde [1]). Mais on peut également appliquer à cette propoſition une méthode générale qui ne convient pas ſeulement cycloïde mais auſſi aux autre lignes courbes engendrées par la rotation d'une figure quelconque, pourvu que ce ſoit une figure ayant ſa concavité d'un même côté et qui appartienne au genre des courbes dites géométriques.

En effet, conſidérons une courbe NAB [Fig. 37] [2]) provenant de la rotation de la figure OL ſur la règle LD, c.à.d. une courbe décrite par le point N pris ſur le contour de la figure OL, et qu'il s'agiſſe de mener une tangente en A qui eſt un point de la courbe. Menons une droite CA du point C où la figure touchait la règle lorſque le point qui décrit la figure était en A. Ce point de contact peut toujours être trouvé, puiſque le problème ſe réduit à tirer deux lignes parallèles entre elles dont l'une paſſe par le point donné du contour qui décrit la figure tandis que l'autre touche la figure, la diſtance des deux parallèles étant égale à celle du point donné A à la règle LD. Je dis que CA rencontre la courbe à angles droits, en d'autres termes que la circonférence de cercle MAF décrite du centre C avec le rayon CA touche la courbe au point A, de ſorte qu'une droite perpendiculaire à AC et paſſant par le point A touchera la courbe en ce point.

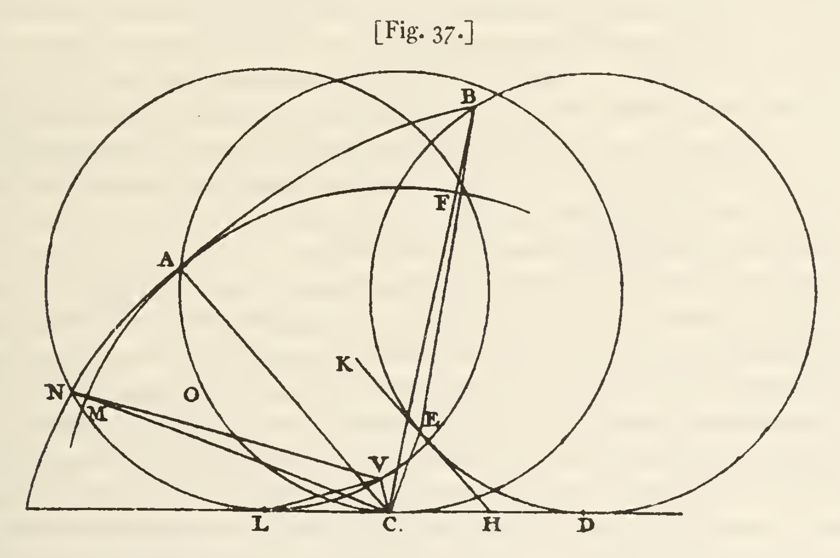
[1]) P. 71 („De rectâ Tangente Cycloidem primariam") de Joh. Wallisii „Tractatus Duo, Prior de Cycloïde et corporibus inde genitis. Posterior, Epistolaris, In qua agitur de Cissoide et Corporibus inde genitis, et de Curvarum tum Linearum Εὐθύνσει, tum Superficierum Πλατυσμῷ", Oxoniæ, Typ. Ac. Lichfieldianis, MDCLIX.

[2]) Comparez la note 2 de la p. 389 qui suit (Appendice à la Pars Secunda). Nous avons déjà dit dans l'Avertissement (p. 52) que Huygens développe ici une idée qu'il emprunte à Descartes et van Schooten.

velut H, & per H ducatur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L, circulo AED in K, rectæ AE in M. Quia ergo KL est æqualis arcui KA, recta autem KM minor arcu KE, erit recta ML minor arcu AE, hoc est, rectâ EB, sive MH; unde apparet punctum H esse extra cycloidem. De descensu gravium.

Deinde in recta HN sumatur punctum N inferius B, & per N agatur, ut ante, basi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q, circulo AED in O, rectæ AE productæ in P. Quia ergo OQ, æqualis est arcui OA; OP autem major arcu OE; erit PQ minor arcu

[Fig. 37.]



EA, hoc est, rectâ EB, sive PN. Unde apparet rursus punctum N esse extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B, in recta HBN sumptum, sit extra cycloidem, constat illam in puncto B cycloidem contingere; quod erat demonstrandum.

Huic demonstrationi an locum suum hic relinquerem dubitavi, quod non multum ei absimilem à clarissimo Wrennio editam inveniam in libro Wallisii de Cycloide. Potest autem & universali constructione propositum absolvi [1]), quæ non cycloide tantum sed & aliis curvis, ex cujuslibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat; dummodo sit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

Sit enim curva NAB [Fig. 37] [2]), orta ex circumvolutione figuræ OL super regula LD; describente nempe puncto N, in circumferentia figuræ OL sumpto. Et oporteat ad punctum curvæ A tangentem ducere. Ducatur recta CA à puncto C, ubi figura regulam tangebat cum punctum describens esset in A: quod punctum contactus semper inveniri potest, siquidem eo reducitur problema ut duæ rectæ inter se parallelæ ducendæ sint, quarum altera transeat per punctum describens in figuræ ambitu datum, altera figuram tangat, quæque inter se distent quantum distat punctum datum A ab regula LD: dico ipsam CA occurrere curvæ ad angulos rectos, sive circumferentiam MAF descriptam centro C radio CA, tangere curvam in puncto A, unde perpendicularis ad AC, per punctum A, ducta curvam ibidem continget. (p. 40).

DE LA CHUTE DES CORPS GRAVES.

En effet, tirons d'abord CB à un point B de la courbe plus diſtant de la règle LD que le point A, et conſidérons la poſition BED de la figure au moment où le point décrivant eſt en B, D étant alors le point de contact de la figure avec la règle. Suppoſons maintenant élevé juſqu'en E le point de la courbe qui était en C au moment où le point décrivant était en A. Menons les droites EC et EB et ſoit KH, coupant la règle en H, une tangente à la figure donnée en E.

Comme la droite CD eſt alors égale à la courbe ED et que la ſomme des longueurs EH et HD eſt plus grande que cette courbe, EH ſera plus grande que CH. D'où $\angle$ECH > $\angle$CEH et par conſéquent $\angle$ECL > $\angle$CEK. Mais en ajoutant $\angle$KEB égal à $\angle$LCA à $\angle$KEC, on obtient $\angle$CEB; et en ſouſtrayant de $\angle$ECL l'angle LCB, on obtient $\angle$ECB. L'angle CEB eſt donc certainement ſupérieur à l'angle ECB. Par conſéquent dans le triangle CEB le côté CB ſera plus grand que KB. Mais il eſt clair que EB = CA, puiſque c'eſt la même longueur tranſportée avec la figure. Donc CB ſera auſſi plus grande que CA, c.à.d. que CF. D'où il appert que le point B eſt en dehors de la circonférence de cercle MAF.

Conſidérons d'autre part un point N pris ſur la courbe entre la règle LD et le point A, et ſuppoſons que lorſque le point décrivant la courbe était en N, la ſituation de la figure était en VL et le point de contact en L. Suppoſons en outre élevé juſqu'en V le point qui touchait d'abord la règle en C, et tirons les droites CN, NV, VC et VL. On aura donc VN = CA, car CA a été tranſportée en VN. Or, comme la droite LC eſt égale à la courbe LV et par conſéquent plus grande que la droite LV, dans le triangle CLV l'angle LVC ſera plus grand que l'angle LCV. C'eſt pourquoi, ſi l'on ajoute encore $\angle$LVN à $\angle$LVC, l'angle total NVC ſera certainement plus grand que $\angle$LCV et a-fortiori que $\angle$NCV, qui eſt une partie de $\angle$LCV. Par conſéquent dans le triangle CVN le côté CN ſera plus grand que le côté VN égal à CA; partant CN ſera auſſi plus grand que CA, c.à.d. que CM. D'où il reſſort que le point N tombe en dehors du cercle MAF, lequel touchera donc la courbe au point A. C. Q. F. D.

Or, la conſtruction comme la démonſtration ſont les mêmes ſi la courbe eſt engendrée par un point décrivant ſe trouvant ſoit à l'intérieur ſoit à l'extérieur du contour de la figure roulante. Excepté que dans ce dernier cas une partie de la courbe deſcend ſous la règle, d'où réſulte une modification de la démonſtration.

En effet, ſoit donné le point A, par lequel la tangente doit être menée, ſur une partie NAB de la courbe ſituée au-deſſous de la règle CL [Fig. 38] [1]) laquelle courbe eſt décrite par le point N pris en dehors de la figure roulante mais occupant une poſition bien déterminée dans ſon plan. Après avoir trouvé le point C où la figure roulante touche la règle CD lorſque le point décrivant eſt en A, menons la droite CA. Je dis que celle-ci rencontre la courbe NAB à angles droits, en d'autres termes que la circonférence décrite du centre C avec le rayon CA touche la courbe NAB au point A. Or, nous démontrerons qu'elle la touche extérieurement tandis que dans la partie de la courbe ſituée au-deſſus de la règle CD elle la touche intérieurement.

En effet, toutes choſes étant poſées et décrites comme plus haut, nous démontrons

Ducatur enim CB primum ad punctum curvæ B, quod distet ultra punctum A ab regula LD, intelligaturque figuræ positus in BED, cum punctum describens esset in B, contactus regulæ in D. & punctum curvæ quod erat in C, cum punctum describens esset in A, hic jam sublatum sit in E; & jungantur EC, EB, tangatque figuram in E recta KH, occurrens regulæ in H. De descensu gravium.

Quia ergo recta CD æqualis est curvæ ED; eâdem vero curva major est utraque simul EH, HD; erit EH major quam CH. Unde angulus ECH major quam CEH, & proinde ECL minor quam CEK. Atqui addendo angulum KEB, qui æqualis est LCA, ad KEC, fit angulus CEB: & auferendo ab ECL angulum LCB, fit ECB. Ergo angulus CEB major omnino angulo ECB. Itaque in triangulo CEB, latus CB majus erit quam EB. sed EB æquale patet esse CA, cum sit idemmet ipsum unà cum figura transposi|tum. Ergo CB etiam major quam CA, hoc est, quam CF. unde con- (p. 41). stat punctum B esse extra circumferentiam MAF.

Sit rursus punctum N in curva sumptum inter regulam LD & punctum A. Cumque punctum describens esset in N, ponatur situs figuræ fuisse in VL, punctumque contactus L, punctum verò quod tangebat prius regulam in C, sit jam sublatum in V: & jungantur CN, NV, VC, VL. Erit ergo VN æqualis CA; imo erit ipsa CA translata in VN. Jam quia recta LC æquatur curvæ LV, ac proinde major est recta LV, erit in triangulo CLV angulus LVC major quam LCV. Quare addito insuper angulo LVN ad LVC, fiet totus NVC major utique quam LCV, ac proinde omnino major angulo NCV, qui pars est LCV. Ergo in triangulo CVN latus CN majus erit latere VN, cui æquatur CA, ideoque CN major quoque quam CA, hoc est quam CM. Unde apparet punctum N cadere extra circulum MAF, qui proinde tanget curvam in puncto A. quod erat demonstrandum.

Est autem eadem quoque tum constructio tum demonstratio, si curva genita sit à puncto describente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ sumpto. Nisi quod, hoc posteriori casu, pars quædam curvæ infra regulam descendit, unde nonnulla in demonstratione oritur diversitas.

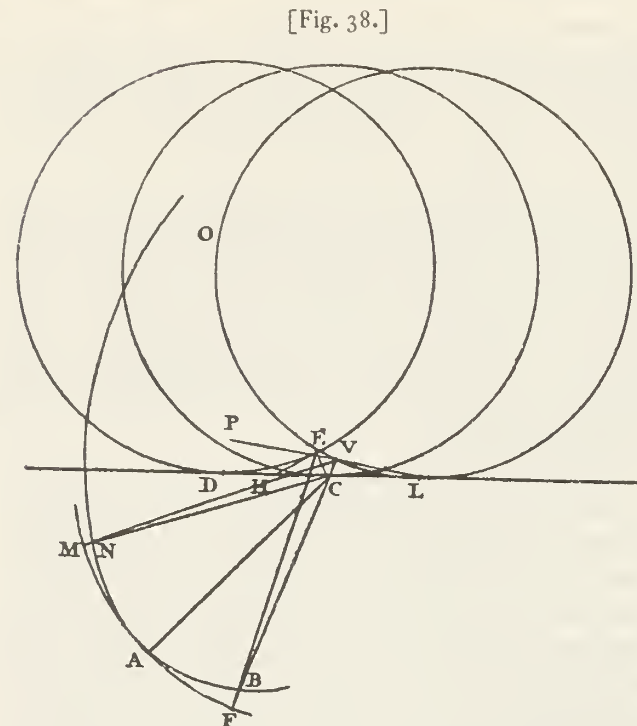
Sit enim punctum A, per quod tangens ducenda est, datum in parte curvæ NAB, quæ infra regulam CL descendit [Fig. 38][1]), descripta nimirum à puncto N extra figuram revolutam sumpto, sed certam|positionem in eodem ipsius plano habente. Invento (p. 42). igitur puncto C, ubi figura revoluta tangit regulam CD quum punctum describens esset in A, ducatur recta CA. Dico hanc curvæ NAB occurrere ad rectos angulos, sive circumferentiam radio CA centro C descriptam tangere curvam NAB in puncto A. Ostendetur autem exterius ipsam contingere, cum in curvæ parte supra regulam CD posita interius contingat.

Positis enim & descriptis iisdem omnibus quæ prius, ostenditur rursus angulus ECH

[1]) Voir la note 2 de la p. 154.

De la chute des corps graves.

[Fig. 38.]



de nouveau que ∠ ECH > ∠ CEH. Mais ſi à ∠ ECH on ajoute ∠ HCB on obtient ∠ ECB, et en retranchant ∠ HEB égal à ∠ DCA de ∠ CEH, on obtient ∠ CEB. Par conſéquent ∠ ECB eſt certainement ſupérieur à ∠ CEB. Par conſéquent dans le triangle ECB le côté EB eſt plus grand que CB. Mais CA ou CF eſt égale à EB. Par conſéquent on a auſſi CF, CB; le point F de la circonférence de cercle eſt donc à l'extérieur de la courbe NAB par rapport au centre.

On montre de nouveau comme précédemment que ∠ LVC > ∠ LCV. Par conſéquent ∠ CVP, ſupplément de ∠ LVC, ſera inférieur à ∠ VCD. Mais ſi l'on ajoute à ∠ VCD ∠ DCN, on obtient ∠ VCN; et ſi l'on retranche de ∠ CVP ∠ PVN, on obtient ∠ CVN. Par conſéquent l'angle VCN eſt certainement plus grand que l'angle CVN. Dans le triangle CVN le côté VN ſera donc plus grand que CN. Or, CA ou CM eſt égale à VN. Partant, CM auſſi ſera plus grande que CN; le point M de la circonférence de cercle ſera donc à une telle diſtance du centre C qu'il ſe trouvera à l'extérieur de la courbe NAB. Il eſt donc établi que la circonférence MAF touche la courbe au point A. C. Q. F. D.

Qui ſi le point de la courbe par lequel il faut mener la tangente eſt préciſément celui où la règle coupe la courbe, la tangente cherchée ſera toujours perpendiculaire à la règle, comme il ſerait facile de le démontrer.

PROPOSITION XVI.

Du mouvement cycloïdal.

Si deux droites parallèles AF *et* BG, *dont l'une et l'autre eſt ſituée du même côté du centre ou dont l'une* AF *paſſe par le centre lui-même, coupent une circonférence de cercle* [Fig. 39], *et qu'on mène en* A, *où la parallèle la plus proche du centre la coupe, une droite qui touche la circonférence, je dis que la partie* AB *de cette tangente qui eſt interceptée par les deux parallèles eſt inférieure à l'arc* AC *compris entre ces mêmes parallèles.*

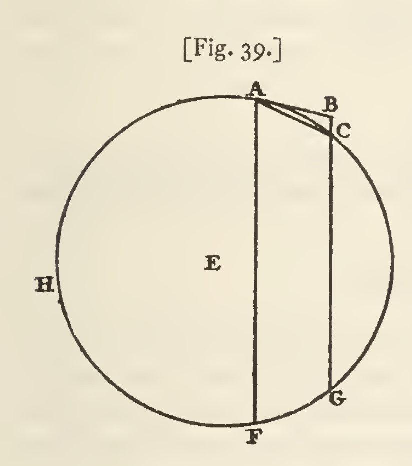
major quam CEH. atqui ad ECH addito HCB fit angulus ECB; & à CEH auferendo HEB, qui æqualis eſt DCA, fit angulus CEB. Ergo ECB major omnino quam CEB. unde in triangulo ECB latus EB majus quam CB. ſed ipſi EB æqualis eſt CA, ſive CF. Ergo & CF major quam CB: ideoque punctum circumferentiæ F eſt ultra curvam NAB à centro remotum. De descensu graviium.

Item rurſus oſtenditur angulus LVC major LCV. Quare CVP, qui cum LVC duos rectos æquat, minor erit quam VCD. Atqui addendo ad VCD angulum DCN, fit VCN; & auferendo ab CVP angulum PVN, fit CVN. Ergo angulus VCN omnino major quam CVN. In triangulo itaque CVN, latus VN majus erit quam CN. Eſt autem ipſi VN æqualis CA ſive CM. Ergo & CM major quam CN, ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam NAB à centro C remotum. Itaque conſtat circumferentiam MAF tangere cnrvam in puncto A. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi punctum curvæ per quod tangens ducenda eſt, ſit illud ipſum ubi regula curvam ſecat, erit tangens quæſita ſemper regulæ perpendicularis; ut facile eſſet oſtendere.

PROPOSITIO XVI.

[Fig. 39.]



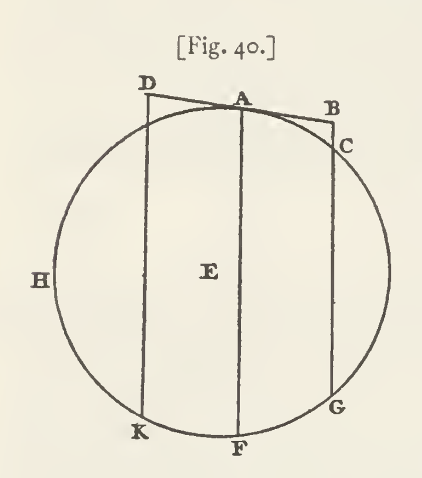
Si circuli circumferentiam, cujus centrum E, *ſecent rectæ duæ parallelæ* AF, BG, *quarum utraque ad eandem partem centri tranſeat, vel altera* AF *per centrum ipſum* [Fig. 39]*: & à puncto* A, *quo centro propior circumferentiam ſecat, ducatur recta ipſam contingens: dico partem hujus* AB, *à parallela utraque interceptam, minorem eſſe arcu* AC, *ab utraque eadem parallela intercepto.* De motu in Cycloide.

Du mouvement Cycloïdal.

En effet, tirons la corde correfpondant à l'arc AC. Comme l'angle BAF eft alors égal à celui que comprend la portion du cercle AHF, laquelle eft plus grande que le demi-cercle, à moins que ce ne foit le demi-cercle lui-même, l'angle BAF fera inférieur ou égal à un angle droit; par conféquent l'angle ABC eft fupérieur ou égal à un angle droit. Par conféquent dans le triangle ABC le côté AC oppofé à l'angle B fera plus grand que le côté AB. Mais le même côté AC eft inférieur à l'arc AC. Le côté AB lui auffi fera donc, a-fortiori, plus petit que l'arc AC.

PROPOSITION XVII.

[Fig. 40.]



Les mêmes chofes étant fuppofées, fi une troifième droite DK [Fig. 40] *parallèle aux précédentes coupe le cercle, parallèle dont la diftance à* AF *qui eft la plus proche du centre eft égale à celle de* AF *à l'autre parallèle* BG, *je dis que la partie de la tangente en* A *interceptée par la troifième parallèle et la moyenne, favoir* AD, *eft plus petite que l'arc* AC *compris entre les deux premières parallèles.*

Ceci eft évident puifque AD = AB, et que nous venons de démontrer que AB eft plus petite que l'arc AC.

PROPOSITION XVIII.

Lorfque deux droites parallèles AF *et* BG [Fig. 41] *coupent un cercle à centre* E *et que l'on mène du point* B *où celle qui eft la plus éloignée du centre (ou bien également éloignée du centre que l'autre) coupe la circonférence, une droite qui touche cette dernière, la partie* BA *de cette tangente, interceptée par les parallèles, fera plus grande que l'arc* BC *compris entre ces mêmes parallèles.*

En effet, menons au point C la tangente MCL à la circonférence, et puiffe-t-elle couper la tangente BA en L. Dans le triangle ACL, l'angle C eft égal à l'angle MCF, c.à.d. à l'angle compris dans la portion de cercle CBF. D'autre part l'angle A eft égal à celui qui comprend la portion BCG du cercle, et comme cette dernière eft plus grande que la portion CBF ou bien fon égale, attendu que BG eft fitué à plus grande, ou bien à égale, diftance du centre que CF, l'angle A du triangle ACL fera plus petit que l'angle C ou bien égal à lui, et par conféquent le côté CL plus petit que l'angle AL ou bien fon égal. Mais la fomme de CL et de LB eft plus grande que l'arc CB. Par conféquent la fomme de AL et de LB, c.à.d. la tangente AB, fera auffi plus grande que le même arc CB. C. Q. F. D.

Ducatur enim arcui AC ſubtenſa recta AC. Quia ergo angulus BAF eſt æqualis ei quem capit portio circuli AHF, quæ vel major eſt ſemicirculo vel ſemicirculus, erit proinde angulus BAF, | vel minor recto vel rectus; ideoque angulus ABC vel major recto vel rectus. Quare in triangulo ABC latus AC, angulo B ſubtenſum, majus erit latere AB. ſed idem latus AC minus eſt arcu AC. Ergo omnino & AB arcu AC minor erit. De motu in Cycloide. (p. 43).

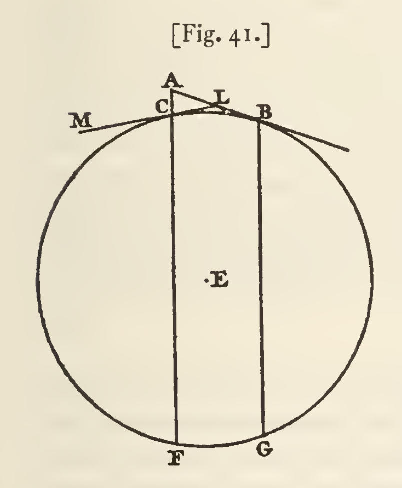
PROPOSITIO XVII.

Iisdem poſitis, ſi tertia recta prioribus parallela DK [Fig. 40], *circulum ſecuerit, quæ ab ea quæ centro propior eſt* AF, *tantundem diſtet quantum hæc à reliqua* BG: *dico partem tangentis in* A, *à parallela ultimo adjecta, & media interceptam, nempe* AD, *arcu* AC *à primis duabus parallelis intercepto minorem eſſe.*

Hoc enim patet quum AD ipſi AB æqualis ſit, quam antea oſtendimus arcu AC minorem eſſe.

PROPOSITIO XVIII.

[Fig. 41.]



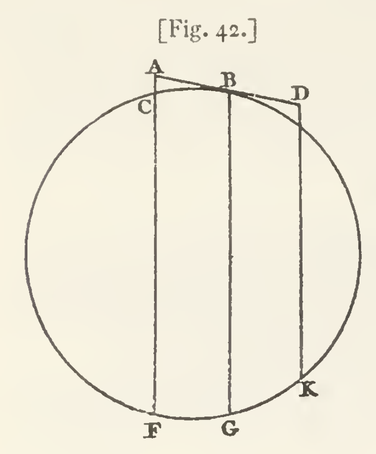
Si circulum, cujus centrum E, *duæ rectæ parallelæ ſecuerint* AF, BG [Fig. 41]; *& à puncto* B, *ubi quæ à centro remotior eſt, vel tantundem atque altera diſtat, circumferentiæ oc|currit, ducatur recta circumferentiam tangens: erit pars hujus* BA, *à parallelis intercepta, major arcu ab iiſdem parallelis intercepto* BC. (p. 44).

Ducatur enim in puncto C, recta MCL circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti BA in L. In triangulo igitur ACL, angulus C æqualis eſt angulo MCF, hoc eſt, ei quem capit portio circuli CBF. angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli BCG, quæ portio quum ſit major vel æqualis portioni CBF, quippe quum BG vel ulterius diſtet à centro quam CF, vel tantundem: erit proinde trianguli ACL angulus A minor vel æqualis angulo C: & conſequenter latus CL vel minus vel æquale lateri AL. Atqui CL una cum LB majores ſunt arcu CB. Ergo & AL una cum LB, hoc eſt, tangens AB, eodem arcu CB major erit. quod erat demonſtrandum.

DU MOUVEMENT CYCLOÏDAL.

PROPOSITION XIX.

[Fig. 42.]



Les mêmes chofes étant pofées, fi une troifième droite DK [Fig. 42] *parallèle aux précédentes coupe la circonférence, parallèle dont la diftance à celle qui eft la plus éloignée du centre eft égale à celle de cette dernière à celle qui refte, favoir* AF, *la partie de la tangente en* B *interceptée entre la parallèle moyenne et la troifième* DK, *c.à.d.* BD, *fera plus grande que l'arc* BC.

Ceci eft évident puifque BD eft égale à BA, dont nous avons démontré qu'elle eft plus grande que l'arc BC.

PROPOSITION XX.

Lorfqu'un arc de cercle AB [Fig.43] *inférieur à une demi-circonférence eft coupé en un nombre quelconque de parties par des lignes droites parallèles, équidiftantes tant entre elles qu'aux parallèles tirées par les extrémités de l'arc, telles que* CD, EF, GH, KL *etc. et qu'on mène à la première extrémité* A *de l'arc, ainfi qu'aux autres points de divifion, des tangentes à la circonférence, toutes vers le même côté, chacune jufqu'au point de rencontre avec la parallèle fuivante, comme les tangentes* AC, DE, FG, HK, *etc., je dis que la fomme de ces tangentes, diminuée de la première* AC, *eft moindre que l'arc donné* AB. *Mais que ces tangentes, fi l'on conferve* AC, *font enfemble plus grandes que l'arc* AB *diminué de la partie extrême* NB, *en d'autres termes que l'arc* AN.

En effet, fuppofons d'abord qu'il y ait des parallèles de part et d'autre du centre Z, et foit GH, parmi celles qui fe trouvent du côté B, la plus proche du centre par lequel elle peut même paffer. Par conféquent chacune des tangentes comprifes entre GH et BO, telles que HK, LM et NO, eft moindre que l'arc correfpondant *. Mais de plus la tangente GF eft inférieure à l'arc fuivant FD * et pareillement la tangente ED à l'atc DA. La fomme des tangentes comprifes entre BO et CD eft donc plus petite que celle des arcs BH et FA et a-fortiori que celle des arcs BH et HA, c. à. d. que l'arc BA. C. Q. F. D.

* Prop. 16 de cette Partie.

* Prop. 17 de cette Partie.

Nous démontrerons maintenant que la fomme des tangentes comprifes entre BO et A eft plus grande que l'arc AN. Car la parallèle GH paffera plus près du centre Z que la parallèle EF que je fuppofe être la plus proche de celles qui fe trouvent du côté A, ou bien elle en fera éloignée à plus grande diftance, ou bien à la même diftance.

Que fi EF eft à plus grande, ou à égale, diftance du centre que GH, la tangente

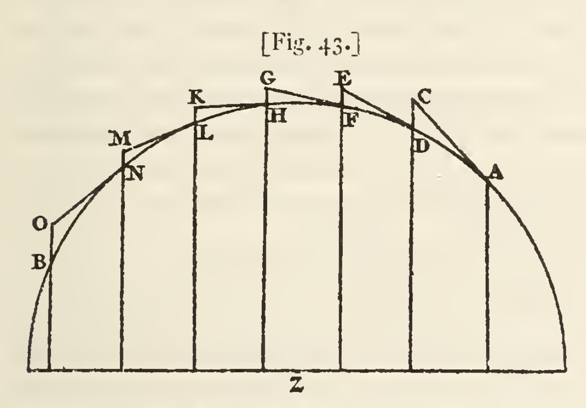
PROPOSITIO XIX.

Du motu in Cycloide.

Iisdem poſitis, ſi tertia recta prioribus parallela DK [Fig. 42] *circulum ſecet, quæ tantundem diſtet ab ea quæ remotior eſt à centro quantum hæc à reliqua* AF: *Erit pars tangentis in* B, | *à parallela media, & ultimo addita* DK, *intercepta*, *nimirum* BD, *major arcu* BC. (*p*. 45).

Hoc enim manifeſtum eſt cum BD fiat ipſi BA æqualis, quam oſtendimus arcu BC majorem eſſe.

PROPOSITIO XX.



Si arcus circuli, ſemicircumferentia minor, AB [Fig. 43], *in partes quotlibet ſecetur lineis rectis parallelis, quæ & inter ſe, & cum rectis ſibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla conſtituant, quales ſunt* CD, EF, GH, KL *&c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum* A, *& ad reliqua omnia ſectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquæque occurrat proximæ dictarum parallelarum; cujusmodi ſunt tangentes* AC, DE, FG, HK *&c. Dico has tangentes, dempta prima* AC, *ſimul ſumptas, minores eſſe arcu propoſito* AB. *Easdem vero omnes, non omiſſa* AC, *majores eſſe arcu* AB *diminuto parte extrema* NB, *hoc eſt, majores arcu* AN.

Ponamus enim primo parallelarum aliquas tranſire ab utraque parte centri Z, & ſit GH, earum quæ ſunt à parte B, centro proxima, vel per ipſum centrum tranſeat. Itaque tangentes omnes inter GH & BO comprehenſæ, ut HK, LM, NO, ſingulæ ſuis arcubus minores ſunt*. Porro autem & tangens GF, arcu ſequente FD minor eſt*, & ſimiliter tangens ED arcu DA. Itaque tangentes omnes inter BO & CD interjectæ, minores ſunt arcubus BH & FA, ac proinde omnino minores arcubus BH, HA, ſive arcu BA, quod erat primo oſtendendum.

* Prop. 16. huj.
* Prop. 17. huj.

Porro jam demonſtrabimus tangentes omnes inter BO & A majores eſſe arcu AN. Enimvero parallela GH, vel propius centrum Z tranſit quam parallela EF, quam pono proximam eſſe | earum quæ à parte A tranſeunt, vel erit remotior, vel æque diſtabit. (*p*. 46).

Quod ſi EF longius à centro vel æque remota eſt ac GH, erit tangens FG major

Du mouvement Cycloïdal.

FG fera fupérieure à fon arc FH, et chacune des autres tangentes fituées du côté A, favoir ED et CA, furpaffera l'arc correfpondant *; de forte que la fomme totale GF + ED + CA fera plus grande que l'arc HA. Mais de plus la tangente LM fera plus grande que l'arc HL *, et la tangente NO que l'arc LN; par conféquent la fomme des tangentes, avec l'exception de HK, fera plus grande que l'arc AN; à plus forte raifon, lorfque HK auffi vient s'y ajouter, la fomme des tangentes comprifes entre A et B fera-t-elle plus grande que ce même arc AN.

* Prop. 18 de cette Partie.

* Prop. 19 de cette Partie.

Mais fi GH eft plus éloignée du centre que EF, la tangente KH fera plus grande que l'arc HF *, la tangente ML comme ci-devant plus grande que l'arc LH, la tangente ON plus grande que l'arc NL, et par conféquent la fomme des tangentes ON, ML et KH plus grande que l'arc NF. D'autre part la tangente ED fera plus grande que fon arc FD * et de même la tangente CA que l'arc correfpondant DA. Par conféquent la fomme des tangentes comprifes entre BO et A, excepté GF, fera plus grande que l'arc NA; et a-fortiori la fomme des mêmes tangentes, GF comprife, c.à.d. celle de toutes les tangentes fituées entre BO et A, furpaffera le même arc NA.

* Prop. 19 de cette Partie.

* Prop. 18 de cette Partie.

Par ces confidérations la démonftration eft encore manifefte dans les autres cas, quelqu'arc de la demi-circonférence qu'on prenne; elle eft ou entièrement la même ou bien une partie feulement de la démonftration précédente.

PROPOSITION XXI.

Lorfqu'un mobile defcend d'un mouvement continu le long de certains plans inclinés contigus quelconques, et qu'une autre fois il defcend de la même hauteur par un même nombre de plans contigus, ainfi conftruits que chacun d'eux correfpond en hauteur à un des plans précédents, mais que le deuxième plan a toujours une plus grande inclinaifon que le premier; je dis que le temps de la defcente le long des plans moins inclinés eft plus bref que celui de la defcente par les plans plus inclinés.

Soient les deux féries de plans comprifes entre les mêmes parallèles horizontales ABCDE et FGHKL [Fig. 44], et fuppofons que deux plans correfpondants l'un de la première, l'autre de la deuxième férie, foient toujours renfermés entre les mêmes parallèles horizontales; fuppofons en outre que chaque plan de la férie FGHKL [1]) foit plus incliné par rapport à l'horizon que le plan correfpondant de même hauteur de la férie ABCDE. Je dis que la chute le long de ABCDE fe fera en un temps plus court que celle le long de FGHKL.

En effet, il eft d'abord manifefte que le temps de la defcente par AB eft plus court que celui de la defcente par FG, puifque le rapport de ces temps eft égal à celui des droites AB et FG * et que AB < FG, à caufe de fon inclinaifon moins forte. Prolon-

* Prop. 7. de cette Partie.

[1]) L'édition originale a FGHKH (faute d'impression).

De motu in Cycloide.

arcu suo FH, & reliquæ tangentes versus A, nimirum ED, CA majores singulæ arcubus suis*; adeo ut omnes simul GF, ED, CA majores sint arcu HA. sed & arcu HL major erit tangens LM*, & arcu LN tangens NO, itaque tangentes omnes, præter HK, majores simul erunt arcu AN; multoque magis, accedente ipsa HK, tangentes omnes inter A & B comprehensæ arcu eodem AN majores erunt. * Prop. 18. huj. * Prop. 19. huj.

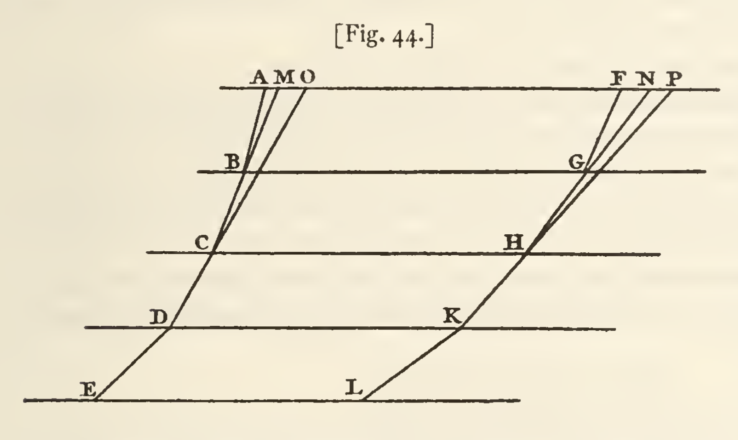
Si vero GH à centro longius distat quam EF, erit tangens KH major arcu HF*, & tangens ML ut ante major arcu LH, & tangens ON major arcu NL, & omnes proinde tangentes ON, ML, KH majores arcu NF. Sed & tangens ED major est arcu suo FD*, & tangens CA major similiter arcu suo DA. Itaque tangentes omnes inter BO & A, præter GF, majores erunt arcu NA; multoque magis tangentes eædem, accedente GF, hoc est, omnes quæ inter BO & A interjiciuntur, eodem arcu NA majores erunt. * Prop. 19. huj. * Prop. 18. huj.

Ex his vero etiam demonstratio manifesta est in casibus aliis, qualiscunque semicircumferentiæ arcus accipiatur, quippe cum vel eadem sit ubique, vel pars tantum præcedentis demonstrationis.

PROPOSITIO XXI.

Si mobile descendat continuato motu per quælibet plana inclinata contigua, ac rursus ex pari altitudine descendat per plana totidem contigua, ita comparata ut singula altitudine respondeant singulis priorum planorum, sed majori quam illa sint inclinatione. Dico tempus descensus per minus inclinata, brevius esse tempore descensus per magis inclinata.

[Fig. 44.]



Sint series duæ planorum inter easdem parallelas horizontales comprehensæ ABCDE, FGHKL [Fig. 44], atque ita ut bina quæque sibi correspondentia plana utriusque seriei iisdem parallelis horizontalibus includantur; unumquodque vero seriei FGHKL [1]) magis inclinatum sit ad horizontem quam planum sibi altitudine respondens seriei ABCDE. Dico breviori tempore absolvi descensum per ABCDE, quam per FGHKL.

Nam primo quidem tempus descensus per AB, brevius esse constat tempore descensus per FG, quum sit eadem ratio horum temporum quæ rectarum AB ad FG*, sitque AB minor quam FG, propter minorem inclinationem. Producantur jam sursum rectæ (p. 47). * Prop. 7. huj.

Du mouvement Cycloïdal.

geons maintenant vers le haut les droites CB et HG et puiſſent-elles couper l'horizontale AF en M et N. Par conſéquent le temps néceſſaire pour parcourir BC après AB eſt égal à celui du temps néceſſaire pour parcourir la même longueur BC après MB, puiſqu'au point B le corps a une même viteſſe, qu'il ſoit deſcendu par AB ou par MB *. De la même manière le temps par GH après FG ſera égal au temps correſpondant à la même longueur GH après NG. Or, le temps par BC après MB eſt au temps par GH après NG, comme ſont entre elles les longueurs BC et GH ou CM et HN, vu que c'eſt là la valeur du rapport des temps correſpondant tant aux longueurs totales MC et NH qu'aux parties MB et NG *, donc auſſi celui des différences des temps. Or, BC eſt plus petite que GH à cauſe de ſon inclinaiſon moindre. Il eſt donc évident que le temps par BC après MB ou après AB eſt plus court que le temps par GH après NG ou après FG.

* Prop. 6. de cette Partie.

* Prop. 7. de cette Partie.

On démontrera de la même manière, en prolongeant DC et KH vers le haut, juſqu'à ce qu'elles rencontrent l'horizontale AF en O et en P, que le temps par CD après ABC ou après OC eſt plus court que le temps par HK après FGH ou après PH. Et enfin que le temps par DE après ABCD eſt plus court que le temps par KL après FGHK. C'eſt pourquoi le temps de la deſcente totale par ABCDE ſera plus court que le temps par FGHKL. C. Q. F. D.

Or, il eſt manifeſte par là, ſi l'on conſidère les lignes courbes comme compoſées d'une infinité de lignes droites, que lorſqu'on a affaire à deux ſurfaces inclinées ſuivant des lignes courbées de la même hauteur et dont l'inclinaiſon de l'une ſurpaſſe toujours celle de l'autre en des points quelconques de même hauteur, le corps deſcendra alors auſſi en un temps plus court le long de la ſurface moins inclinée que le long de la plus inclinée.

Suppoſons par exemple que les deux ſurfaces [Fig. 45] ſoient inclinées ſuivant les courbes AB et CD de même hauteur et pour leſquelles, lorſqu'on prend des points quelconques E, F de même hauteur, l'inclinaiſon de CD ſurpaſſe celle de AB, en d'autres termes que la tangente à la courbe CD en F ſoit plus inclinée par rapport à l'horizon que la tangente en E à la courbe AB: le temps de la chute par AB ſera plus court que celui de la chute par CD.

Et la même choſe aura lieu lorſque l'une des lignes eſt droite, pourvu que l'inclinaiſon partout égale de la droite ſoit plus grande ou plus petite que celle de la courbe en chacun de ſes points.

PROPOSITION XXII.

Si l'on conſidère dans une cycloïde à axe vertical, ayant ſon ſommet en bas, deux parties de même hauteur de la courbe, mais dont l'une eſt plus proche du ſommet, le temps de deſcente par la partie ſupérieure ſera plus petite que celui de la deſcente par la partie inférieure.

Soit AB [Fig. 46] la cycloïde à axe vertical AC dont le ſommet A ſe trouve en bas.

CB, HG, occurrantque horizontali AF in M & N. Itaque tempus per BC poſt AB, æquale eſt tempori per eandem BC poſt MB, cum in puncto B eadem celeritas contingat, ſive per AB, ſive per MB deſcendenti *. ſimiliterque tempus per GH poſt FG, æquale erit tempori per eandem GH poſt NG. Eſt autem tempus per BC poſt MB ad tempus per GH poſt NG, ut BC ad GH longitudine, ſive ut CM ad HN, cum hanc rationem habeant & tempora per totas MC, NH, & per partes MB, NG*, ideoque etiam tempora reliqua. Eſtque BC, minor quam GH propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per BC poſt MB ſive poſt AB, brevius eſſe tempore per GH poſt NG ſive poſt FG.

De motu in Cycloide.

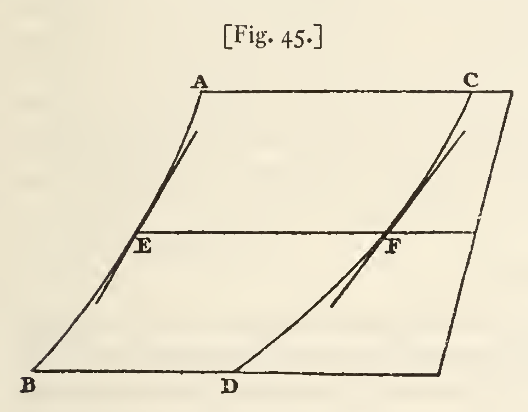
* Prop. 6. huj.

* Prop. 7. huj.

Similiter oſtendetur, productis DC, KH ſurſum, donec occurrant horizontali AF in O & P, tempus per CD poſt ABC, ſive poſt OC, brevius eſſe tempore per HK poſt FGH ſive poſt PH. Ac denique tempus per DE poſt ABCD, brevius eſſe tempore per KL poſt FGHK. Quare totum tempus deſcenſus per ABCDE, brevius erit tempore per FGHKL. quod erat demonſtrandum.

Hinc vero manifeſtum eſt, conſiderando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compoſitas, ſi fuerint duæ ſuperficies, ſecundum lineas curvas ejuſdem altitudinis inclinatæ, quarum in punctis quibuſlibet æque altis major ſemper ſit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore breviori per minus inclinatam grave deſcenſurum quam per magis inclinatam.

[Fig. 45.]



Velut ſi ſint duæ ſuperficies [Fig. 45] inclinatæ ſecundum curvas AB, CD, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuſlibet E, F, major ſit inclinatio ipſius CD quam AB, hoc eſt, ut | recta tangens curvam CD in F, magis inclinata ſit ad horizontem, quam quæ curvam AB tangit in puncto E. erit tempus deſcenſus per AB brevius quam per CD. (p. 48).

Idemque continget ſi altera linearum recta fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique eſt eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet ſui puncto.

PROPOSITIO XXII.

Si in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus ſtat, vertice deorſum ſpectante, duæ portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, ſed quarum altera propior ſit vertici; erit tempus deſcenſus per ſuperiorem, brevius tempore per inferiorem.

Sit Cyclois AB [Fig 46], cujus axis AC ad perpendiculum erectus, vertex A deor-

Du mouvement Cycloïdal.

Prenons dans elle les parties BD et EF de même hauteur, c.à.d. telles que les parallèles horizontales BC et DH, comprenant entre elles la partie ſupérieure BD, ſoient à égale diſtance l'une de l'autre que EG et FK qui comprennent entre elles la partie inférieure EF. Je dis que le temps de la deſcente par la courbe BD ſera plus court que celui de la deſcente par EF.

En effet, prenons ſur BD le point quelconque L et ſur EF le point M de telle manière que la hauteur de E au-deſſus de M ſoit la même que celle de B au-deſſus de L. Puiſſent les horizontales LN et MO rencontrer en N et en O la demi-circonférence décrite ſur l'axe AC; tirons encore les droites NA et OA. Comme le point N eſt plus élevé que le point O, il eſt donc manifeſte que la droite NA poſſède par rapport à l'horizon une moindre inclinaiſon que la droite OA. Or, la tangente à la courbe au point L eſt parallèle à NA*, et celle en M eſt parallèle à OA. Par conſéquent la courbe BD eſt moins inclinée au point L que la courbe EF au point M. Si l'on ſuppoſe donc la partie EF, ſans que ſon inclinaiſon ſoit changée, élevée plus haut, par exemple en *ef*, de ſorte qu'elle ſoit compriſe entre les mêmes parallèles que la portion BD, le point M ſera trouvé en *m* à la même hauteur que le point L. Dans ce cas l'inclinaiſon de la courbe *ef* au point *m*, qui eſt égale à celle de la courbe EF en M, ſera donc plus grande que celle de la courbe BD en L. Semblablement, dans le cas de n'importe quel autre point de la courbe *ef*, on démontrera que ſon inclinaiſon eſt plus grande que celle de la courbe BD en un point de même hauteur. Le temps de la deſcente par BD ſera donc plus court que celui de la deſcente par *ef**, ou bien, ce qui eſt la même choſe, par EF. C. Q. F. D.

* Prop. 15. de cette Partie.

* Prop. précéd.

LEMME.

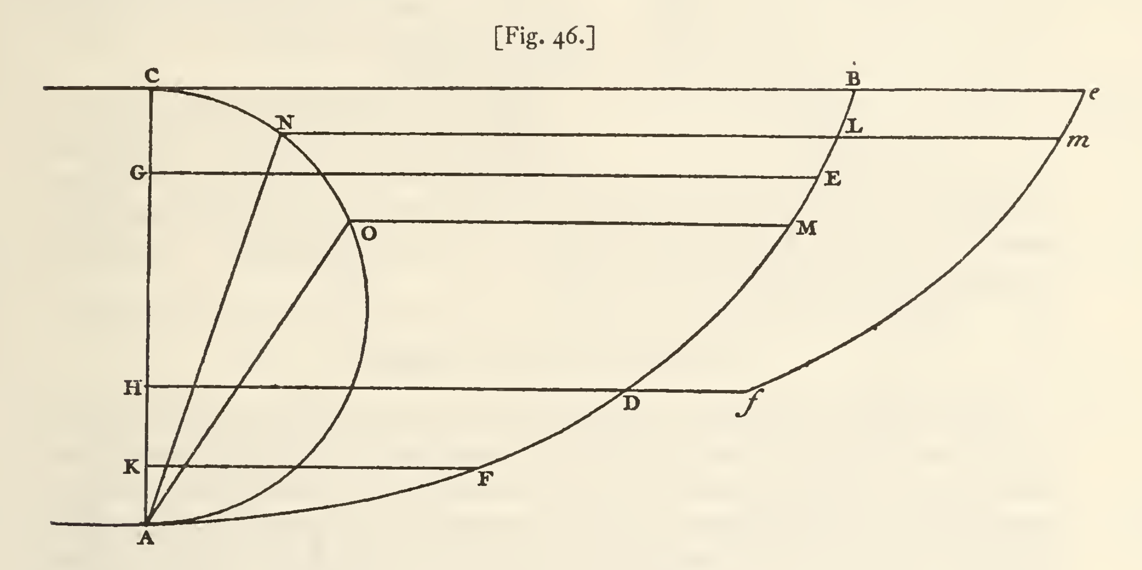
Soit un cercle de diamètre AC [Fig. 47] *que* DE *coupe à angles droits, et puiſſe une droite* AB *partant de l'extrémité* A *du diamètre couper la circonférence en* B *et* DE *en* F. *Je dis que les trois grandeurs* AB, AD *et* AF *ſont proportionnelles entre elles.*

Suppoſons d'abord que le point d'interſection F ſoit ſitué au dedans du cercle, et

ſum ſpectet; & accipiantur in ea portiones BD & EF, æqualis altitudinis, hoc eſt, ejuſmodi ut parallelæ horizontales BC, DH, quæ ſuperiorem portionem BD includunt, æque inter | ſe diſtent ac EG, FK, inferiorem portionem EF includentes. Dico tempus deſcenſus per curvan BD brevius fore tempore per EF. DE MOTU IN CYCLOIDE. (p. 49).

Sumatur enim in BD punctum quodlibet L, & in EF punctum M, ita ut eadem ſit altitudo E ſupra M quæ B ſupra L. Et deſcripto ſuper axe AC ſemicirculo, occurrant ei rectæ horizontales LN, MO, in N & O, & jungantur NA, OA. Itaque quum pun-

[Fig. 46.]



ctum N ſit altius puncto O, manifeſtum eſt rectam NA minus ad horizontem inclinari quam OA. Eſt autem ipſi NA parallela tangens curvæ in L puncto *, & ipſi OA parallela tangens curvæ in M. Ergo curva BD in puncto L minus inclinata eſt quam curva EF in puncto M. Quod ſi igitur portio EF, invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in *ef*, ita ut inter eaſdem parallelas cum portione BD comprehendatur, invenietur punctum M in *m*, æquali altitudine cum puncto L. eritque etiam inclinatio curvæ *ef* in puncto *m*, quæ eadem eſt inclinationi curvæ EF in M, major inclinatione curvæ BD in L. Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ *ef*, major oſtendetur inclinatio quam curvæ BD in puncto æque alto. Itaque tempus deſcenſus per BD brevius erit tempore per *ef* *, ſive, quod idem eſt, per EF. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 15. huj.

* Prop. præced.

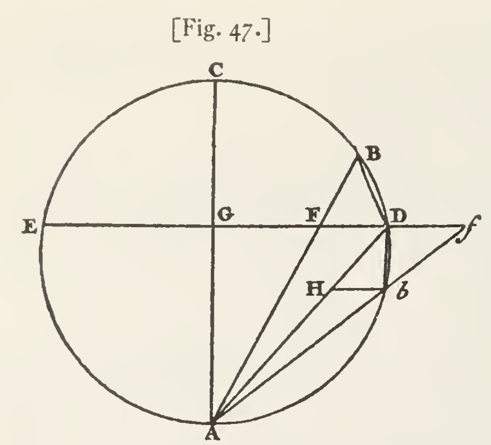
LEMMA.

Eſto circulus diametro AC [Fig. 47], *quem ſecet ad angulos rectos* DE, *& à termino diametri* A *educta recta* AB *occurrat circumferentiæ in* B, *ipſi vero* DE *in* F. *Dico tres haſce*, AB, AD, AF, *proportionales eſſe*.

Sit enim primo interſectio F intra circulum; & arcui BD recta ſubtenſa ducatur.

Du mouvement Cycloïdal.

[Fig. 47.]



tirons la corde correſpondant à l'arc BD. Comme les arcs AE et AD ſont égaux, les angles inſcrits EDA et ABD qui correſpondent à ces arcs ſeront alors également égaux entre eux. Par conſéquent dans les triangles ABD et ADF les angles ABD et ADF ſont égaux. D'autre part l'angle A eſt commun aux deux triangles. Les dits triangles ſeront donc ſemblables, partant BA : AD = AD : AF.

Soit en ſecond lieu le point d'interſection *f* en dehors du cercle et tirons *b*H parallèle à DE, laquelle rencontre la droite AD en H. Suivant ce qui a déjà été démontré on aura alors DA : A*b* = A*b* : AH, en d'autres termes = A*f* : AD. Par conſéquent A*f*, AD et A*b* formeront dans ce cas auſſi une proportion. Ainſi la propoſition eſt établie.

PROPOSITION XXIII.

Soit la cycloïde ABC [Fig. 48] *ayant ſon ſommet vers le bas et ſon axe* AD *vertical. Prenons ſur elle un point quelconque* B *et tirons de là vers le bas la droite* BI *qui touche la cycloïde et ſe termine à la droite horizontale* AI. *Tirons la droite* BF *perpendiculairement à l'axe et décrivons ſur* FA, *après l'avoir diviſée en deux parties égales par le point* X, *la demi-circonférence* FHA. *La droite* ΣG *ayant été enſuite menée parallèlement à* BF *par un point quelconque* G *pris ſur la courbe* BA, *laquelle* ΣG *coupe la circonférence* FHA *en* H *et l'axe* AD *en* Σ, *conſidérons les tangentes aux deux courbes aux points* G *et* H *et les parties de ces tangentes interceptées par les mêmes deux horizontales* MS *et* NT, *ſavoir* MN *et* ST. *Et puiſſent les mêmes droites* MS *et* NT *intercepter ſur la tangente* BI *la partie* OP *et ſur l'axe* DA *la partie* QR.

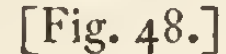
Cela étant ainſi, je dis que le temps dans lequel un corps parcourra la droite MN *avec une viteſſe conſtante telle qu'il peut l'acquérir en deſcendant par l'arc* BG *de la*

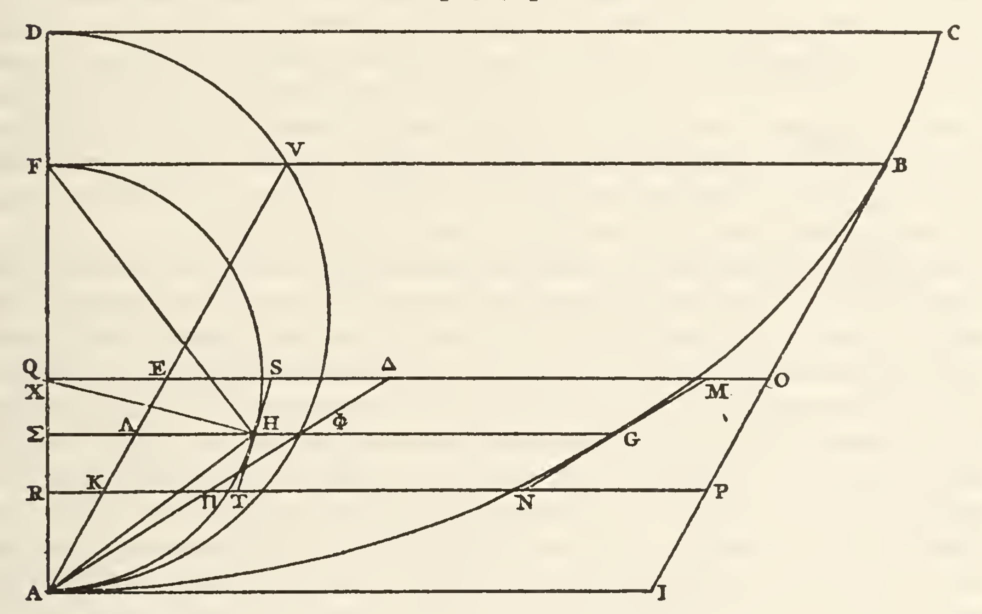
De motu in Cycloide. (p. 50).

Quia igitur arcus æquales sunt AE, AD, erunt anguli ad circumferentiam ipsis insistentes, EDA, ABD æqua|les. Itaque in triangulis ABD, ADF, æquales anguli ABD, ADF. Communis autem utrique est angulus ad A. Ergo dicti trianguli similes erunt, ideoque BA ad AD ut AD ad AF.

Sit jam punctum intersectionis *f* extra circulum, & ducatur *b*H parallela DE, quæ occurrat rectæ AD in H. Itaque secundum jam demonstrata erit ut DA ad A*b*, ita A*b* ad AH, hoc est, ita A*f* ad AD: Ideoque rursus proportionales erunt A*f*, AD, A*b*. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XXIII.


[Fig. 48.]



Sit Cyclois ABC [Fig. 48], *cujus vertex* A *deorsum conversus sit*, *axe* AD *ad perpendiculum erecto; sumptoque in ea quolibet puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* BI *quæ Cycloidem tangat*, *termineturque recta horizontali* AI. *recta vero* BF *ad axem perpendicularis agatur*, *& divisa bifariam* FA *in* X, *super ea describatur semicirculus* FHA. *Ductâ deinde per punctum quodlibet* G *in curva* BA *sumptum*, *rectâ* ΣG *parallelâ* BF, *quæ circumferentiæ* FHA *occurrat in* H, *axi* AD *in* Σ, *intelligantur per puncta* G *&* H *rectæ tangentes utriusque curvæ*, *earumque tangentium partes iisdem duabus horizontalibus* MS, NT *interceptæ sint* MN, ST. *Iisdemque rectis* MS, NT *includantur tangentis* BI *pars* OP, *& axis* DA *pars* QR.

Quibus ita se habentibus, *dico tempus quo grave percurret rectam* MN, *celeritate æquabili quanta acquiritur descendendo per arcum Cycloidis* BG, *fore ad tempus*

cycloïde, ſera au temps dans lequel la droite OP *ſera parcourue avec une viteſſe conſtante égale à la moitié de celle qui eſt acquiſe par la deſcente le long de la tangente* BI, *comme la tangente* ST *eſt à la partie* QR *de l'axe.*

En effet, décrivons ſur l'axe AD la demi-circonférence DVA coupant la droite BF en V et ΣG en Φ, et tirons la droite AV qui coupe les droites OQ, PR et GΣ en E, K et Λ. Tirons encore HF, HA, HX et AΦ, dont la dernière coupe les droites OQ et PR aux points Δ et Π.

Le temps par HN dont nous avons parlé a donc au temps par OP une raiſon compoſée du rapport des lignes MN et OP elles-mêmes et de l'inverſe du rapport des viteſſes avec leſquelles elles ſont parcourues *, le dernier rapport étant celui de la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſelon BI ou FA à la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BG ou FΣ *. Mais la viteſſe totale provenant de la chute FA eſt à la viteſſe correſpondant à la chute FΣ dans un rapport égal à celui des racines carrées des longueurs FA et FΣ * et par conſéquent la même que celui de FA à FH. La moitié de la viteſſe provenant de la chute FA eſt donc à la viteſſe provenant de la chute FΣ comme FX eſt à FH. Le temps ſuſdit par MN aura donc au temps par OP une raiſon compoſée des rapports MN : OP et FX : FH. Or, nous démontrerons que le premier de ces rapports, ſavoir MN : OP, eſt égal à FH : HΣ.

* Prop. 5. Galil. du mouv. uniforme [1]).
* Prop. 8. de cette Partie.
* Prop. 3. de cette Partie.

En effet, la tangente BI à la cycloïde eſt parallèle à la droite VA et de même la tangente MGN à la droite ΦΛ; par conſéquent la droite MN eſt égale à ΔΠ et OP à EK. Le dit rapport de la droite MN à OP eſt donc égal à celui de ΔΠ à EK, en d'autres termes à celui de ΔΛ à EΛ, c.à.d. de ΦA à ΛA, c.à.d. de VA à ΦA *. Mais VA : ΦA = FA : AH; car, attendu que le carré de VA eſt égal au rectangle DAF, et le carré de AΦ au rectangle DAΣ, leſquels rectangles ſont entre eux dans le rapport FA : ΣA, ou $FA^2 : AH^2$, il s'enſuit que $VA^2 : \Phi A^2 = FA^2 : AH^2$ ou, en conſidérant les longueurs, VA : AΦ = FA : AH. Le rapport MN : OP eſt donc égal à FA : AH, c.à.d., à cauſe de la ſimilitude des triangles FAH et FHΣ, à FH : HΣ, comme il a été dit. Par conſéquent la dite raiſon du temps par MN au temps par OP eſt compoſée des rapports FX : FH et FH : HΣ; elle ſera donc la même que celle de FX ou XH à HΣ. Mais comme le rayon XH eſt à HΣ, ainſi eſt la tangente ST à la droite QR; c'eſt une choſe qu'on voit facilement. Partant il eſt établi que le temps du mouvement conſidéré par MN eſt au temps du mouvement par OP comme ST eſt à QR. C. Q. F. D.

* Lemme précéd.

PROPOSITION XXIV.

Conſidérons de nouveau, comme dans la Propoſition précédente, la cycloïde ABC [Fig. 49] *dont le ſommet ſe trouve en bas et dont l'axe* AD *eſt vertical. Prenons ſur elle un point quelconque* B *et tirons à partir de lui de haut en bas la tangente à la cycloïde* BΘ *qui rencontre la droite horizontale* AΘ *en* Θ. *Tirons encore la droite* BF *perpendiculaire à l'axe et décrivons ſur* FA *la demi-circonférence* FHA. *Puiſſe en-*

quo percurretur recta OP, *celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur deſcendendo per totam tangentem* BI, *ſicut eſt tangens* ST *ad partem axis* QR. De motu in Cycloide.

Deſcribatur enim ſuper axe AD ſemicirculus DVA ſecans rectam BF in V, & ΣG in Φ, & jungatur AV ſecans rectas OQ, PR, GΣ in EK & Λ. Jungantur item HF, HA, HX & AΦ; quæ poſtrema ſecet rectas OQ, PR in punctis Δ & Π.

Habet ergo dictum tempus per MN ad tempus per OP, rationem eam quæ componitur ex ratione ipſarum linearum MN ad OP, & ex ratione celeritatum quibus ipſæ percurruntur, contrarie ſumpta *, hoc eſt, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex BI ſive ex FA, ad celeritatem ex BG, ſive ex FΣ *. Atqui tota celeritas ex | FA ad celeritatem ex FΣ, eſt in ſubduplicata ratione longitudinum FA ad FΣ *, ac proinde eadem quæ FA ad FH. Ergo dimidia celeritas ex FA ad celeritatem ex FΣ erit ut FX ad FH. Itaque tempus dictum per MN ad tempus per OP habebit rationem compoſitam ex rationibus MN ad OP, & FX ad FH. Harum vero prior ratio, nempe MN ad OP, eadem oſtendetur quæ FH ad HΣ. * Prop. 5. Galil. de motu æquab. [1]) (*p.* 51.) * Prop. 8. huj. * Prop. 3. huj.

Eſt enim tangens Cycloidis BI parallela rectæ VA, ſimiliterque tangens MGN parallela rectæ ΦA; ac proinde recta MN æqualis ΔΠ, & OP æqualis EK. Ergo dicta ratio rectæ MN ad OP eadem eſt quæ ΔΠ ad EK; hoc eſt, ΔA ad EA; hoc eſt, ΦA ad ΛA; hoc eſt VA ad ΦA *. Eſt autem ut VA ad AΦ ita FA ad AH; nam quia quadratum VA æquale eſt rectangulo DAF, & quadratum AΦ æquale rectangulo DAΣ, quæ rectangula ſunt inter ſe ut FA ad ΣA, hoc eſt ut quadratum FA ad quadratum AH, erit proinde & quadratum VA ad quadratum ΦA ut quadratum FA ad quadratum AH; atque etiam VA ad AΦ longitudine, ut FA ad AH. Ratio itaque MN ad OP, eadem erit quæ FA ad AH, hoc eſt, propter triangula ſimilia FAH, FHΣ, eadem quæ FH ad HΣ, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per MN ad tempus per OP, componitur ex rationibus FX ad FH & FH ad HΣ, ideoque eadem erit quæ FX ſive XH ad HΣ. Sicut autem radius XH ad HΣ, ita eſt tangens ST ad rectam QR; hoc enim facile perſpicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per MN, ad tempus per OP conſtat eſſe ſicut ST ad QR. quod erat demonſtrandum. * Lemma præced.

PROPOSITIO XXIV. (*p.* 52).

Sit rurſus ut in præcedenti propoſitione Cyclois ABC [Fig. 49], *cujus vertex* A *deorſum ſpectet, axis* AD *ad horizontem erectus ſit; & ſumpto in ea quovis puncto* B, *ducatur inde deorſum recta* BΘ *quæ Cycloidem tangat, occurratque rectæ horizontali* AΘ *in* Θ: *recta vero* BF *axem perpendicularis agatur, & ſuper* FA *deſcribatur ſemicirculus* FHA. *Deinde alia recta* GE, *parallela* FB, *ſecet Cycloidem in* E,

[1]) Ed. Naz. T. VIII, p. 195.

Du mouvement Cycloïdal.

ſuite une autr droite GE, *parallèle à* FB, *couper la cycloïde en* E, *la droite* BΘ *en* I, *la circonférence* FHA *en* H *et enfin l'axe* DA *en* G.

Je dis que le temps de la deſcente ſuivant l'arc de cycloïde BE *eſt à celui ſuivant la tangente* BI *avec la moitié de la viteſſe qui peut être acquiſe par une chute ſuivant* BΘ *comme l'arc* FH *eſt à la droite* FG.

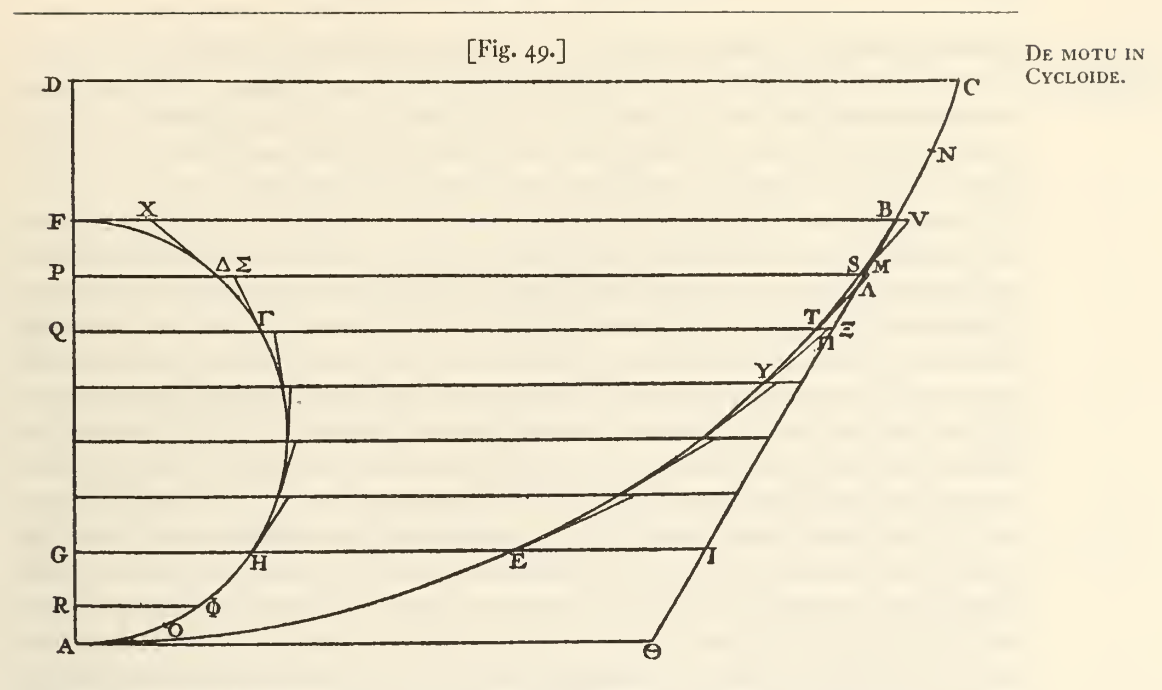
En effet, ſi cela n'eſt pas vrai, le temps de la chute ſuivant l'arc BE aura au temps ſuſdit correſpondant à BI, un rapport ſupérieur ou inférieur à celui de l'arc FH à la droite FG. Que le premier temps ait d'abord à l'autre, ſi cela eſt poſſible, un rapport plus grand.

Dans ce cas un certain temps plus court que celui de la chute ſelon BE (que ce ſoit le temps Z) aura au temps conſidéré correſpondant à BI le rapport de l'arc FH à la droite FG. Que ſi maintenant on prend ſur la cycloïde au-deſſus du point B un autre point N, le temps néceſſaire pour parcourir BE après NB ſera plus court que le temps ſuivant BE. Or, il eſt manifeſte qu'on peut prendre le point N ſi près de B, que la différence de ces temps devient auſſi petite qu'on veut et qu'elle eſt par conſéquent plus petite que celle dont le temps Z eſt ſurpaſſé par le temps de la chute ſuivant BE. Suppoſons donc le point N ainſi choiſi. Il s'enſuit que le temps de la chute ſuivant BE après NB ſera plus grand que le temps Z et aura par conſéquent au temps de la chute ſuivant BI avec la moitié de la viteſſe qui peut être acquiſe par une chute ſuivant BΘ, un rapport ſupérieur à celui de l'arc FH à la droite FG. Que le premier temps ait donc au deuxième un rapport égal à celui de l'arc FHO à la droite FG.

Diviſons FG en parties égales FB, PQ, etc. dont chacune correſpond à une hauteur moindre que celle de la ligne NB, moindre auſſi que celle de l'arc HO; en effet, il eſt évident que cela eſt poſſible. Tirons à partir des points de diviſion des droites PΛ, QΞ, etc. parallèles à la baſe DC et ſe terminant à la tangente BΘ. Et ſoient menées vers le haut, à partir des points où ces parallèles coupent la circonférence FH, et de même à partir du point H, des tangentes chacune juſqu'à la parallèle prochaine, telles que ΔX, ΓΣ, etc. Soient également menées vers le haut à partir des points où

De motu in Cycloide.

[Fig. 49.]



rectam BΘ *in* I, *circumferentiam* FHA *in* H, *& denique axem* DA *in* G.

Dico tempus deſcenſus per arcum Cycloidis BE, *eſſe ad tempus per tangentem* BI *cum celeritate dimidia ex* BΘ, *ſicut arcus* FH *ad rectam* FG.

Si enim hoc verum non eſt, habebit tempus per arcum BE ad dictum tempus per BI, vel majorem rationem quam arcus FH ad rectam FG vel minorem. Habeat primo, ſi fieri poteſt, majorem.

Itaque tempus aliquod brevius tempore per BE (ſit hoc tempus Z) erit ad dictum tempus per BI ut arcus FH ad rectam FG. Quod ſi jam in Cycloide ſupra punctum B ſumatur punctum aliud N, erit tempus per BE poſt NB, brevius tempore per BE. Manifeſtum eſt autem punctum N tam propinquum ſumi poſſe ipſi B, ut differentia eorum temporum ſit quamlibet exigua, ac proinde ut minor ſit ea qua tempus Z ſuperatur à tempore per BE. Sit itaque | punctum N ita ſumptum. unde quidem tempus (p. 53). per BE poſt NB majus erit tempore Z, majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per BI cum dimidia celeritate ex BΘ, quam arcus FH ad rectam FG. Habeat itaque eam quam arcus FHO ad rectam FG.

Dividatur FG in partes æquales FP, PQ, &c. quarum unaquæque minor ſit altitudine lineæ NB, atque item altitudine arcus HO; hoc enim fieri poſſe manifeſtum eſt; & à punctis diviſionum agantur rectæ, baſi DC parallelæ, & ad tangentem BΘ terminatæ PΛ, QΞ, &c. Quibusque in punctis hæ ſecant circumferentiam FH, ab iis, itemque à puncto H, tangentes ſurſum ducantur uſque ad proximam quæque parallelam, velut ΔX, ΓΣ &c. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi

Du mouvement Cycloïdal.

les dites parallèles coupent la cycloïde, des tangentes telles que SV, TM, etc. Or, ſi l'on ajoute à la droite FG une partie GR égale à celles qui réſultent de la diviſion, et qu'on mène RΦ parallèle, comme les autres, à DC, il apparaît que celle-ci coupe la circonférence FHA entre H et O, puiſque GR eſt plus petite que la hauteur du point H au-deſſus de O. Et maintenant nous raiſonnerons comme ſuit.

Le temps d'une chute ſuivant la tangente VS avec la viteſſe conſtante qui pourrait être acquiſe par une chute ſuivant BS eſt plus grand que le temps d'un mouvement uniformément accéléré ſuivant l'arc BS après NB. Car la viteſſe réſultant de la chute BS eſt moindre que la viteſſe réſultant de la chute NB parce que la hauteur de BS eſt inférieure à celle de NB. Mais la viteſſe provenant de la chute BS eſt ſuppoſée ici reſter la même durant le trajet de la tangente VS, tandis que la viteſſe acquiſe par la chute ſelon NB s'accélère continuellement durant le trajet de l'arc BS; de plus ce dernier eſt plus petit que la tangente VS et partout moins incliné qu'aucune partie de cette tangente. De ſorte que pour toutes ces raiſons le temps néceſſaire pour parcourir la tangente VS avec la viteſſe qui correſpond à une chute ſuivant BS eſt plus grand que le temps néceſſaire pour parcourir l'arc BS après une chute ſuivant NB. Pareillement le temps d'une chute ſuivant la tangente MT avec une viteſſe égale à celle qui réſulte d'une chute ſuivant BT ſera plus grand que le temps néceſſaire pour parcourir l'arc ST après NS, et le temps employé pour parcourir la tangente IIY avec une viteſſe telle qu'elle provient d'une chute ſelon BY ſera plus grand que le temps néceſſaire pour parcourir l'arc TY après NT. Et ainſi la ſomme des temps des mouvements uniformes ſuivant toutes les tangentes juſqu'à la plus baſſe qui touche la cycloïde en E, chacune d'elles étant parcourue avec la viteſſe qui peut être acquiſe par une chute à partir du point B juſqu'à leur point de contact, ſera plus grande que le temps néceſſaire pour parcourir l'arc BE après NB. Mais cette même ſomme de temps ſerait auſſi plus petite, comme nous le montrerons maintenant.

En effet, conſidérons de nouveau les mêmes temps des mouvements uniformes ſuivant les tangentes à la cycloïde. Or, le temps d'une chute ſuivant la tangente VS avec la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BS eſt au temps néceſſaire pour parcourir la droite BA avec la moitié de la viteſſe telle qu'elle ſerait acquiſe par une chute ſuivant FA, comme la tangente ΔX à la circonférence eſt à la partie FP de l'axe*. Pareillement le temps néceſſaire pour parcourir la tangente MT avec une viteſſe telle qu'elle provient d'une chute ſuivant BT eſt au temps néceſſaire pour parcourir la droite ΛΞ avec cette même moitié de la viteſſe correſpondant à la chute ſuivant FA, comme la tangente ΓΣ eſt à la droite PQ. Et ainſi de ſuite: chacun des temps néceſſaires pour parcourir une des tangentes à la cycloïde, leſquels ſont les mêmes que ceux conſidérés plus haut, ſera au temps du mouvement uniforme ſelon la partie de la droite BI qui lui coreſpond avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute BΘ, comme la tangente à la circonférence FH compriſe entre les mêmes parallèles eſt à la partie correſpondante de la droite FG.

* Prop. précéd.

Il y a donc certaines longueurs FP, PQ, etc. et un même nombre d'autres quantités,

occurrunt, tangentes ſurſum ducantur velut SV, TM &c. additâ vero ad rectam FG parte una GR æquali iis quæ ex diviſione, ductâque RΦ parallelâ ſimiliter ipſi DC, patet eam occurrere circumferentiæ FHA inter H & O, quia GR minor eſt altitudine puncti H ſupra O. Jam vero ſic porro argumentabimur.

De motu in Cycloide.

Tempus per tangentem VS cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex BS, majus eſt tempore motus continue accelerati per arcum BS poſt NB. Nam celeritas ex BS minor eſt celeritate ex NB, propterea quod minor altitudo BS quam NB. At celeritas ex BS æquabiliter continuari ponitur per tangentem VS, cum celeritas acquiſita ex NB continue porro acceleretur per arcum BS, qui arcus minor inſuper eſt tangente VS, omnibusque partibus ſuis magis erectus quam ulla pars tangentis VS. Adeo ut omnino majus ſit futurum tempus per tangentem VS cum celeritate ex BS, tempore per arcum BS poſt NB. Similiter tempus per tangentem MT, cum celeritate ex BT, majus erit tempore per arcum ST poſt NS, & tempus per tangentem ΠY cum celeritate ex BY, majus tempore per arcum TY poſt NT. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E, cum celeritatibus per ſingulas quantæ acquiruntur cadendo ex B adusque punctum ipſarum contactus, majora ſimul erunt tempore per arcum BE poſt NB. Eadem vero & minora eſſent, ut nunc oſtendemus.

Conſiderentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et eſt quidem tempus per tangentem VS cum celeritate ex BS, ad tempus per rectam BA cum celeritate dimidia ex FA, ut tangens circumferentiæ ΔX ad partem|axis FP *. Similiterque tempus per tangentem MT, cum celeritate ex BT, ad tempus per rectam ΔΞ cum eadem dimidia celeritate ex FA, ut tangens ΓΣ ad rectam PQ. Atque ita deinceps ſingula tempora per tangentes cycloidis, quæ ſunt eadem ſupradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes ſibi reſpondentes rectæ BI cum celeritate dimidia ex BΘ, ſicut tangentes circumferentiæ FH, iisdem parallelis comprehenſæ, ad partes rectæ FG ipſis reſpondentes.

(p. 54).

* Prop. præced.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ FP, PQ, &c. & totidem aliæ, tempora ſcili-

Du mouvement Cycloïdal.

ſavoir les temps dans leſquels ſont parcourues les droites BΛ, ΛΞ, etc. d'un mouvement uniforme avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BΘ; et chaque quantité de la première ſérie a le même rapport à la quantité ſuivante que chaque quantité de la deuxième ſérie à celle qui la ſuit: en effet, les quantités de chacune des ſéries ſont égales entre elles. Or, les rapports des quantités de la première ſérie à certaines autres, ſavoir aux tangentes ΔX, ΓΣ, etc. à la circonférence, ſont les mêmes et obſervent le même ordre que les rapports des quantités de la deuxième ſérie à certaines autres, ſavoir aux temps du mouvement ſuſdit le long des tangentes VS, MT, etc. à la cycloïde. Par conſéquent, comme ſe rapporte la ſomme de toutes les premières à celle des grandeurs correſpondantes, c.à.d. comme la ligne FG entière eſt à la ſomme de toutes les tangentes XΔ, ΓZ, etc., ainſi eſt le temps dans lequel la tangente entière BI eſt parcourue avec la moitié de la viteſſe acquiſe par une chute ſuivant BΘ, à la ſomme de tous les temps correſpondants aux mouvements ſuſdits ſuivant les tangentes VS, MT, etc. à la cycloïde*. Ainſi donc, par inverſion, les temps des mouvements ſuſdits ſuivant les tangentes à la cycloïde auront au temps néceſſaire pour parcourir la droite BI avec la moitié de la viteſſe qui réſulterait d'une chute ſuivant BΘ, la même raiſon que toutes les tangentes à la circonférence FH à la droite FG, et par conſéquent une raiſon moindre que celle de l'arc FO à la même droite FG, puiſque l'arc FΦ, et par conſéquent a-fortiori l'arc FO, eſt plus grand que l'enſemble des tangentes à l'arc FH*. Mais nous avons poſé que le temps néceſſaire pour parcourir BE après NB eſt au temps néceſſaire pour parcourir BI avec la moitié de la viteſſe qui réſulterait d'une chute ſelon BΘ, comme l'arc FO eſt à la droite FG. Par conſéquent la ſomme des temps néceſſaires pour parcourir chacune des tangentes à la cycloïde ſera plus petite que le temps néceſſaire pour parcourir BE après NB, tandis qu'auparavant nous avons démontré que cette ſomme eſt plus grande; ce qui eſt abſurde. Il en réſulte que le temps néceſſaire pour parcourir l'arc de cycloïde BE n'a pas au temps de parcourir la tangente BI avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſelon BΘ ou FA, un rapport ſupérieur à celui de l'arc FH de la circonférence à la droite FG.

* Prop. 2. des Sphéroïdes et Conoïdes d'Archimède[1])

* Prop. 20. de cette Partie.

Suppoſons maintenant, ſi cela eſt poſſible, que le premier temps ait au deuxième un rapport inférieur au dernier rapport nommé. Par conſéquent un certain temps ſupérieur au temps néceſſaire pour parcourir l'arc BE (que ce ſoit le temps Z) ſera au temps conſidéré correſpondant à BI comme l'arc FH eſt à la droite FG.

Or, ſi l'on prend [Fig. 50] un arc NM égal en hauteur à l'arc BE, mais dont l'extrémité ſupérieure N ſoit ſituée au-deſſous du point B, le temps de chute le long de l'arc NM ſera plus grand que le temps correſpondant pour l'arc BE*. Il eſt évident que le point N peut être pris ſi près du point B que la différence des dits temps devient auſſi petite qu'on veut, et par conſéquent inférieure à celle dont le temps Z ſurpaſſe le temps néceſſaire pour parcourir l'arc BE. Suppoſons donc le point N choiſi de cette manière. Dans cette hypothèſe le temps de la chute ſuivant NM ſera inférieur au temps Z, et aura par conſéquent au dit temps correſpondant à BI, ſup-

* Prop. 22. de cette Partie.

cet quibus percurruntur rectæ BΛ, ΛΞ &c, motu æquabili cum celeritate dimidia ex BΘ; Et unaquæque quantitas in prioribus ad sequentem eadem proportione refertur, qua unaquæque posteriorum ad suam sequentem; sunt enim utrobique inter se æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circuli ΔX, ΓΣ, &c, referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine posteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus qualem diximus per tangentes cycloidis VS, MT &c. Ergo, sicut se habent omnes simul priores ad omnes eas ad quas ipsæ referuntur, hoc est, sicut tota FG ad tangentes omnes XΔ, ΓΣ, &c. ita tempus quo percurritur tota BI cum celeritate dimidia ex BΘ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis VS, MT, &c*. Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam BI cum celeritate dimidia ex BΘ, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ FH ad rectam FG; ac minorem proinde quam arcus FO ad rectam eandem FG; quia arcus FΦ, ideoque omnino & arcus FO major est dictis omnibus arcus FH tangentibus*. Atqui tempus per BE post NB, ad tempus per BI cum celeritate dimidia ex BΘ, posuimus esse ut arcus FO ad rectam FG. Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora simul erunt tempore per BE post NB, cum antea majora esse ostensum sit; quod est absurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis BE, ad tempus per tangentem BI, cum celeritate dimidia ex BΘ vel ex FA, non habet majorem rationem quam arcus circumferentiæ FH ad rectam FG.

De motu in Cycloide.

* Prop. 2. Archimedis de Sphæroid. & Conoid.[1])

* Prop. 20. huj.

Habeat jam, si potest, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum BE, (sit hoc tempus Z) erit ad tempus dictum per BI, ut arcus FH ad rectam FG.

Quod si jam sumatur [Fig. 50] arcus NM æqualis altitudine cum arcu B|E, sed cujus terminus superior N sit humilior puncto B, erit tempus per arcum NM majus tempore per arcum BE*. Manifestum autem quod punctum N tam propinquum sumi potest puncto B, ut differentia dictorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde minor ea qua tempus Z superat tempus per arcum BE. Sit itaque punctum N ita sumptum. Unde quidem tempus per NM minus erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per BI, cum dimidia celeritate ex BΘ, minorem rationem quam

(p. 55).

* Prop. 22. huj.

[1]) Voir sur cette Proposition la note 5 de la p. 251 du T. XIV.

Du mouvement Cycloïdal.

posé parcourue avec la moitié de la viteſſe qui réſulterait d'un chute ſuivant BΘ, un rapport inférieur à celui de l'arc FH à la droite FG. Que le premier temps ait donc au deuxième un rapport égal à celui de l'arc LH à la droite FG.

Diviſons maintenant FG en des parties égales FP, PQ, etc. dont chacune ſoit inférieure à la hauteur de l'arc de cycloïde BN et en même temps à celle de l'arc de circonférence FL; et tirons, après avoir ajouté à FG une de ces parties Gζ, à partir des points de diviſion des droites parallèles à la baſe DC et ſe terminant à la tangente BΘ, ſavoir PO, QK, etc. et de même à partir du point ζ la droite ζΩ coupant la cycloïde en V et la circonférence en η. Menons enſuite vers le bas à partir des points où les dites parallèles coupent la circonférence FH, des tangentes chacune juſqu'à la parallèle prochaine, telles que θΔ et ΓΣ, dont la plus baſſe partant du point H rencontre la droite ζΩ en X. Menons de plus également vers le bas, à partir des points où les dites parallèles coupent la cycloïde, un nombre égal de tangentes, telles que SΛ, TΞ, etc. dont la plus baſſe, ſavoir la tangente au point E, rencontre la droite ζΩ en R.

Comme Pζ eſt égale à FG, hauteur de l'arc BE, à laquelle eſt égale d'après la conſtruction celle de l'arc NM, Pζ ſera auſſi égale à la hauteur de l'arc NM. Or, la droite PO eſt, d'après la conſtruction, ſituée plus haut que l'extrémité N. Par conſéquent ζΩ, et ſon point V, ſeront ſitués plus haut que l'extrémité M. C'eſt pourquoi, l'arc SV étant égal en hauteur à l'arc NM, mais ayant ſon extrémité S ſituée au-deſſus de N, le temps d'une chute ſuivant SV ſera plus court que celui d'une chute ſuivant NM*.

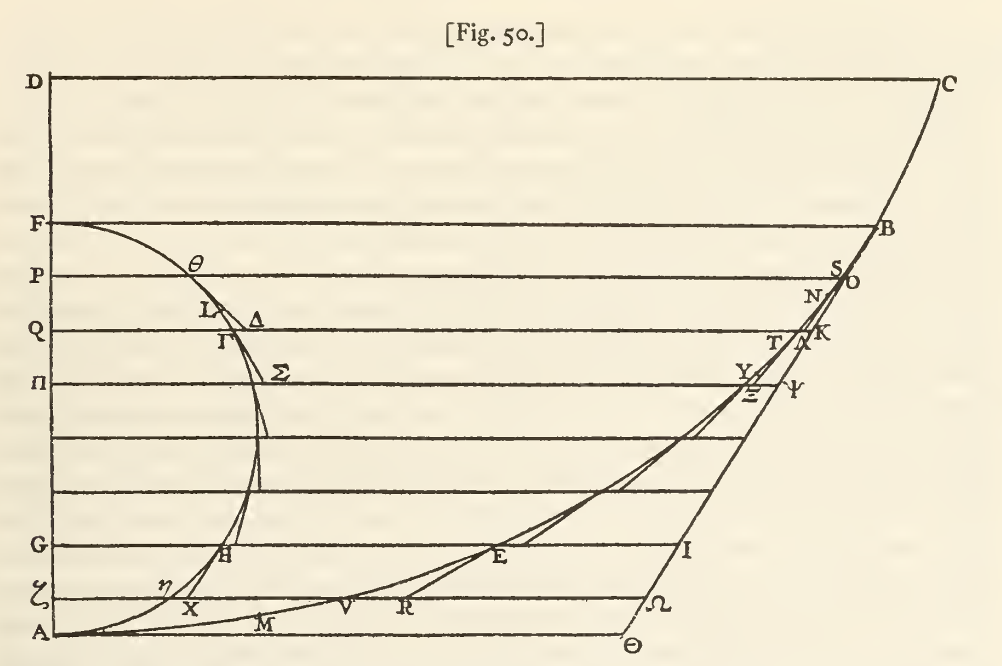
* Prop. 22. de cette Partie.

Mais le temps néceſſaire pour parcourir la tangente SΛ avec la viteſſe conſtante conſidérée, ſavoir celle qui provient d'une chute ſuivant BS, eſt plus court que le temps d'une chute accélérée le long de l'arc ST commençant en S. Car la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BS, avec laquelle toute la droite SΛ eſt parcourue par hypothèſe, eſt égale à la viteſſe provenant d'une chute ſuivant ST *, c.à.d. à la viteſſe acquiſe à la fin par le mouvement ſuivant cet arc ST, et SΛ eſt plus petite que ST. Pareillement le temps néceſſaire pour parcourir la tangente TΞ avec une viteſſe conſtante, ſavoir celle qui provient de la chute ſuivant BT, eſt plus court que le temps d'une chute accélérée ſuivant l'arc TY après ST, vu que la viteſſe provenant de la chute ſuivant BT, avec laquelle toute la droite TΞ eſt parcourue par hypothèſe, eſt égale à la viteſſe provenant d'une chute ſuivant SY, c.à.d. à la

* Prop. 8. de cette Partie.

[Fig. 50.]

De motu in Cycloide.



arcus FH ad rectam FG. Habeat ergo eam quam arcus LH ad rectam FG.

Dividatur jam FG in partes æquales FP, PQ, &c. quarum unaquæque minor ſit arcus cycloidis BN altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ FL; & additâ ad FG unâ earum partium Gζ, ducantur à punctis diviſionum rectæ baſi DC parallelæ, & ad tangentem BΘ terminatæ, PO, QK, &c; itemque à puncto ζ recta ζΩ quæ ſecet cycloidem in V, circumferentiam in η; quibusque in punctis ductæ parallelæ ſecant circumferentiam FH, ab iis tangentes deorſum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut θΔ, ΓΣ: Quarum infima à puncto H ducta occurrat rectæ ζΩ in X. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorſum, velut SΛ, TΞ, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ ζΩ in R.

Quia igitur Pζ æqualis eſt FG altitudini arcus BE, cui æqualis eſt ex conſtructione altitudo arcus NM, erit & Pζ æqualis altitudini arcus NM. Eſt autem recta PO ex conſtructione ſuperior ter|mino N. Ergo & ζΩ, & in ea punctum V, ſuperius termino (p. 56).
M. Quare, cum arcus SV æqualis ſit altitudinis cum arcu NM, ſed termino S ſublimiore quam N, erit tempus per SV brevius tempore per NM *. * Prop. 22. huj.

Atqui tempus per tangentem SΛ, cum celeritate æquabili ex BS, brevius eſt tempore deſcenſus accelerati per arcum ST, incipientis in S. Nam celeritas ex BS, qua tota SΛ transmiſſa ponitur, æqualis eſt celeritati ex ST *, quæ motui per arcum ST in fine * Prop. 8. huj.
demum acquiritur; ipſaque SΛ minor eſt quam ST. Similiter tempus per tangentem TΞ, cum celeritate æquabili ex BT, brevius eſt tempore deſcenſus accelerati per arcum TY poſt ST; quum celeritas ex BT, qua tota TΞ transmiſſa ponitur, ſit æqualis cele-

Du mouvement Cycloïdal.

viteſſe acquiſe à la fin par le dit mouvement ſuivant l'arc TY après ST, et que la droite TΞ eſt inférieure en longueur à l'arc TY. Par conſéquent la ſomme de tous les temps qui correſpondent aux mouvements uniformes le long des tangentes à la cycloïde avec les viteſſes qui ſont obtenues, dans le cas de chacune d'elles, par une chute à partir du point B juſqu'à ſon point de contact, ſera inférieure au temps d'une chute accélérée le long de l'arc SV. Mais cette même ſomme ſerait auſſi plus grande que ce dernier temps, comme nous le démontrerons maintenant.

En effet, le temps conſidéré néceſſaire pour parcourir la tangente SΛ, avec une viteſſe conſtante, ſavoir celle qui provient d'une chute ſuivant BS, eſt au temps néceſſaire pour parcourir la droite OK avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BΘ, comme la tangente à la demi-circonférence θΔ eſt à la droite PQ *. De même le temps de parcourir la tangente TΞ avec la viteſſe uniforme conſidérée, ſavoir celle qui provient d'une chute ſuivant BT, eſt au temps néceſſaire pour parcourir uniformément la droite KΨ avec la moitié de la viteſſe provenant de la chute ſuivant BΘ, comme la tangente ΓΣ eſt à la droite QΠ. Et ainſi de ſuite: les temps néceſſaires pour parcourir les tangentes à la cycloïde, qui ſont les mêmes que précédemment, ſeront chacun au temps d'un mouvement uniforme ſuivant la partie correſpondante de la droite OΩ, avec la moitié de la viteſſe provenant de la chute ſuivant BΘ, comme la tangente à la circonférence θη compriſe entre les mêmes parallèles eſt à la partie correſpondante de la droite Pζ. D'où l'on conclura, comme dans la première partie de la démonſtration, que la ſomme de toutes les droites PQ, QΠ, etc. c.à.d. la ligne entière Pζ, eſt à la ſomme des tangentes θΔ, ΓΣ, etc. comme le temps dans lequel eſt parcourue toute la tangente OΩ, avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BΘ, à la ſomme totale des mouvements ſuſdits ſuivant les tangentes à la cycloïde SΛ, TΞ, etc. Par converſion, on aura donc auſſi que la ſomme des temps ſuivant les tangentes à la cycloïde aura au temps ſuſdit du mouvement uniforme ſuivant la droite OΩ, ou bien ſuivant BI, le même rapport que la ſomme des dites tangentes à l'arc θη à la droite Pζ ou FG; ce rapport des temps ſera donc ſupérieur à celui de l'arc LH à la droite FG; en effet, l'arc θH, et à plus forte raiſon l'arc LH, ſera plus petit que la dite ſomme des tangentes à l'arc θη *. Mais nous avons ſuppoſé dès le commencement que le temps néceſſaire pour parcourir NM ſe rapporte à celui de BI comme l'arc LH eſt à la droite FG. Par conſéquent le temps de parcourir NM et à plus forte raiſon celui de parcourir SV ſera inférieur au temps de parcourir l'enſemble des tangentes à la cycloïde. Ce qui eſt abſurde puiſqu'il a été démontré plus haut que ce temps eſt inférieur à celui correſpondant à une chute ſuivant l'arc SV. Il eſt donc évident que le temps d'une chute ſuivant l'arc de cycloïde BE eſt au temps néceſſaire pour parcourir uniformément la tangente BI avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BΘ, dans un rapport qui n'eſt pas inférieur à celui de l'arc FH à la droite FG.

Mais il a également été démontré que le rapport des temps n'eſt pas plus grand que ce dernier. Il eſt donc néceſſaire qu'il ait la même valeur. C. Q. F. D.

* Prop. précéd.

* Prop. 20. de cette Partie.

ritati ex SY, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum TY post ST; ipsa- De motu in que TΞ minor sit arcu TY. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tan- Cycloide. gentes cycloidis, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur descendendo ex B usque ad punctum ipsarum contactus, breviora simul erunt tempore descensus accelerati per arcum SV. Eadem vero & longiora essent, ut nunc ostendemus.

Est enim tempus dictum per tangentem SΛ, cum celeritate æquabili ex BS, ad tempus per rectam OK cum celeritate æquabili dimidia ex BΘ, sicut tangens semicirculi θΔ ad rectam PQ *. similiterque tempus per tangentem TΞ, cum celeritate æqua- * Prop.præced. bili ex BT, est ad tempus per rectam KΨ cum celeritate æquabili dimidia ex BΘ, ut tangens ΓΣ ad rectam QΠ. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ OΩ, cum celeritate dimidia ex BΘ, ut tangentes circumferentiæ θη, iisdem parallelis inclusæ, ad partes rectæ Pζ ipsis respondentes. Unde, ut in priori parte demonstrationis, concludetur omnes simul rectas PQ, QΠ &c. hoc est, totam Pζ esse ad omnes simul tangentes θΔ, ΓΣ, &c. sicut tempus quo percurritur tota OΩ, cum celeritate dimidia ex BΘ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis SΛ, TΞ, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam OΩ, sive per BI, quam dictæ tangentes omnes arcus θη ad rectam Pζ vel FG, ac proinde majorem quam arcus LH ad rectam FG; est enim arcus θH, adeoque etiam omnino arcus LH, minor dictis tangentibus arcus θη *. Sed tempus per NM posui|mus ab initio (*p.* 57). ad idem tempus per BI se habere ut arcus LH ad rectam FG. Ergo tempus per NM, * Prop. 20. huj. multoque magis tempus per SV, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod est absurdum, cum hoc tempus, illo per arcum SV, antea minus ostensum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis BE ad tempus per tangentem BI cum celeritate æquabili dimidia ex BΘ, non minorem rationem habere quam arcus FH ad rectam FG.

Sed nec majorem habere ostensum fuit. Ergo eandem habeat necesse est. quod erat demonstrandum.

Du mouvement Cycloïdal.

PROPOSITION XXV.

Dans une cycloïde à axe vertical et dont le ſommet ſe trouve en bas, les temps de deſcente dans leſquels un mobile, partant du repos d'un point quelconque de la courbe, atteint le point le plus bas, ſont égaux entre eux, et ont au temps de la chute verticale le long de l'axe entier de la cycloïde une raiſon égale à celle de la demi-circonférence d'un cercle à ſon diamètre.

Conſidérons une cycloïde ABC à axe vertical dont le ſommet eſt tourné vers le bas [Fig. 51], et un mobile deſcendant librement à partir d'un point, tel que B, arbitrairement choiſi ſur cette courbe, ſuivant l'arc BA ou ſuivant une ſurface poſſédant la même courbure. Je dis que le temps de la deſcente de ce mobile eſt au temps d'une chute le long de l'axe DA, comme la demi-circonférence d'un cercle eſt à ſon diamètre. Ceci étant démontré, il ſera établi en même temps que les temps de chute le long d'arcs de la cycloïde ſe terminant en A mais d'ailleurs arbitrairement choiſis ſont égaux entre eux.

Décrivons ſur l'axe DA un demi-cercle dont la circonférence ſoit coupée en E par la droite BF parallèle à la baſe DC, et après avoir joint les points E et A par une droite, traçons BG parallèle à cette dernière et touchant donc la cycloïde au point B. Suppoſons que la même droite rencontre en G la droite horizontale tirée par A. Décrivons encore un demi-cercle FHA ſur FA.

D'après la propoſition précédente, le temps de la deſcente ſuivant l'arc de cycloïde BA eſt alors au temps d'un mouvement uniforme le long de la droite BG avec la moitié de la viteſſe qui ſerait acquiſe par une chute ſuivant BG, comme le contour FHA du demi-cercle eſt à la droite FA. Mais le temps du dit mouvement uniforme par BG eſt égal au temps de la chute libre accélérée ſuivant la même droite BG, ou à celle ſuivant EA qui lui eſt égale et parallèle, c.àd. au temps de la chute accélérée ſuivant l'axe DA *. Par conſéquent le temps du mouvement le long de l'arc BA ſera

* Prop. 6. de Galilée sur le mouv. accél.[1])

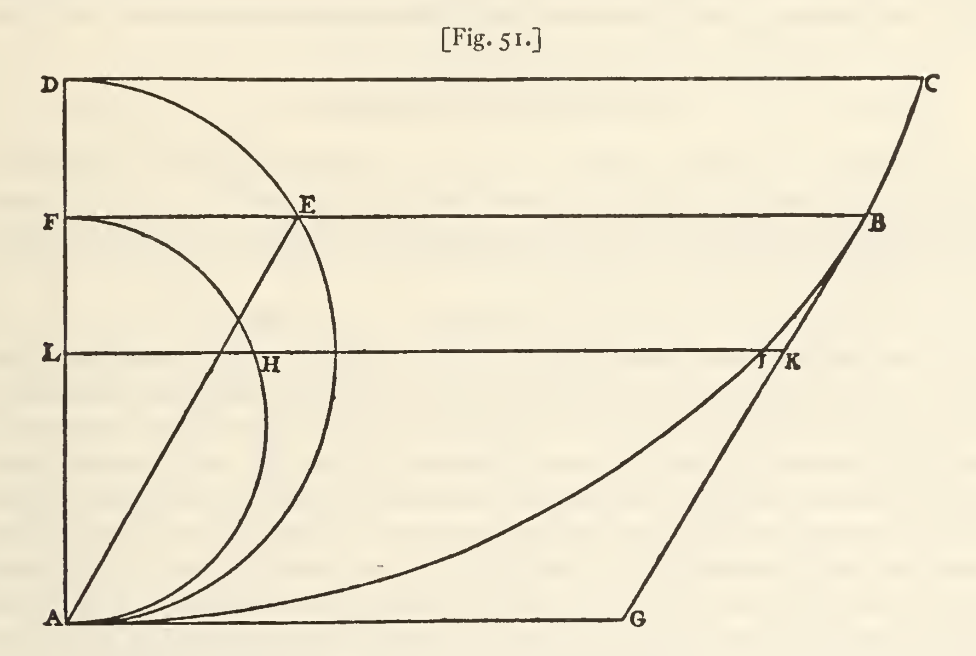
[1]) Ed. Naz. T. VIII, p. 221.

PROPOSITIO XXV.

De motu in Cycloide.

In Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia; habentque ad tempus caſus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam ſemicircumferentia circuli ad diametrum.

[Fig. 51.]



Eſto cyclois ABC [Fig. 51] cujus vertex A deorſum ſpectet, axis vero AD ad perpendiculum erectus ſit, & à puncto quovis in cycloide ſumpto, velut B; deſcendat mobile impetu naturali per arcum BA, ſive per ſuperficiem ita inflexam. Dico tempus deſcenſus hujus eſſe ad tempus caſus per axem DA, ſicut ſemicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonſtrato, etiam tempora deſcenſus, per quoſlibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter ſe æqualia eſſe conſtabit.

Deſcribatur ſuper axe DA ſemicirculus, cujus circumferentiam ſecet recta BF, baſi DC parallela, in E; junctâque EA, ducatur ei parallela BG, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: ſitque etiam ſuper FA deſcriptus ſemicirculus FHA.

Eſt igitur, per præcedentem, tempus deſcenſus per arcum cycloidis BA, ad tempus motus æquabilis per rectam BG cum celeritate dimidia ex BG, ſicut arcus ſemicirculi FHA ad rectam FA. Tempus vero dicti motus æquabilis per BG, æquatur tempori deſcenſus naturaliter accelerati per eandem BG, ſive per EA, quæ ipſi parallela eſt & æqualis, hoc eſt, tempori deſcenſus accelerati per axem DA *. Itaque tempus per

* Prop. 6. Galil. de motu Accel. [1]).

Du mouvement Cycloïdal.

aussi au temps de chute suivant l'axe DA, comme la circonférence FHA d'un demi-cercle est à son diamètre FA. C. Q. F. D.

Que si l'on suppose la cavité de la cycloïde construite entièrement, il est certain que le mobile, après être descendu le long de l'arc BA, montera, en continuant son mouvement à partir de là, le long du deuxième arc symétrique avec le premier * et y employera autant de temps que pour la descente *; et qu'après cela il reviendra de nouveau à B en passant par A et que les temps de ces oscillations cycloïdales d'amplitudes quelconques seront chacun au temps de la chute verticale suivant l'axe DA, comme la circonférence totale du cercle est à son diamètre.

* Prop. 9. de cette Partie.

* Prop. 11. de cette Partie.

PROPOSITION XXVI.

Les mêmes choses étant supposées, et une horizontale HI *étant en outre tirée* [Fig. 51] *qui coupe l'arc* BA *en* I *et la circonférence* FHA *en* H, *je dis que le temps nécessaire pour parcourir l'arc* BI *est à celui dans lequel est parcouru l'arc* IA *après* BI, *comme l'arc* FH *de la circonférence est à* HA.

En effet, supposons que la droite HI coupe la tangente BG en K et l'axe DA en L. Le temps de la chute suivant l'arc BA est alors à celui du mouvement uniforme suivant BG avec la moitié de la vitesse qui proviendrait d'une chute suivant BG, comme l'arc FHA est à la droite FA *. Or, le temps du dit mouvement uniforme suivant BG est au temps d'un mouvement uniforme suivant BK avec la même demi-vitesse, comme la longueur BG est à BK ou comme FA est à FL. D'autre part le temps d'un mouvement uniforme avec la vitesse mentionnée suivant BK est au temps d'une chute suivant BI, comme FL est à l'arc FH *. On aura donc „ex æquo" [1]): le temps d'une chute suivant BA est à celui d'une chute suivant BI comme l'arc FHA est à l'arc FH. Et, par division et conversion: le temps d'une chute le long de BI est à celui d'une chute le long de IA après BI, comme l'arc FH est à l'arc HA. C. Q. F. D.

* Prop. 24. de cette Partie.

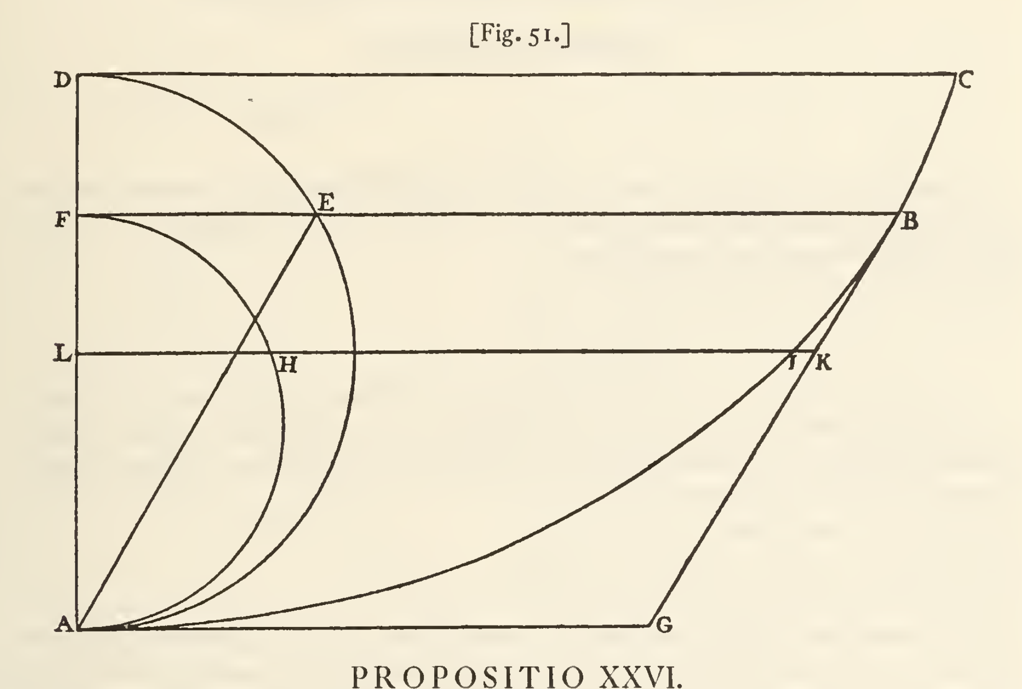
* Prop. 24. de cette Partie.

[1]) Comparez sur cette expression d'Euclide la p. 396 du T. XVI.

arcum BA, erit quoque ad tempus descensus per axem DA, ut semicirculi circumferentia FHA ad diametrum FA. quod erat demonstrandum. De motu in Cycloide.

Quod si tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, constat mobile, postquam per arcum (*p.* 58). BA descenderit, inde continuato motu per alterum ipsi æqualem arcum ascensurum *, * Prop. 9. huj. atque in eo tantundem temporis atque descendendo consumpturum *. * Prop. 11. huj. Deinde rursus per A ad B perventurum, ac singularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parvisve cycloidis arcubus peractarum, tempora fore ad tempus casus perpendicularis per axem DA, sicut circumferentia circuli tota ad diametrum suam.

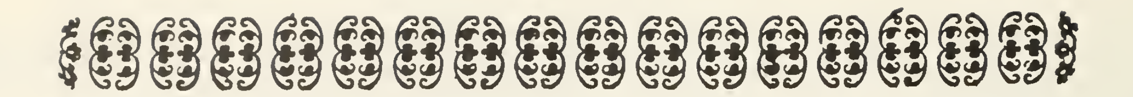
[Fig. 51.]



PROPOSITIO XXVI.

Iisdem positis, si ducatur insuper recta horizontalis HI [Fig. 51] *quæ arcum* BA *secet in* I, *circumferentiam vero* FHA *in* H: *dico tempus per arcum* BI, *ad tempus per arcum* IA *post* BI, *eam rationem habere quam arcus circumferentiæ* FH *ad* HA.

Occurrat enim recta HI tangenti BG in K, axi DA in L. Est itaque tempus per arcum BA, ad tempus motus æquabilis per BG cum celeritate dimidia ex BG, sicut arcus FHA ad rectam FA *. Tempus autem dicti motus æquabilis per BG, est ad tem- * Prop. 24. huj. pus motus æquabilis per BK, cum eadem celeritate dimidia ex BG, sicut BG ad BK longitudine, hoc est, sicut FA ad FL. Et rursus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per BK, ad tempus per arcum BI, sicut FL ad arcum FH *. Igitur ex æquo [1]) * Prop. 24. huj. erit tempus per arcum BA ad tempus per BI, ut arcus FHA ad FH. Et dividendo, & convertendo, tempus per BI, ad tempus per IA post BI, ut arcus FH ad HA. quod erat demonstrandum.



TROISIÈME PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE.

De l'Evolution et de la Dimenſion des Lignes courbes.

DEFINITIONS.

I.

Appelons ligne courbée vers un ſeul côté une ligne que toutes ſes tangentes touchent du même côté. Que ſi la ligne a quelques parties droites, les prolongements de celles-ci ſeront conſidérés comme des tangentes.

II.

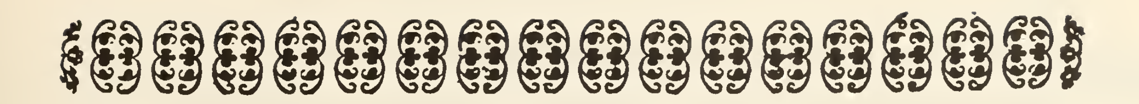
Lorſque deux lignes de cette eſpèce émanent d'un même point et que la convexité de l'une eſt tournée vers la concavité de l'autre, comme ſont placées dans la figure ci-jointe [Fig. 52] *les courbes* ABC *et* ADE, *elles ſeront dites concaves l'une et l'autre vers le même côté.*

III.

Si l'on conſidère un fil, ou une ligne flexible, enroulé ſur une ligne courbée vers un ſeul côté, et que, une extrémité du fil demeurant attachée à la courbe, l'autre en eſt écartée de telle manière que la partie libre du fil reſte toujours tendue, il eſt manifeſte qu'une certaine autre courbe eſt décrite par cette extrémité du fil. Donnons-lui le nom de Développante.

IV.

Et que celle ſur laquelle le fil eſt enroulé porte le nom de Développée. Dans la figure qui précède [Fig. 52] ABC *eſt la développée et* ADE *la développante correspondante de ſorte que, lorſque l'extrémité du fil paſſe de* A *en* D, *la partie tendue du fil eſt la droite* DB, *le reſte* BC *étant encore enroulé ſur la courbe* ABC. *Il eſt manifeſte que* DB *touche la développée en* B.



HOROLOGII OSCILLATORII

Pars Tertia.

De linearum curvarum evolutione & dimenſione.

DEFINITIONES.

[Fig. 52.]

I.

Linea in unam partem inflexa vocetur quam rectæ omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quasdam rectas lineas habuerit, hæ ipſæ productæ pro tangentibus habentur.

II.

Cum autem duæ hujusmodi lineæ ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius obverſa ſit ad cavitatem alterius, quales ſunt in figura adſcripta [Fig. 52] *curvæ* ABC, ADE, *ambæ in eandem partem cavæ dicantur.*

III.

Si lineæ, in unam partem cavæ, filum ſeu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi | *affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ ſoluta eſt ſemper ex-* (p. 60).
tenſa maneat; manifeſtum eſt curvam quandam aliam hac fili extremitate deſcribi. Vocetur autem ea, Deſcripta ex evolutione.

IV.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura ſuperiori [Fig. 52], ABC *eſt evoluta*, ADE *deſcripta ex evolutione* ABC, *ut nempe cum extremitas fili ex* A *venit in* D, *pars fili extenſa ſit* DB *recta, reliqua parte* BC *adhuc applicata curvæ* ABC. *Manifeſtum eſt autem* DB *tangere evolutam in* B.

De l'évolution des courbes.

PROPOSITION I[1]).

Toute tangente à la développée rencontrera la développante à angles droits.

Soit AB [Fig. 53] la développée et AH la ligne décrite par ſon évolution. Puiſſe la droite FDC, tangente en D à la courbe AD, couper en C la courbe ACH. Je dis qu'il la coupe à angles droits, en d'autres termes que ſi l'on mène la droite CE perpendiculairement à CD elle touche la courbe ACH en C. En effet, puiſque DC touche la développée en D, il apparaît qu'elle repréſente la poſition du fil au moment où ſon extrémité eſt parvenue juſqu'au point C; et ſi nous réuſſiſſons à démontrer que le fil, dans la deſcription entière de la courbe ACH, n'atteint nulle part la droite CE excepté au point C, il ſera manifeſte que la droite CE touche la courbe ACH en ce point.

Prenons ſur AC un point H quelconque différent de C et conſidérons d'abord le cas où ce point eſt plus éloigné de l'origine de la développante que le point C. Suppoſons que la partie libre du fil ſoit HG lorsqu'il eſt parvenu avec ſon extrémité juſqu'au point H. HG touche donc la ligne AB en G. Et comme dans la deſcription de la partie CH de la courbe, l'arc DG a été développé, CD prolongée du côté D coupera HG, p. e. en F. Appelons E le point de rencontre de GH avec la droite CE. Puiſque l'enſemble des deux lignes CF et FG eſt alors plus grand que DG, que cette dernière ſoit courbée ou droite, il en réſultera, lorſqu'on ajoute de part et d'autre la droite DC, que la ſomme des droites CF et FG eſt plus grande que celle de la droite CD et de DG. Mais à cauſe de l'évolution du fil, il apparaît que la droite HG eſt égale à la ſomme de la droite CD et de DG. Par conſéquent la ſomme CF + FG ſera auſſi plus grande que la droite HG; et en retranchant la partie commune FG, on trouve que CF eſt plus grande que HF. Or, FE > FC, parce que l'angle C du triangle FCE eſt droit. FE eſt donc a fortiori plus grande que FH. D'où il reſſort que du moins de ce côté-là du point C l'extrémité du fil n'arrive pas juſqu'à la droite CE.

Suppoſons maintenant le point H plus près de l'origine de la développante que le point C [Fig. 54] et ſoit HG la poſition du fil au moment où ſon extrémité eſt en H. Tirons les droites DG et DH dont la dernière rencontre la droite CE en E. Il eſt clair que la droite DG ne peut ſe trouver ſur le prolongement de HG et que HGD ſera par conſéquent un triangle. Or, comme la droite DG eſt ou bien plus petite que DKG ou bien ſon égale, ſavoir dans le cas ou la partie DG de la développée eſt droite, on trouvera, en ajoutant GH de part et d'autre, que la ſomme des droites DG et

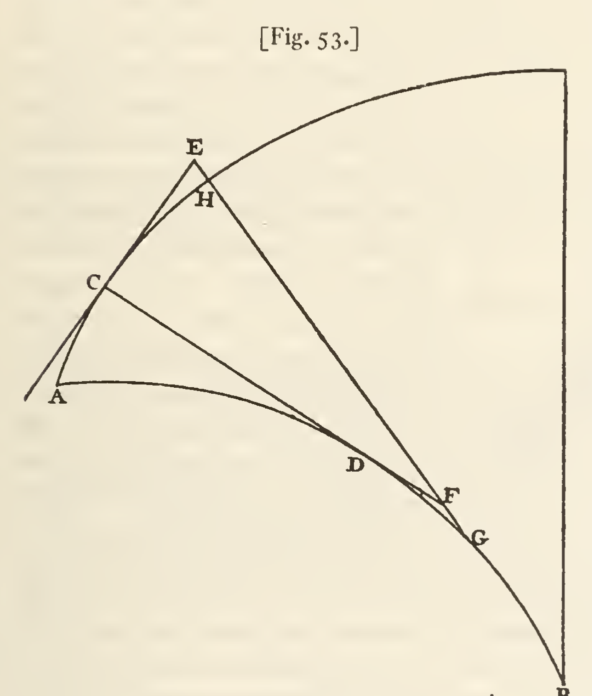
[1]) Comparez sur cette Proposition et les trois suivantes les Théorèmes de 1659 des p. 398 et suiv. du T. XIV.

PROPOSITIO I[1]).

De linearum curvarum evolutione.

Recta omnis, quæ evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione descriptæ ad angulos rectos.

[Fig. 53.]



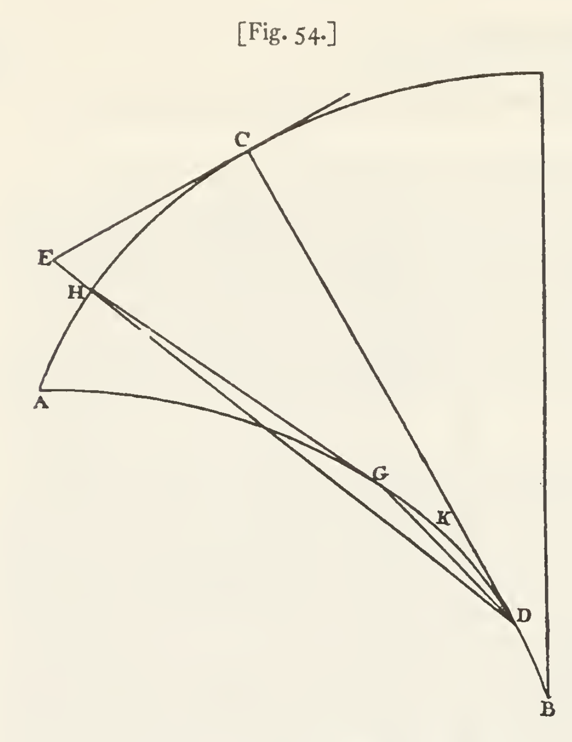
Sit AB [Fig. 53] evoluta, AH vero quæ ex evolutione illius descripta est. Recta autem FDC, tangens curvam AD in D, occurrat in C curvæ ACH. Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc est, si ducatur CE recta perpendicularis CD, dico eam in C tangere curvam ACH. Quia enim DC tangit evolutam in D, apparet ipsam referre positionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C. Quod si igitur ostenderimus filum, in tota reliqua descriptione curvæ ACH, nusquam pertingere ad rectam CE præterquam in C puncto, ma|nifestum erit rectam CE (*p.* 61). ibidem curvam ACH contingere.

Sumatur punctum aliquod in AC præter C, quod sit H, sitque primo remotius à principio evolutionis A quam punctum C, & intelligatur pars libera esse HG, cum extremitate sua ad H pervenit. Tangit ergo HG lineam AB in G. Cumque interea dum describitur pars curvæ CH, evolutus sit arcus DG, occurret CD à parte D producta ipsi HG, ut in F. Ponatur autem GH occurrere rectæ CE in E. Quia igitur duæ simul DF, FG, majores sunt quam DG, sive curva ea fuerit sive recta: fiet addendo utrinque rectam DC, ut rectæ CF, FG simul majores sint recta CD & ipsa DG. Sed propter evolutionem, apparet utrisque simul, rectæ CD, & lineæ DG, æquari rectam HG. Ergo duæ simul CF, FG majores quoque erunt recta HG; & ablata communi FG, erit CF major quam HF. Sed FE major est quam FC, quia angulus C trianguli FCE est rectus. Ergo FE omnino major quam FH. Unde apparet, ab hac quidem parte puncti C, fili extremitatem non pertingere ad rectam CE.

Sit jam punctum H propinquius principio evolutionis A quam punctum C [Fig. 54], sitque fili positio HG, tunc cum ejus extremitas esset in H, & ducantur rectæ DG, DH, quarum hæc occurrat rectæ CE in E: apparet autem DG rectam non posse esse in directum ipsi HG, adeoque HGD fore triangulum. Jam quia recta DG vel minor est quam DKG, vel eadem, si nempe evolutæ pars DG recta sit; additâ utrique GH,

De l'évolution des courbes.

[Fig. 54.]



GH est inférieure ou égale à DKG + GH ou bien à la droite DC qui est égale à cette dernière somme. Mais la droite DH est plus petite que la somme des droites DG et GH. DH est donc à plus forte raison inférieure à la droite DC. Or, DE > DC, puisque dans le triangle DCE l'angle C est droit. Par conséquent DH est beaucoup plus petite que DE. Le point H. c.à.d. l'extrémité du fil GH, est donc situé à l'intérieur de l'angle DCE. D'où il appert qu'entre A et C aussi l'extrémité du fil n'arrive nulle part jusqu'à la droite CE. Partant CE touche la courbe AC en C; c'est pourquoi DC, à laquelle CE est perpendiculaire par construction, coupe la courbe à angles droits. C. Q. F. D.

Par là il est encore manifeste que AHC est courbée vers un seul côté et qu'elle est concave vers le même côté que AGB, par l'évolution de laquelle elle a été décrite. Car toutes les tangentes à la ligne AHC tombent en dehors de l'espace DGAHC; mais toutes les tangentes à la ligne AGD tombent dans lui. D'où il est évident que la concavité AHC regarde la convexité AGD.

PROPOSITION II.

Toute ligne courbe terminée, courbée vers un seul côté, telle que ABD [Fig. 55] *peut être divisée en un si grand nombre de parties qui si l'on tire les cordes qui soustendent chacun des arcs, telles que* AB, BC *et* CD, *et ensuite depuis chacun des points de division et aussi depuis l'extrémité de la courbe les tangentes* AN, BO, CP, *chacune jusqu'à la normale à la courbe au point de division suivant* (BN, CO, DP *sont des normales*), *que chaque corde, dis-je, aura à la normale correspondante* (AB *à* BN, BC *à* CO, CD *à* DP) *un rapport supérieur à tout rapport arbitrairement donné.*

En effet, soit donné le rapport EF : FG [Fig. 55] de deux droites formant les côtés d'un angle droit F et tirons la droite GEH.

Supposons d'abord la courbe ABD divisée par les points B, C en des parties si petites que les tangentes à la courbe en deux de ces points qui se suivent se coupent l'une l'autre suivant des angles dont chacun est supérieur à l'angle FEH, tels que ∠ AKB, ∠ BLC et ∠ CMD. La possibilité d'une pareille division est trop évidente

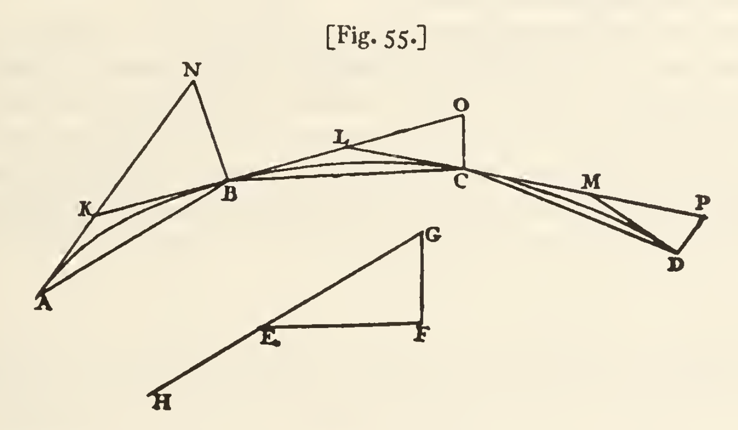
erunt rectæ DG, GH ſimul minores vel | æquales duabus iſtis, ſcilicet DKG & GH, (p. 62).
ſive his æquali rectæ DC. Duabus autem rectis DG, GH minor eſt recta DH. Ergo DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.
hæc minor utique erit rectâ DC. Sed DE major eſt quam DC, quia in triangulo DCE angulus C eſt rectus. Ergo DH multo minor quam DE. Situm eſt ergo punctum H, hoc eſt extremitas fili GH, intra angulum DCE. Unde apparet neque inter A & C usquam illam pertingere ad rectam CE. Ergo CE tangit curvam AC in C; ac proinde DC, cui CE ducta eſt perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos. quod erat demonſtrandum.

Hinc etiam manifeſtum eſt curvam AHC in partem unam inflexam eſſe, & in eandem partem cavam ac ipſa AGB, cujus evolutione deſcripta eſt. Omnes enim tangentes lineæ AHC, cadunt extra ſpatium DGAHC: omnes vero tangentes lineæ AGD, intra dictum ſpatium. unde liquet cavitatem AHC reſpicere convexitatem AGD.

PROPOSITIO II.

Omnis curva linea terminata, in unam partem cava, ut ABD [Fig. 55], *poteſt in tot partes dividi, ut ſi ſingulis partibus ſubtenſæ rectæ ducantur, velut* AB, BC, CD; *& à ſingulis item diviſionis punctis, ipſaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvam tangentes, ut* AN, BO, CP, *quæ occurrant iis, quæ in proxime ſequentibus diviſionis punctis curvæ ad angulos rectos inſiſtunt, quales ſunt lineæ* BN, CO, DP; *ut inquam ſubtenſa quæque habeat ad ſibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut* AB *ad* BN, BC *ad* CO, CD *ad* DP, *rationem majorem quavis ratione propoſita.*

[Fig. 55.]



Sit enim data [Fig. 55] ratio lineæ EF ad FG, quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta GEH.

Intelligatur primo curva ABD in partes tam exiguas ſecta punctis B, C, ut tangentes quæ ad bina quæque inter ſe proxima puncta curvam contingunt, occurrant ſibi mutuo ſecundum angulos qui ſinguli majores ſint angulo FEH; quales ſunt anguli AKB, BLC, CMD. quod quidem fieri poſſe evidentius eſt quam ut demonſtratione

De l'évolution des courbes.

pour exiger une démonſtration. Les cordes AB, BC et CD ayant été tirées et les normales à la courbe BN, CO, DP ayant été érigées, leſquelles rencontrent les prolongements de AK, de BL et de CM en N, O et P, je dis que chacun des rapports de deux droites AB : BN, BC : CO et CD : CP eſt ſupérieur au rapport EF : FG.

Car, puiſque ∠ AKB > ∠ HEF, ∠ NKB, ſupplément du premier, ſera plus petit que ∠ GEF. Or, l'angle B du triangle KBN eſt droit, comme F du triangle EFG. Par conſéquent KB : BN > EF : FG. Mais AB > KB, puiſque l'angle K du triangle AKB eſt obtus; en effet, il eſt plus grand que l'angle HEF lequel eſt obtus par conſtruction. Le rapport AB : BN ſera donc plus grand que le rapport KB : BN et à plus forte raiſon que le rapport EF : FG. On démontrera de la même manière que les rapports BC : CO et CD : DP ſont l'un et l'autre plus grands que le rapport EF : FG. La propoſition eſt donc démontrée.

PROPOSITION III.

Deux lignes courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté ne peuvent émaner d'un ſeul point dans une telle poſition l'une par rapport à l'autre que toute droite normale à l'une ſoit auſſi normale à l'autre.

En effet, ſoient ACE et AGK poſſédant l'extrémité commune A, ſi cela eſt poſſible, des lignes courbes de cette eſpèce [Fig. 56] et ſoit KE une normale en un point quelconque K de la courbe extérieure à cette dernière: étant normale à cette courbe KE le ſera donc auſſi à la courbe ACE.

Nous pouvons prendre maintenant quelque droite Q plus grande que la courbe KGA. Suppoſons KGA diviſée par les points H, G, F, comme il a été dit dans la propoſition précédente, en un ſi grand nombre de parties que chacune des cordes KH, HG, GF, FA ait à la normale adjacente HM, GN, FO ou AP un rapport ſupérieur à celui de la ligne Q à la droite KE. L'enſemble des cordes nommées aura donc auſſi à la ſomme de toutes les normales un rapport ſupérieur à Q : KE. Prolongeons maintenant ces mêmes normales et puiſſent-elles couper la courbe ACE en D,

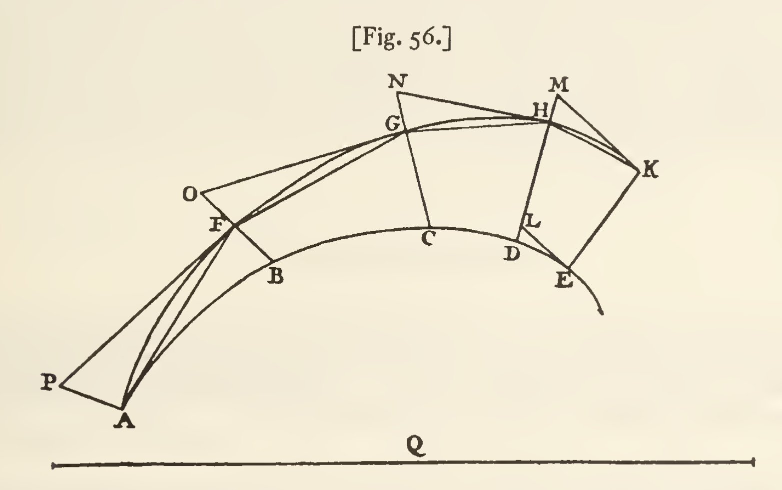
indigeat. Ductis jam subtensis AB, BC, CD, & erectis curvæ perpendicularibus BN, CO, DP, quæ occurrant productis AK, BL, CM, in N, O, P: dico rationes singulas rectarum, AB ad BN, BC ad CO, CD ad DP, majores esse ratione EF ad FG. De linearum curvarum evolutione.

Quia enim angulus AKB major est angulo HEF, erit residuus illius ad duos rectos, (p. 63). nimirum angulus NKB, minor angulo GEF. Angulus autem B trianguli KBN est rectus, sicut & angulus F in triangulo EFG. Ergo major erit ratio KB ad BN quam EF ad FG. Sed AB major est quam KB, quoniam angulus K in triangulo AKB est obtusus, est enim major angulo HEF qui est obtusus ex constructione. Ergo ratio AB ad BN major erit ratione KB ad BN, ac proinde omnino major ratione EF ad FG. Eodem modo & ratio BC ad CO, & CD ad DP, major ostendetur ratione EF ad FG. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO III.

Duæ curvæ in unam partem inflexæ & in easdem partes cavæ ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad se invicem comparatæ, ut recta omnis quæ alteri earum ad angulos rectos occurrit, similiter occurrat & reliquæ.

[Fig. 56.]



Sint enim, si fieri potest, hujusmodi lineæ curvæ ACE, AGK, communem terminum habentes A [Fig. 56], & sumpto in exteriore illarum puncto quolibet K, sit inde educta KE recta, curvæ AGK occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ ACE.

Potest jam recta quædam sumi major curva KGA, quæ sit Q. Divisa autem intelligatur ipsa KGA, ut in propositione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis (p. 64). HGF, ut subtensæ singulæ KH, HG, GF, FA, ad perpendiculares curvæ sibi contiguas HM, GN, FO, AP majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam KE. Itaque & omnes simul dictæ subtensæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad KE. Producantur autem perpendiculares eædem & occur-

De l'évolution des courbes.

C, et B, normalement par hypothèſe. On aura maintenant: KE < MD. En effet, EL, perpendiculaire à KE, ſera tangente à la courbe ACE, puiſque KE lui eſt normale; EL coupera donc néceſſairement la droite MD entre D et M. Par conſéquent KE, qui eſt la plus courte de toutes les lignes compriſes entre les parallèles EL et KM, ſera plus petite que ML et à plus forte raiſon que MD. On démontrera de la même manière que HD < NC, GC < OB, et FB < PA. Comme on a donc PA > FB, la ſomme PA + OF ſera ſupérieure à OB. Pareillement, puiſque OB > GC, la ſomme OB + NG ſera plus grande que NC. Mais la ſomme PA + OF était ſupérieure à OB. Par conſéquent la ſomme des trois termes PA, OF et NG ſera certainement plus grande que NC. Derechef, puiſque NC > HD, la ſomme NC + MH ſera plus grande que MD. Partant, ſi l'on prend au lieu de NC la ſomme des trois termes PA, OF, NG qui lui eſt ſupérieure, la ſomme des quatre grandeurs PA, OF, NG et MH ſera a-fortiori plus grande que MD: et par conſéquent cette même ſomme ſera auſſi certainement plus grande que la droite KE, puiſque MD ſurpaſſait KE en longueur. Or, nous avons dit que la ſomme des ſouſtangentes AF + FG + GH + HK a à celle de toutes les normales PA, OF, NG et MH un rapport ſupérieur à celui de la ligne Q à KE. Par conſéquent la ſomme de toutes les cordes ſera plus grande que la droite Q. Mais cette dernière avait été priſe plus grande que la courbe AGK. La ſomme des cordes AF + FG + GK + HK ſera donc plus grande que la courbe AGK aux arcs de laquelle ces cordes correſpondent; ce qui eſt abſurde puiſque chacune des cordes eſt plus petite que l'arc correſpondant.

PROPOSITION IV.

Si d'un même point partent deux lignes courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté, et ainſi ſituées l'une par rapport à l'autre que toutes les tangentes à l'une d'elles coupent l'autre à angles droits, cette deuxième ſera la développante de la première à partir du point commun.

Soient données les lignes ABC et ADE [Fig. 57] courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté, poſſédant l'extrémité commune A. Puiſſent toutes les tangentes à la ligne ABC, telles que BD et CE, couper la ligne ADE normalement. Je dis que ADE eſt décrite par l'évolution de ABC à partir de l'extrémité A.

En effet, ſuppoſons, ſi cela eſt poſſible, que par la dite évolution ſoit décrite une certaine autre courbe AFG. Par conſéquent des lignes droites quelconques, tangentes à la développée ABC, telles que BD et CE, couperont cette courbe AFG à angles droits*, p. e. en F et G. Mais par hypothèſe ces mêmes tangentes ſont auſſi normales à la ligne ADE. Or, nous avons affaire à des courbes ADE et AFG, ſe terminant au même point A, courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même

* Prop. 1. de cette Partie.

rant curvæ ACE in D, C, B, nimirum ad angulos rectos ex hypothesi. Erit jam KE minor quam MD. Etenim, ducta EL ipsi KE perpendiculari, quoniam KE occurrit lineæ curvæ ECA ad angulos rectos, tanget EL curvam ACE, occurretque necessario rectæ MD interD & M. Unde cum KE sit brevissima omnium quæ cadunt inter parallelas EL, KM, erit ea minor quam ML, ac proinde minor quoque omnino quam MD. Eodem modo & HD minor ostendetur quam NC, & GC minor quam OB, & FB minor quam PA. Cum sit ergo PA major quam FB, erunt duæ simul PA, OF majores quam OB. Item quum OB sit major quam GC, erunt duæ simul OB, NG, majores quam NC. Sed duæ PA, OF majores erant quam OB. Itaque tres simul PA, OF, NG omnino majores erunt quam NC. Rursus, quia NC major quam HD, erunt duæ simul NC, MH majores quam MD. Unde, si loco NC sumantur tres hæ ipsa majores PA, OF, NG, erunt omnino hæ quatuor PA, OF, NG, MH majores quam MD. ac proinde eædem quoque omnino majores recta KE, quia ipsa MD major erat quam KE. Diximus autem subtensas omnes AF, FG, GH, HK majorem rationem habere ad omnes perpendiculares PA, OF, NG, MH, quam linea Q ad KE. Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam sit KE, habebunt dictæ subtensæ ad KE omnino majorem rationem quam Q ad KE. Ergo subtensæ simul sumptæ majores erunt rectâ Q. Hæc autem ipsa curvâ AGK major sumpta fuit. Ergo subtensæ AF, FG, GH, HK simul majores erunt curva AGK cujus partibus subtenduntur; quod est absurdum, cum singulæ suis arcubus sint minores. Non igitur poterunt esse duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit sese habeant. quod erat demonstrandum. De linearum curvarum evolutione.

PROPOSITIO IV.

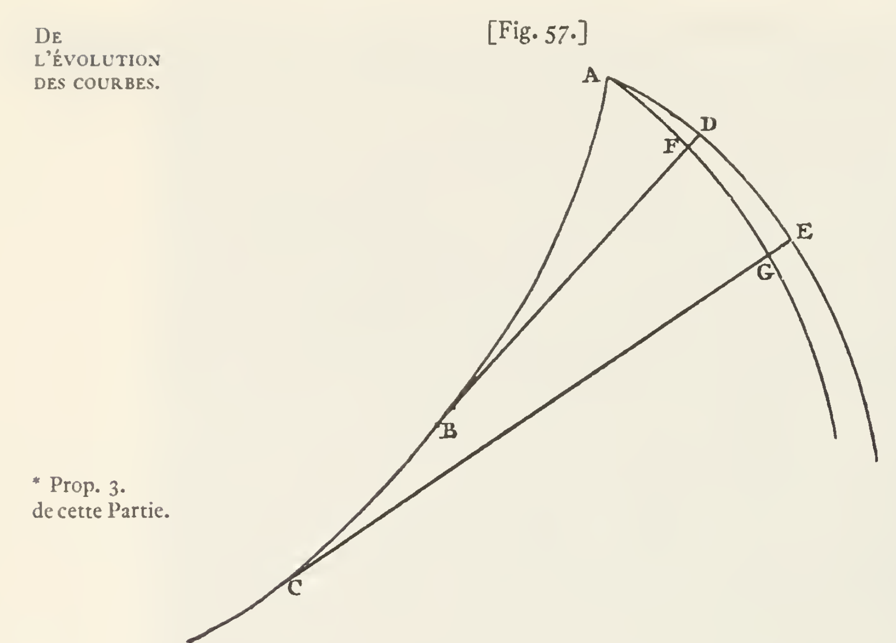
Si ab eodem puncto duæ lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, ita vero mutuo com|paratæ ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; posterior hæc prioris evolutione, à puncto communi cœpta, describetur. (p. 65).

Sunto lineæ ABC, ADE [Fig. 57], in partem unam inflexæ, & quarum utraque in easdem partes cava existat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam ABC, velut BD, CE, occurrant lineæ ADE ad angulos rectos. Dico evolutione ipsius ABC, à termino A incepta, describi ADE.

Si enim fieri potest, describatur dicta evolutione alia quædam curva AFG. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam ABC tangentes, ut BD, CE, occurrent ipsi AFG ad angulos rectos *, puta in F & G. Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ ADE. Sunt igitur lineæ curvæ ADE, AFG, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utra- * Prop. 1. huj.

DE L'ÉVOLUTION DES COURBES.

[Fig. 57.]



côté, puifqu'elles font concaves vers le même côté que ABC; car ceci eft vrai de la ligne ADE par hypothèfe et de la ligne AFG d'après la première propofition de cette Partie. De plus toutes les normales à l'une d'elles font auffi normales à l'autre. Mais il a été démontré plus haut que ceci eft impoffible *. Il eft donc établi que ADE ellemême fera décrite par l'évolution de la ligne ABC. C. Q. F. D.

* Prop. 3. de cette Partie.

PROPOSITION V.

Lorfqu'une droite touche une cycloïde en fon fommet et qu'on conftruit fur cette droite prife pour bafe une autre cycloïde, femblable et égale à la première, à partir du point coïncidant avec le fommet nommé, une tangente quelconque à la cycloïde inférieure fera normale à l'arc cycloïdal fupérieur [1]).

Suppofons que la droite AG [Fig. 58] touche la cycloïde en fon fommet A et que fur cette droite prife pour bafe une autre cycloïde AEF à fommet F foit conftruite. Soit BK une tangente à la cycloïde ABC. Je dis que cette tangente, prolongée jufqu'à la cycloïde AEF, la rencontrera à angles droits.

En effet, décrivons autour de AD, axe de la cycloïde ABC, le cercle générateur AHD qui coupe BH, parallèle à la bafe, en H, et tirons la droite HA. Il s'enfuit, puifque BK touche la cycloïde en B, qu'elle eft parallèle à la droite HA *. Par conféquent AHBK eft un parallélogramme et AK eft égale à HB, c.à.d. à l'arc AH *. Décrivons maintenant le cercle KM égal au cercle générateur AHD, touchant la bafe AG en K et coupant la droite BK prolongée en E. Comme BKE eft parallèle à

* Propos. 15. de la 2ième Partie.
* Propos. 14. de la 2ième Partie.

[1]) Comparez sur cette Propofition et la fuivante les p. 404—405 du T. XIV et 142—145 du T. XVII.

que in eandem atque ipſa ABC; nam de linea ADE conſtat ex hypotheſi, de AFG vero ex propoſitione prima hujus; & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri ſimiliter occurrunt. quod quidem fieri non poſſe antea oſtenſum eſt *. Quare conſtat ipſam ADE deſcriptum iri evolutione lineæ ABC. quod erat demonſtrandum.

De linearum curvarum evolutione.

* Prop. 3. huj.

PROPOSITIO V.

(p. 66).

Si Cycloïdem recta linea in vertice contingat, ſuper qua, tanquam baſi, alia cyclois priori ſimilis & æqualis conſtituatur, initium ſumens à puncto dicti verticis; recta quælibet inferiorem cycloidem tangens, occurret ſuperioris portioni, ſibi ſuperpoſitæ, ad angulos rectos [1]).

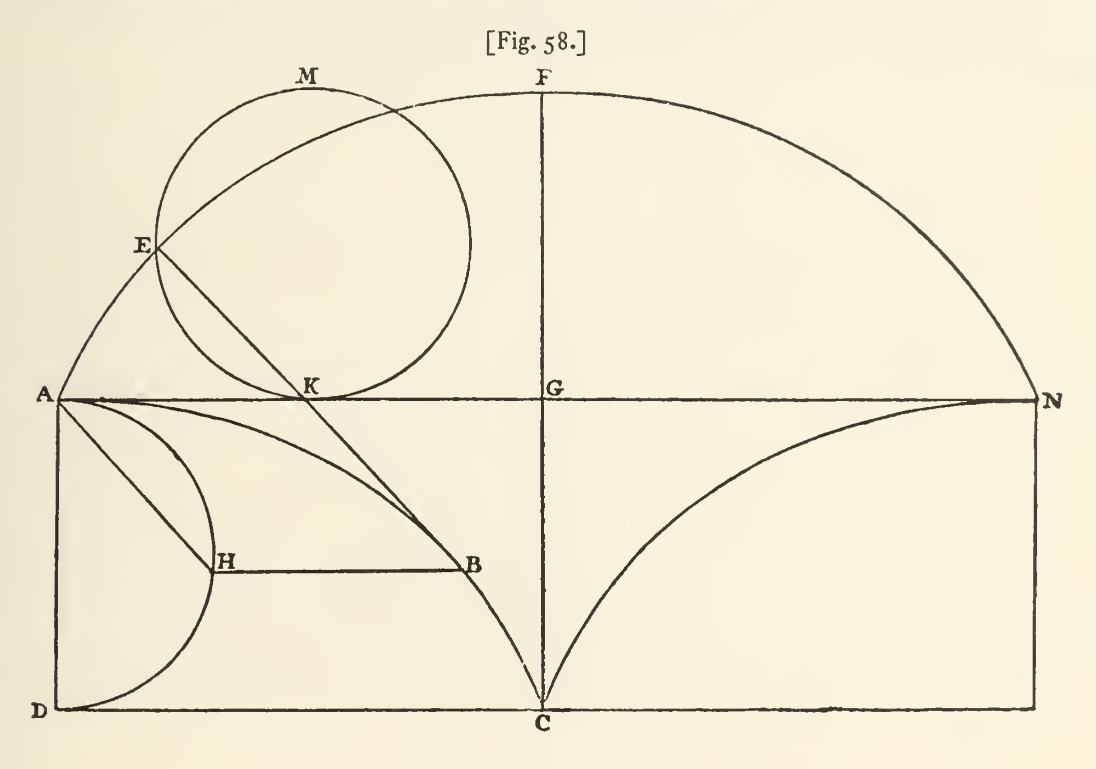
Tangat cycloidem ABC in vertice A recta AG [Fig. 58], ſuper qua, tanquam baſi, ſimilis aliqua cyclois conſtituta ſit AEF, cujus vertex F. Cycloidem autem ABC tangat recta BK in B. Dico eam productam occurrere cycloidi AEF ad angulos rectos.

Deſcribatur enim circa AD, axem cycloidis ABC, circulus genitor AHD, cui occurrat BH, baſi parallela, in H, & jungatur HA. Quia ergo BK tangit cycloidem in B, conſtat eam parallelam eſſe rectæ HA *. Itaque AHBK parallelogrammum eſt, ac proinde AK æqualis HB, hoc eſt, arcui AH *. Sit porro jam deſcriptus circulus KM, genitori circulo, hoc eſt ipſi AHD, æqualis, qui tangat baſin AG in K, rectam vero

* Propos. 15. partis 2.

* Propos. 14. partis 2.

[Fig. 58.]



De l'évolution des courbes.

AH et par conſéquent EKA = KAH, il eſt manifeſte que le prolongement de BK coupe de la circonférence KM un arc égal à celui que la droite AH coupe de la circonférence AHD. Par conſéquent l'arc KE eſt égal à l'arc AH, c.à.d. à la droite HB et à la droite KA. Mais de cette égalité il réſulte, d'après une propriété de la cycloïde, puisque le cercle générateur MK a touché la règle en K, que le point décrivant la cycloïde à paſſé par E. La droite KE rencontre donc la cycloïde en E à angles droits *. Or, KE n'eſt autre choſe que le prolongement de BK. Il eſt donc évident que BK prolongée juſqu'à la cycloïde lui eſt normale. C. Q. F. D.

* Propos. 15. de la 2ième Partie.

PROPOSITION VI.

Par l'évolution, à partir du ſommet, d'une demi-cycloïde, une autre demi-cycloïde eſt décrite, égale et ſemblable à la première, dont la baſe coïncide avec la droite qui touche la cycloïde développée en ſon ſommet.

Soit donnée une demi-cycloïde ABC [Fig. 58] à laquelle ſoit impoſée une autre demi-cycloïde ſemblable AEF, comme dans la propoſition précédente. Je dis que lorſque la ligne flexible appliquée à la demi-cycloïde ABC eſt développée à partir du point A, elle décrit de ſon extrémité la demi-cycloïde AEF. En effet, puiſque les demi-cycloïdes ABC et AEF, courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté, de plus ſituées de ſorte que toutes les tangentes de la demi-cycloïde ABC coupent la demi-cycloïde AEF à angles droits, il s'enſuit que cette dernière eſt décrite par l'évolution de la première à partir du point A *. C. Q. F. D.

* Prop. 4. de cette Partie.

BK productam fecet in puncto E. Quia ergo ipfi AH parallela eft BKE, ac proinde angulus EKA æqualis KAH, manifeftum eft BK productam abfcindere à circulo KM arcum æqualem ei quem à circulo AHD abfcindit recta AH. Itaque arcus KE æqualis eft arcui AH, hoc eft rectæ HB, hoc eft rectæ KA. Hinc | vero fequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor MK tangebat regulam in K, punctum defcribens fuiffe in E. Itaque recta KE occurrit cycloidi in E ad angulos rectos*. Eft autem KE ipfa BK producta. Ergo patet productam BK occurrere cycloidi ad angulos rectos. quod erat demonftrandum.

De linearum curvarum evolutione.

(p. 67.)

* Propos 15. partis 2.

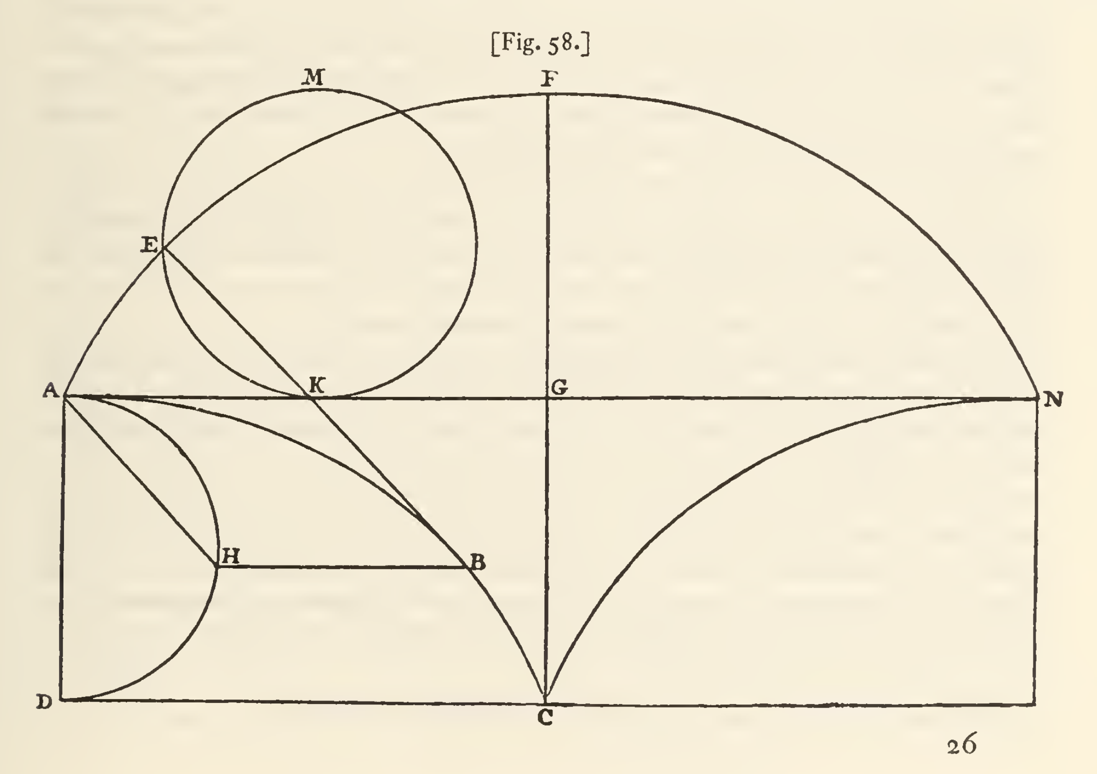
PROPOSITIO VI.

Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia femicyclois defcribitur evolutæ æqualis & fimilis, cujus bafis eft in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

Sit femicyclois ABC, cui fuperimpofita fit alia fimilis AEF, quemadmodum in propofitione præcedenti [Fig. 58]. Dico fi linea flexilis, circa femicycloidem ABC applicata, evolvatur, incipiendo ab A, eam defcribere extremitate fua ipfam femicycloidem AEF. Quia enim ex puncto A egrediuntur femicycloides ABC, AEF, in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea ita comparatæ, ut omnes tangentes femicycloidis ABC occurrant femicycloidi AEF ad angulos rectos, fequitur hanc evolutione illius, à termino A incepta, defcribi*. quod erat demonftrandum.

* Prop. 4. huj.

[Fig. 58.]



De l'évolution des courbes.

Et il apparaît que ſi nous conſtruiſons une demi-cycloïde CN ſymétrique avec ABC par rapport à la droite CG, une autre demi-cycloïde FN ſera décrite par l'extrémité du fil, ſoit par l'évolution de la courbe CN ſoit lorſque le fil, déjà tendu ſuivant CF, eſt enroulé ſur elle; et que cette demi-cycloïde formera avec la précédente, AEF, une cycloïde entière.

Par ces conſidérations, et par la Prop. XXV de la Chute des Corps peſants, la vérité de ce que nous avons dit plus haut dans la Conſtruction de l'Horloge ſur le mouvement uniforme du pendule eſt préſentement manifeſte. En effet, il eſt clair que le pendule, ſuſpendu et mis en mouvement entre une paire de lames courbées en forme de demi-cycloïde, décrit par ſon mouvement un arc de cycloïde et que par conſéquent ſes oſcillations, quelle que ſoit leur amplitude, ſont exécutées dans des temps égaux. Car il n'eſt d'aucune importance que le mobile parcoure une ſurface courbée en cycloïde ou bien qu'étant attaché à un fil il décrive cette même ligne en l'air, attendu que dans l'un et l'autre cas il eſt également libre et a la même inclinaiſon au mouvement dans tous les points de la courbe.

PROPOSITION VII.

La cycloïde eſt quadruple de ſon axe, en d'autres termes du diamètre du cercle générateur.

En effet d'après la figure précédente reproduite ici [Fig. 58] il apparaît que la demi-cycloïde ABC, égale au fil enroulé ſur elle, eſt double de ſon axe AD et que par conſéquent la cycloïde entière eſt quadruple de ſon axe, puiſqu'après l'évolution de toute la demi-cycloïde ABC, le fil coïncide avec la droite CF qui eſt double de AD, attendu que les axes des cycloïdes ABC et AEF ſont égaux.

Il apparaît auſſi que la tangente BE qui n'eſt autre que la partie tendue du fil d'abord appliquée à l'arc BA, eſt égale en longueur à ce dernier. Or, BE eſt le double de BK, ou de AH, puiſqu'il a été démontré dans la Propoſition V que KE = AH. L'arc cycloïdal AB ſera donc le double de la droite AH ou BK, BH étant parallèle à la baſe de la cycloïde, et cela quel que ſoit le point B choiſi ſur elle.

Le grand géomètre anglais Chriſtophe Wren a le premier trouvé cette meſure de la cycloïde [1]), mais d'une tout autre manière, et il a enſuite confirmé ſa propoſition par une démonſtration élégante qui a été publiée dans le livre ſur la cycloïde de Monſieur John Wallis [2]). Il exiſte en outre ſur cette ligne beaucoup de fort belles inventions des mathématiciens de nos jours, auxquelles ont ſurtout donné occaſion certains problèmes propoſés par Blaiſe Paſcal, Français qui excellait dans ces études. Celui-ci, faiſant le dénombrement tant de ſes inventions à lui que de celles des autres [3]) dit que Merſenne a le premier remarqué l'exiſtence de cette ligne dans la nature [4]); que

[1]) Comparez la p. 203 du T. XIV et la note 3 de la p. 145 du T. XVII.

Et apparet, ſi dimidiam cycloidem, ipſi ABC gemellam, contrario ſitu ab altera parte lineæ CG diſponamus, velut CN, ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extenſum in CF, circa eam replicatur, alteram ſemicycloidem FN fili extremitate deſcriptum iri, quæ ſimul cum priore AEF integram conſtituat. De linearum curvarum evolutione.

Atque ex his, & propoſitione 25 de deſcenſu gravium, manifeſtum jam eſt quod ſupra in Conſtructione Horologii de æquabili penduli motu dictum fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, ſecundum ſemicycloidem inflexas, ſuſpenſum agitatumque, motu ſuo cycloidis arcum deſcribere, ac proinde æqualibus temporibus quaſlibet ejus reciprocationes abſolvi. Non refert enim utrum in ſuperficie, ſecundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipſam in aëre percurrrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cyclois linea ſui axis, ſive diametri circuli genitoris, quadrupla eſt.

Repetita enim figura præcedenti [Fig. 58]: cum poſt totam ſemicycloidem ABC evolutam, filum occupet rectam CF; quæ dupla eſt AD, propterea quod axes cycloidum ABC, AEF ſunt æquales; apparet ſemicycloidem ipſam ABC, filo ſibi circum applicito æqualem, duplam eſſe ſui axis AD, ac totam proinde cycloidem axis ſui quadruplam. (*p.* 68).

Apparet etiam tangentem BE, quæ refert partem fili extenſam, antea curvæ parti BA applicatam, huic ipſi longitudine æquari. Eſt autem BE dupla ipſius BK, ſive AH, quoniam in propoſitione quinta oſtenſum eſt KE ipſi AH æqualem eſſe. Itaque pars cycloidis AB rectæ AH, ſive BK, dupla erit: exiſtente nimirum BH parallela baſi cycloidis: idque ubicunque in ea punctum B ſumptum fuerit.

Hanc cycloidis dimenſionem primus invenit, via tamen longe alia, eximius geometra Chriſtophorus Wren Anglus [1]), eamque deinde eleganti demonſtratione confirmavit, quæ edita eſt in libro de cycloide viri clariſſimi Ioannis Walliſij [2]). De eadem vero linea, alia quoque multa extant pulcherrima inventa noſtri temporis mathematicorum, quibus præcipuè occaſionem præbuere problemata quædam à Blaſio Paſchalio Gallo propoſita, qui in his ſtudiis præcellebat. Is cum ſua, tum aliorum inventa recenſens [3]), primum omnium Merſennum lineam hanc in rerum natura advertiſſe ait [4]). Primum

[2]) Voir sur cet ouvrage la note 3 de la p. 518 du T. II.

[3]) Dans son „Histoire de la Roulette" de 1658 (note 4 de la p. 350 du T. XIV). Voir aussi sa „Lettre de A. Dettonville a Monsieur Hugguens de Zulichem" de février 1659 (p. 196 du T. XIV).

[4]) C. de Waard, éditeur de la „Correspondance du P. Marin Mersenne" (voir la note 8 de la 41

De l'évolution des courbes.

Roberval a le premier défini ſes tangentes et meſuré ſes lieux plans et ſolides; que le même a trouvé les centres de gravité et du plan et de ſes parties; que Wren a le premier donné une droite égale à la courbe cycloïdale; que j'ai trouvé, moi le premier, la grandeur abſolue de la portion de la cycloïde qui en eſt coupée par une parallèle à la baſe paſſant par un point de l'axe diſtant du ſommet d'un quart de ſa longueur, portion égale à la moitié de l'hexagone équilatère inſcrit au cercle générateur [1]); enfin qu'il a déterminé lui-même les centres de gravité des ſolides et des demi-ſolides, tant de ceux obtenus par rotation autour de la baſe qu'autour de l'axe, et de même de leurs parties. Il dit en outre avoir trouvé (mais après avoir reçu de Wren la dimenſion de la cycloïde) le centre de gravité de la courbe et les dimenſions des ſurfaces convexes dans leſquelles ſont compriſes les ſolides mentionnés plus haut et leurs parties, ainſi que les centres de gravité de ces ſurfaces: et enfin les longueurs des courbes cycloïdales quelconques, tant allongées que raccourcies, c.à.d. de celles qui ſont décrites par un point pris à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle générateur. Les démonſtrations de ces choſes ont été publiées par Paſcal. Après quoi Monſieur Wallis a auſſi expoſé ſes propres méditations fort ſubtiles ſur la même ligne: il affirme avoir trouvé indépendamment toutes ces mêmes propriétés et avoir réſolu les problèmes propoſés par Paſcal. Le très ſavant Lovera s'attribue la même choſe [2]). Que les ſavants jugent, d'après leurs écrits, combien eſt dû à chacun d'eux. Pour nous, nous avons rapporté ce qui précède puiſqu'il nous ſemblait que nous ne devions pas paſſer ſous ſilence des inventions ſi belles par leſquelles il eſt arrivé que de toutes les lignes aucune n'eſt maintenant connue mieux et plus à fond que la cycloïde. Quant à notre méthode de

---

qui précède) écrit à la p. XXV de sa „Note sur la Vie de Mersenne", par laquelle le T. I de la „Correspondance" débute: „C'est pendant ce séjour [au couvent de la Place Royale à Paris], selon Pascal et certains autres savants que Mersenne avait trouvé, en 1615, la forme de la cycloïde, mais il ne fut question sans doute, à ce moment, que d'une étude sur la roue d'Aristote, problème alors très débattu". Toutefois de Waard est, lui aussi, d'avis que ce fut Mersenne qui proposa le premier le problème de la cycloïde: „pour croire que ce fût par l'étude de la roue d'Aristote que Mersenne, vers l'année 1615, fut amené à étudier le problème de la cycloïde, nous avons des raisons au moins aussi fortes que pour ajouter foi au récit un peu colorié de Pascal" („Une lettre inédite de Roberval du 6 janvier 1637 contenant le premier énoncé de la cycloïde" par C. de Waard, Bulletin des Sciences Math., réd. par E. Picard et P. Appell, Série II, T. XLV, Paris, Gauthier-Villars, 1921).

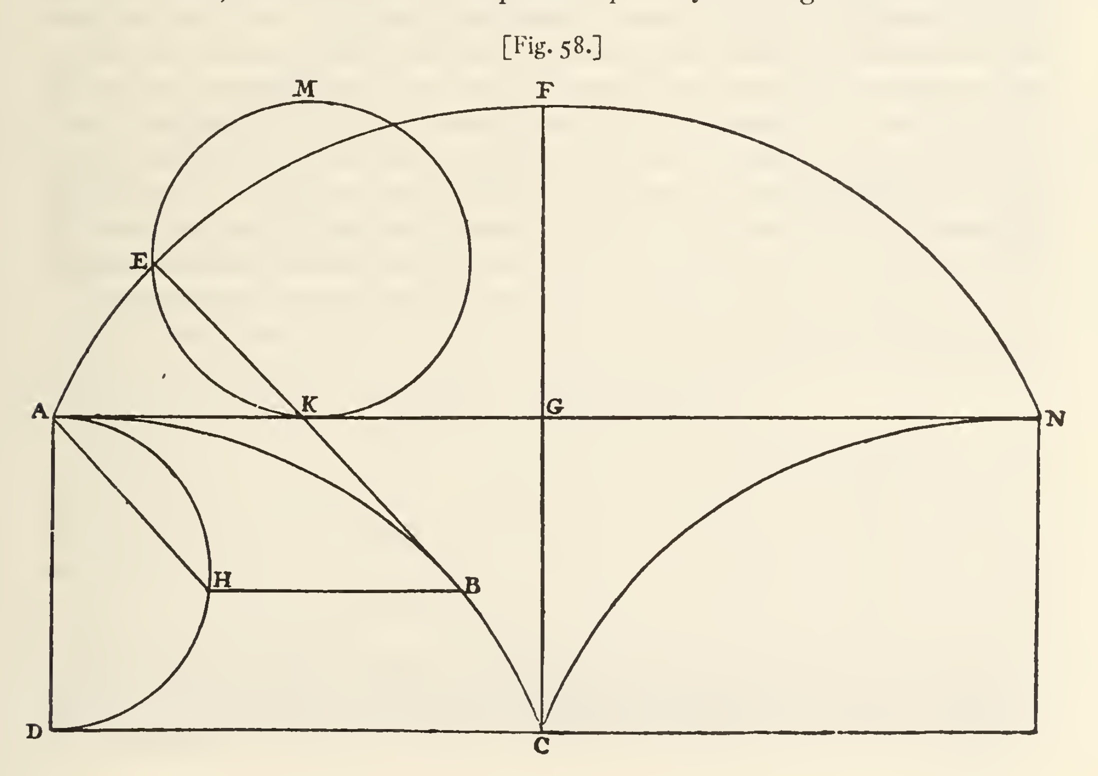
[1]) T. XIV, p. 350—351 (1658).

[2]) Voir sur les solutions de A. de la Loubère la note 6 de la p. 346 du T. II.

Robervallium tangentes ejus defini|viſſe, ac plana & ſolida dimenſum eſſe. Item centra (p. 69). gravitatis tum plani, tum partium ejus inveniſſe. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dediſſe. Me quoque primum reperiſſe dimenſionem abſolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, baſi parallelâ, abſcinditur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abeſt. quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatero, intra circulum genitorem deſcripto [1]). Seipſum denique ſolidorum ac ſemiſolidorum, tam circa baſin quàm circa axem, centra gravitatis definiviſſe, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipſius (Sed hæc poſt acceptam à Wrennio dimenſionem) centrum gravitatis inveniſſe, & dimenſionem ſuperficierum convexarum, quibus ſolida iſta eorumque partes comprehenduntur; earumque ſuperficierum centra gravitatis. Ac denique dimenſionem curvarum cujuſvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc eſt earum quæ deſcribuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris ſumpto. Et horum quidem demonſtrationes à Paſchalio ſunt editæ. A quibus ſuas quoque, de eadem linea, ſubtiliſſimas meditationes expoſuit Cl. Walliſius, atque eadem illa omnia ſuo Marte ſe reperiſſe, ac problemata à Paſchalio propoſita ſolviſſe contendit. Quod idem & doctiſſimus Lovera ſibi vindicat [2]). Quantum vero unicuique debeatur, ex ſcriptis eorum eruditi dijudicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod ſilentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum eſt, ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut penitius quam cyclois cognita ſit. Methodum

De linearum curvarum evolutione.

[Fig. 58.]



De l'évolution des courbes.

la mefurer, il nous a femblé devoir l'appliquer auffi à d'autres lignes: c'eft de quoi nous traiterons maintenant.

PROPOSITION VIII.

Montrer quelle eft la ligne par l'évolution de laquelle la parabole eft décrite [1]).

Soit une paraboloïde AB à axe AD et fommet A [Fig. 59] ayant cette propriété que, BD étant normale à l'axe, le cube de DA, abfciffe correfpondant au fommet, eft égal au folide qui a pour bafe le carré de DB et pour hauteur une droite donnée M. Cette courbe eft connue depuis longtemps aux géomètres. Prolongeons l'axe DE d'une longueur AE = $\frac{8}{27}$ M. Si l'on applique maintenant un fil continu à EAB et que celui-ci eft développé à partir du point E, je dis que la développante eft la parabole EF à axe EAG et fommet E et dont le latus rectum eft égal au double de EA.

En effet, après avoir pris fur la courbe AB un point quelconque B, menons-y la tangente BG coupant l'axe EA en G. Tirons enfuite à partir de ce point G la droite GF normale à la parabole EF en F. Soit FH une perpendiculaire à GF, donc une tangente à la parabole en F, et enfin FK une normale à l'axe.

KG eft donc égale à la moitié du latus rectum, c.à.d. à EA, par conféquent, en ajoutant ou retranchant AK de part et d'autre, on trouve que EK = AG. Or, AG eft le tiers de AD puifque BG touche la paraboloïde en B: c'eft ce qu'on peut aifément démontrer d'après la nature de cette courbe. Il s'enfuit que EK elle auffi eft égale au tiers de AD; et KH qui d'après la nature de la parabole eft le double de KE fera égale aux deux tiers de AD. Par conféquent le cube de KH eft égal à $\frac{8}{27}$ fois le cube de AD, c.à.d. au folide ayant pour bafe le carré de DB et pour hauteur $\frac{8}{27}$ M, c.à.d. AE. C'eft pourquoi, comme DB^2 eft à KH^2, ainfi fera KH à AE, c.à.d. à KG. Mais nous avions: KH = $\frac{2}{3}$ AD = GD. Comme BD^2 eft à DG^2, ainfi eft donc HK à KG. D'autre part, comme HK eft à KG, ainfi eft FK^2 à KG^2. Par conféquent, comme

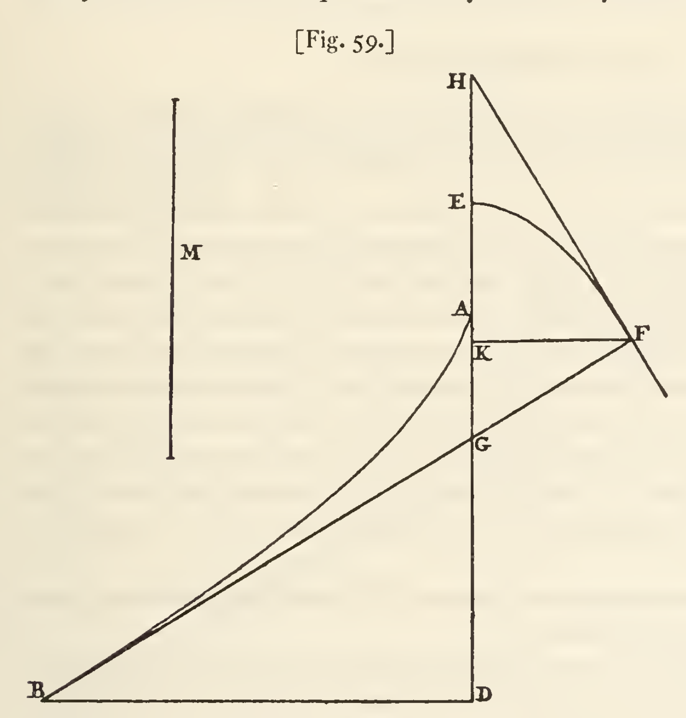
[1]) Voir sur la méthode générale pour trouver la forme des développées la Prop. XI qui suit. La développée de la parabole ordinaire, ainsi que celles des paraboles et hyperboles de degrés supérieurs, étaient connues à Huygens dès décembre 1659; voir les notes 2 et 3 de la p. 147 du T. XVII.

vero noſtram, qua in hac metienda uſi ſumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO VIII.

Cujus lineæ evolutione parabola deſcribatur oſtendere [1]).

[Fig. 59.]



Sit paraboloides AB, cujus axis AD; vertex A [Fig. 59]; proprietas autem iſta, ut ordinatim ad axem applicatâ BD, cubus abſciſſæ ad verticem DA æquetur ſolido, baſin habenti quadratum DB, altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M; quæ quidem curva pridem geometris nota fuit; & ponatur axi DE juncta in directum AE, quæ habeat $\frac{8}{27}$ ipſius M. Jam ſi filum continuum circa EAB applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico deſcri|ptam ex evolutione eſſe parabolam EF, cujus axis EAG, vertex E, latus rectum æquale duplæ EA. (p. 70).

Sumpto enim in curva AB puncto quolibet B, ducatur quæ in ipſo tangat curvam recta BG, occurrens axi EA in G. & ex G ducatur porro GF, quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ EF in F; & ſit ipſi GF perpendicularis FH, quæ parabolam in F continget; & denique FK ordinatim ad axem EG applicetur.

Eſt igitur KG æqualis dimidio lateri recto, hoc eſt, ipſi EA; ac proinde, additâ vel ablatâ utrimque AK, erit EK æqualis AG. Eſt autem AG triens ipſius AD, quoniam BG tangit paraboloidem in B: illud enim ex natura curvæ hujus facile demonſtrari poteſt. Ergo & EK æqualis eſt trienti AD: & KH, quæ ex natura parabolæ dupla eſt KE, æquabitur duabus tertiis AD. Itaque cubus ex KH æqualis eſt $\frac{8}{27}$ cubi ex AD, hoc eſt, ſolido baſin habenti quadratum DB, altitudinem vero æqualem $\frac{8}{27}$ M, hoc eſt, ipſi AE. Quamobrem ut quadratum DB ad quadratum KH, ita erit KH longitudine ad AE, hoc eſt ad KG. Erat autem KH æqualis $\frac{2}{3}$ AD, hoc eſt ipſi GD. Ergo ut quadratum BD ad quadratum DG ita eſt HK ad KG. Ut autem HK ad KG, ita eſt quadratum FK ad quadratum KG. Ergo ſicut quadratum BD ad quadratum

De l'évolution des courbes.

BD^2 eſt à DG^2, ainſi eſt FK^2 à KG^2. Donc BD : DG = FK : KG. Il s'enſuit que BGF eſt une ligne droite. Mais GF eſt normale à la parabole EF. Il paraît donc que BG, tangente à la paraboloïde, rencontre, lorſqu'on la prolonge, la parabole à angles droits. Et ceci ſera démontré de la même manière de n'importe quelle tangente à la même courbe. Il eſt donc établi que la parabole EF eſt décrite par l'évolution de la ligne EAB depuis ſon extrémité E*. C. Q. F. D.

* Prop. 4. de cette Partie.

PROPOSITION IX.

Trouver une ligne droite égale à un arc donné d'une paraboloïde, ſavoir de celle pour laquelle les carrés des ordonnées ſont entre eux comme les cubes des abſciſſes.

Il eſt évident par la propoſition précédente comment ceci doit être fait. Toutefois point n'eſt beſoin de la parabole EF [Fig. 59] pour cette conſtruction qui ſera exécutée comme ſuit. Etant donnée une partie quelconque AB [Fig. 60] de cette paraboloïde, à laquelle il s'agit d'égaler une droite, ſoit tirée BG tangente au point B et rencontrant l'axe AG en G. Or, BG ſera en effet une tangente lorſque AG eſt le tiers de AD laquelle eſt compriſe entre le ſommet et l'ordonnée BD. Après avoir pris enſuite $AE = \frac{8}{27}M$, M étant le latus rectum de la paraboloïde AB, tirons EF // BG et puiſſe-t-elle couper la ligne AF, parallèle à BD, en F. Si l'on ajoute maintenant à la droite BG la différence NF dont la droite EF ſurpaſſe EA, on aura une droite égale à la courbe AB. De quoi la démonſtration ſe voit aiſément par les choſes auparavant dites.

La courbe AB ſurpaſſe donc toujours la tangente BG d'une longueur égale à celle donc la droite EF ſurpaſſe la droite EA.

Or, ici nous ſommes tombés de nouveau ſur une ligne dont d'autres ont meſuré la longueur avant nous. C'eſt la ligne que Jean van Heuraet de Harlem a en 1659 montré être égale à une droite; ſa démonſtration a été ajoutée aux commentaires de Jean van Schooten ſur la Géométrie de Deſcartes publiés la même année. Van Heuraet a donc, le premier de tous, rectifié une courbe du nombre de celles dont des points quelconques ſont définis géométriqument, après que peu auparavant Wren avait rectifié la cycloïde par un épichérème non moins ingénieux.

DG, ita quadratum FK ad quadratum KG. Et proinde ficut BD ad DG longitudine, ita FK ad KG. Unde fequitur BGF effe lineam rectam. Sed GF occurrit parabolæ EF ad angulos rectos. Ergo apparet BG, tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad | angulos rectos. Idque fimiliter de quavis illius tangente demonftrabitur. Ergo conftat ex evolutione lineæ EAB, à termino E incepta, defcribi parabolam EF *. quod erat demonftandum.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

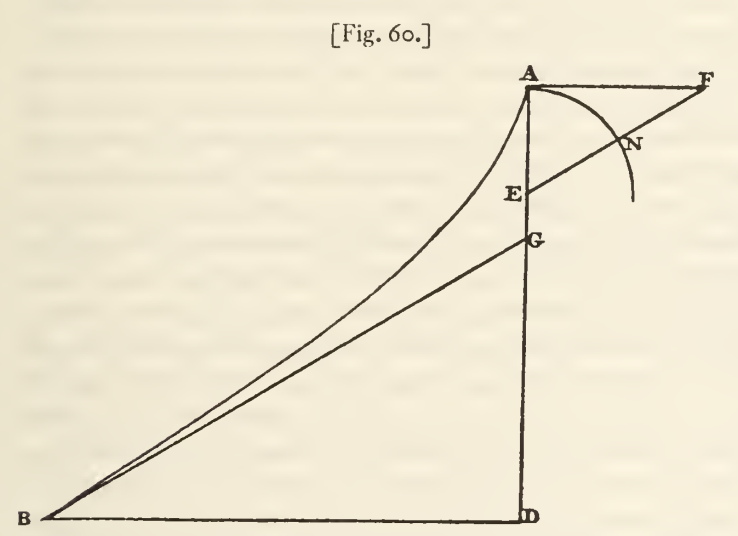
(*p.* 71).

* Prop. 4. huj.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, funt inter fe ficut cubi abfciffarum ad verticem.

[Fig. 60.]



Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifeftum eft. Parabola vero EF [Fig. 59] ad conftructionem non requiritur, quæ fic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus AB [Fig. 60] cui rectam æqualem invenire oporteat, ducatur BG tangens in puncto B, quæ occurrat axi AG in G. Tanget autem fi AG fuerit tertia pars AD, inter verticem & ordinatim applicatam BD interceptæ. Porro fumpta AE æquali $\frac{8}{27}$ lineæ M, quæ latus rectum eft paraboloidis AB, ducatur EF parallela BG, occurratque lineæ AF, quæ parallela eft BD, in F. Jam fi ad rectam BG addatur NF, exceffus rectæ EF fupra EA, habebitur recta æqualis curvæ AB. Cujus demonftratio ex ante dictis facile perfpicitur.

Semper ergo curva AB tantum fuperat tangentem BG, quantum recta EF rectam EA.

Rurfus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimenfi funt. Illam nempe quam anno 1659 Joh. Heuratius Harlemenfis rectæ æqualem oftendit, cujus demonftratio poft commentarios Joh. Schotenii in Cartefii Geometriam, eodem anno editam, adjecta eft. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geo|metricè definiuntur, ad hanc menfuram reduxit, cum fub idem tempus Cycloidis longitudinem dediffet Wrennius, non minus ingenio foepicheremate. (*p.* 72).

De l'évolution des courbes.

Je fais il eſt vrai qu'après la publication de la découverte de van Heuraet, le très ſavant Wallis, dans ſon livre de la ciſſoïde, a voulu l'attribuer auſſi à Guillaume Neile, gentilhomme de ſon pays. Mais à mon avis, quand je conſidère ce qu'il avance dans ce livre, Neile n'a pas à vrai dire été beaucoup éloigné de cette trouvaille ſans toutefois y parvenir tout-à-fait. Car d'après ſa démonſtration même rapportée par Wallis il apparaît qu'il ne comprenait pas clairement quelle ſerait cette courbe dont il voyait que, ſi elle était conſtruite, la meſure ſeraît donnée. Et il eſt croyable que s'il avait ſu qu'il s'agit d'une courbe du nombre de celles qui étaient connues depuis longtemps aux géomètres, lui-même, ou d'autres en ſon nom, leur auraient communiqué un eſi noble invention ſous une forme plus achevée; invention qui méritait autant ou plus que toute autre qu'ils s'écriaſſent εὕρηκα comme jadis Archimède. Sans doute Fermat, conſeiller de Toulouſe et très habile géomètre, a rédigé de la même invention des preuves qui ont été imprimées en 1660, mais celles-ci datent apparemment de plus tard [1]).

Or, puiſque nous ſommes engagés dans ce ſujet, qu'il nous ſoit permis de dire auſſi ce que nous avons contribué à l'avancement d'une ſi excellente découverte: nous avons donné à van Heuraet l'occaſion d'y parvenir et nous avons trouvé avant lui et les premiers de tous la dimenſion de la courbe parabolique d'après la quadrature, ſuppoſée donnée, de l'hyperbole, ce qui fait partie de la trouvaille de van Heuraet. En effet, vers la fin de l'année 1657 nous ſommes tombés ſimultanément ſur ces deux choſes, la dimenſion mentionnée de la courbe parabolique et la réduction de la ſurface du conoïde parabolique au cercle. Et comme nous avions fait ſavoir par une lettre à van Schooten, et à d'autres de nos amis, que deux découvertes extraordinaires au au ſujet de la parabole nous étaient venues dans l'eſprit et que l'une d'elles était la réduction de la ſurface du conoïde parabolique à un cercle, v. Schooten communiqua cette lettre à van Heuraet qui était alors ſon ami intime. Il ne fut pas difficile à cet homme, doué d'un eſprit fort pénétrant, de comprendre que la dimenſion de la courbe parabolique elle-même était dans un étroit rapport avec celle de la ſurface du conoïde. Ayant trouvé l'une et l'autre et pouſſant ſes recherches encore plus loin il tomba ſur ces autres courbes paraboloïdales, auxquelles on trouve des droites abſolument égales [2]).

Et afin que nul ne déſire, comme cela pourrait avoir lieu, de témoignage ſur la réduction de la ſurface du conoïde à une ſurface plane, il me ſemble bon de citer ici une lettre de Monſieur François Sluſius qu'il faut conſidérer comme un des principaux géomètres d'aujourd'hui: dans cette lettre, datant de la même année, il me félicitait de cette découverte, peut-être plus expreſſément que je ne méritais. Voici une citation de ſa lettre du 24 décembre de l'année 1657 [3]): „*J'ajoute ſeulement deux choſes, l'une etc. L'autre que je ne compte preſque pour rien toutes ces courbes et même*

[1]) Voir sur la question v. Heuraet-Neile la note 2 de la p. 123 du T. XVII: Huygens avait apparemment l'intention d'en parler déjà en 1660 alors qu'elle était actuelle. L'apparition de l'

Scio equidem, ab edito Heuratii invento, Doctiſſimum Walliſium Wilhelmo Nelio, nobili apud ſuos juveni, idem attribuere voluiſſe, in libro de Ciſſoide. Sed mihi, quæ illic adfert perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Nelium abfuiſſe, neque tamen plane id adſecutum eſſe. Nam neque ex demonſtratione ejus, quam Walliſius affert, apparet illum ſatis perſpexiſſe quænam foret curva illa, cujus, ſi conſtrueretur, menſuram datam fore videbat. Et credibile eſt, ſi ſciviſſet ex earum numero eſſe quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipſum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius impertituros fuiſſe, quod, ſi quod aliud, merebatur ut Archimedeum illud εὕρηκα exclamarent. Sane ejusdem inventi, tanquam à ſe profecti, etiam Fermatius, Tholoſanus ſenator ac Geometra peritiſſimus, demonſtrationes conſcripſit, quæ anno 1660 excuſæ ſunt, ſed illæ ſero utique [1]).

De linearum curvarum evolutione.

Cum vero in his ſimus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus: ſiquidem & Heuratio ut eo perveniret occaſionem præbuimus, & dimenſionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratiani inventi pars eſt, ante ipſum atque omnium primi reperimus. Etenim ſub finem anni 1657 in hæc duo ſimul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimenſionem, & ſuperficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliisque item amicorum, per literas indicaſſemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis ſeſe obtuliſſe, eorumque alterum eſſe conoidicæ ſuperficiei extenſionem in circulum, ille literas eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutiſſimi ingenii viro, non difficile fuit intelligere, conoidis iſtius ſuperficiei affinem eſſe dimenſionem ipſius curvæ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde inveſtigans, in alias iſtas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales abſolute inveniuntur [2]).

Ac de Conoidis quidem ſuperficie in planum redacta, ne quis forte teſtimonium deſideret, pauca hæc adſcribere viſum eſt ex literis viri clariſſimi, atque inter præcipuos hodie Geometras cenſendi, Franc. Sluſii, quibus eo ipſo anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus eſt. In quibus literis | 24. Decemb. anni 1657. [3]) datis, iſta habentur. *Duo tantum addo, unum &c. Alterum eſt, me has om-* (p. 73).

„Hor. osc." donna lieu à une discussion sur ce sujet (e.a. avec J. Wallis), sur laquelle on peut consulter le T. VII.

Dans une lettre à Leibniz du 1 décembre 1696 Wallis (p. 653 du T. III de ses „Opera mathematica", publiés à Oxford en 1699) écrit: „De invento Nelii qui (traditis à me ad Prop. 38 Ar. Infinitorum insistens) primus omnium exhibuit æqualem Curvæ rectam: Quod dixerat Hugenius, (eum non procul abfuisse, non tamen omnino assecutum) id post retraxit Hugenius (in suis ad me literis) jussitque ut id iterum Nelio assererem. Num Nelius statim sciverit, per omnia, qualis fuerit illa Curva, ego non certus scio: Sed Brounkerus & Ego protinus deteximus Paraboloidem esse; cui ego nomen feci Semi-cubicalem". Nous ne connaissons pas de lettre de Huygens à Wallis où il rétracte l'opinion exprimée dans l'„Horologium oscillatorium".

[2]) Voir les p. 189—190 et 196 du T. XIV.

[3]) T. II, p. 107.

De l'évolution des courbes.

le lieu linéaire entier en comparaifon avec votre découverte d'une démonftration de l'exiftence d'un rapport déterminé entre la furface du conoïde parabolique et le cercle qui en eft la bafe. Je donne volontiers la préférence à cette belle induction pour la quadrature du cercle à toutes les diverfes chofes que j'ai tirées autrefois du lieu linéaire et que je vous communiquerai à l'occafion fi vous le défirez".

L'année fuivante je trouvai auffi les furfaces des conoïdes hyperboliques et fphéroïdaux, c.à.d. leur réduction à des cercles, et je fis connaître les conftructions de ces problèmes, fans toutefois y ajouter de démonftration, aux géomètres avec qui j'étais alors en commerce de lettres, favoir Pafcal et autres en France et Wallis en Angleterre. Ce dernier publia peu après fes idées à lui fur ces fujets enfemble avec beaucoup d'autres inventions fubtiles, ce qui fut caufe que je ne travaillai pas tout de fuite à l'achèvement de mes démonftrations [1]). Mais puifque mes conftructions ne me paraiffent pas manquer d'élégance et qu'elles font encore inédites, je veux les inférer ici.

Trouver un cercle égal à la furface courbe d'un conoïde parabolique [2]).

Soit donné un conoïde [Fig. 61] dont la parabole ABC foit la fection par l'axe; que BD foit l'axe du conoïde, B fon fommet, AC le diamètre de fa bafe, lequel eft perpendiculaire à l'axe. Et foit demandé de trouver un cercle égal à la furface courbe du conoïde.

Qu'on prenne, après avoir prolongé l'axe du côté du fommet, BE = BD et qu'on tire EA, tangente en A à la parabole ABC. Que l'on coupe enfuite AD en G de telle manière que AG : GD = EA : AD. Soit H une droite égale à AE + DG et L une droite égale au tiers de la bafe AC. Soit K la moyenne proportionnelle que l'on peut conftruire entre H et L. Décrivons un cercle de rayon K. Celui-ci fera égal en furface à la furface courbe ABC du conoïde. Il s'enfuit que fi AE = 2AD la furface courbe du conoïde fera au cercle qui en forme la bafe comme 14 eft à 9; fi AE = 3AD, comme 13 eft à 6; fi AE = 4AD, comme 14 eft à 5. Et qu'ainfi ce rapport fera toujours exprimé par celui de deux nombres entiers, lorfqu'il en eft de même pour celui de AE à AD.

Trouver un cercle égal à la furface d'un fphéroïde allongé [3]).

Confidérons un fphéroïde oblong [Fig. 62] d'axe AB et de centre C. Soit ABDE une ellipfe obtenue par la fection du fphéroïde par l'axe, et DE fon petit diamètre.

---

[1]) Comparez la p. 192 du T. XIV.

[2]) Voir les p. 267—268 du T. XIV.

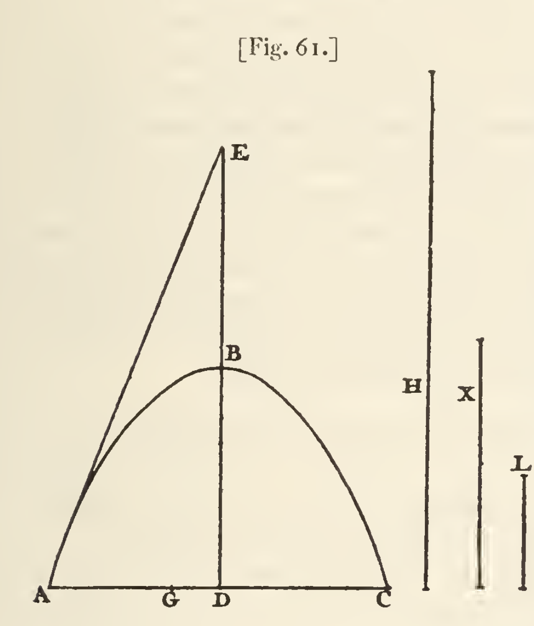
[3]) Voir les p. 190 et 320—324 du T. XIV.

nes curvas, ipsumque adeo locum linearum integrum, nihili pene facere præ invento hoc tuo, quo superficiei in conoide parabolico rationem ad circulum suæ baseos demonstrasti. Hanc pro circuli quadratura pulcherrimam ἀπαγωγὴν præfero libens iis omnibus, quas ex loco lineari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, si ita jusseris, data occasione communicabo. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Anno autem insequenti etiam superficies conoidum hyperbolicorum & sphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci possent, constructionesque eorum problematum, non addita tamen demonstratione, Geometris quibuscum tunc literarum commercium habebam, in Gallia Paschalio aliisque, in Anglia Wallisio impertii, qui non multo post sua quoque super his, una cum aliis multis subtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut nostris demonstrationibus perficiendis supersederem. Quoniam vero non inelegantes visæ sunt constructiones nostræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adscribere.

Conoidis parabolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire [2]).

[Fig. 61.]



Sit datum conoides [Fig. 61] cujus sectio per axem parabola ABC; axis ejus BD, vertex B, diameter basis AC, quæ sit axi BD ad angulos rectos. Et oporteat superficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

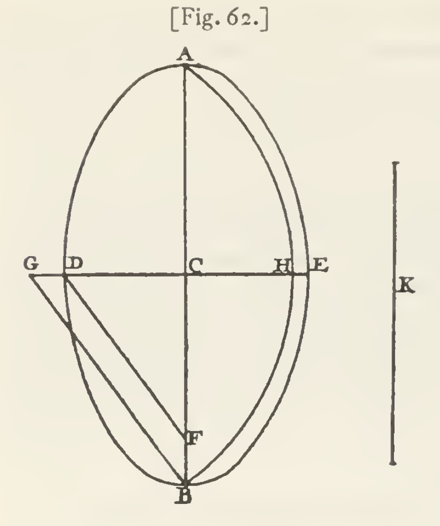
Producto axe à parte verticis, sumatur BE æqualis BD, & jungatur EA, quæ parabolam ABC in A continget. Porro secetur AD in G, ut sit AG ad GD sicut EA ad AD. Et utrisque simul AE, DG æqualis statuatur recta H. Item trienti basis AC æqualis sit recta L, & inter H & L media proportionalis inveniatur K. qua tanquam radio circulus describatur. Is æqualis erit superficiei curvæ conoidis ABC. Hinc sequitur, si fuerit AE dupla AD, superficiem conoidis curvam ad circulum baseos fore ut 14 ad 9. Si AE tripla AD, ut 13 ad 6. si AE quadrupla AD, ut 14 ad 5. Atque ita semper fore ut numerus ad numerum, si AE ad AD ejusmodi rationem habuerit. (p. 74).

Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire [3]).

Esto sphæroides oblongum [Fig. 62] cujus axis AB, centrum C, sectio per axem ellipsis ADBE, cujus minor diameter DE.

De l'évolution des courbes.

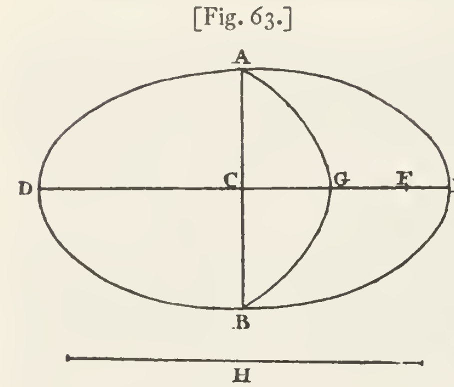
[Fig. 62.]



Posons DF = CB, en d'autres termes soit F un des deux foyers de l'ellipse ADBE; et tirons la droite BG parallèle à FD, laquelle rencontre le prolongement de ED en G. Décrivons maintenant sur l'axe AB du centre G, avec le rayon GB, l'arc de circonférence BHA. Et soit la droite K moyenne proportionnelle entre le demi-diamètre CD et une droite égale à la somme de l'arc AHB et du diamètre DE. Cette droite K sera le rayon d'un cercle égal à la surface du sphéroïde ADBE.

Trouver un cercle égal à la surface du sphéroïde large ou aplati [1]).

[Fig. 63.]



Considérons un sphéroïde aplati d'axe AB et de centre C [Fig. 63]. Soit ADBE une ellipse obtenue par la section du sphéroïde par l'axe.

Soit de nouveau F l'un des deux foyers et, après avoir divisé FC en G, supposons construite une parabole AGB ayant AB pour base et le point G pour sommet. Et soit H une moyenne proportionnelle entre le diamètre DE et une droite égale à la courbe parabolique AGB. Cette droite H sera le rayon d'un cercle égal à la surface du sphéroïde considéré.

Trouver un cercle égal à la surface courbe d'un conoïde hyperbolique [2]).

Soit donné un conoïde hyperbolique à axe AB [Fig. 64] et dont la section par l'axe soit l'hyperbole CAD à latus transversum EA, à centre F et à latus rectum AG.

Prenons sur l'axe la droite AH égale à la motié du latus rectum AG. Et comme

[1]) Voir les p. 317—319 du T. XIV.
[2]) Voir les p. 315—316 du T. XIV.

Ponatur DF æqualis CB, ſeu ponatur F alter focorum ellipſeos ADBE rectæque FD parallela ducatur BG, occurrens productæ ED in G, centroque G, radio GB, deſcribatur ſuper axe AB arcus circumferentiæ BHA. Interque ſemidiametrum CD & rectam utrisque æqualem, arcui AHB & diametro DE, media proportionalis ſit recta K. Erit hæc radius circuli qui ſuperficiei ſphæroidis ADBE æqualis ſit. De linearum curvarum evolutione.

Sphæroidis lati ſive compreſſi ſuperficiei circulum æqualem invenire [1]). (p. 75).

Sit ſphæroides latum cujus axis AB, centrum C [Fig. 63], ſectio per axem ellipſis ADBE.

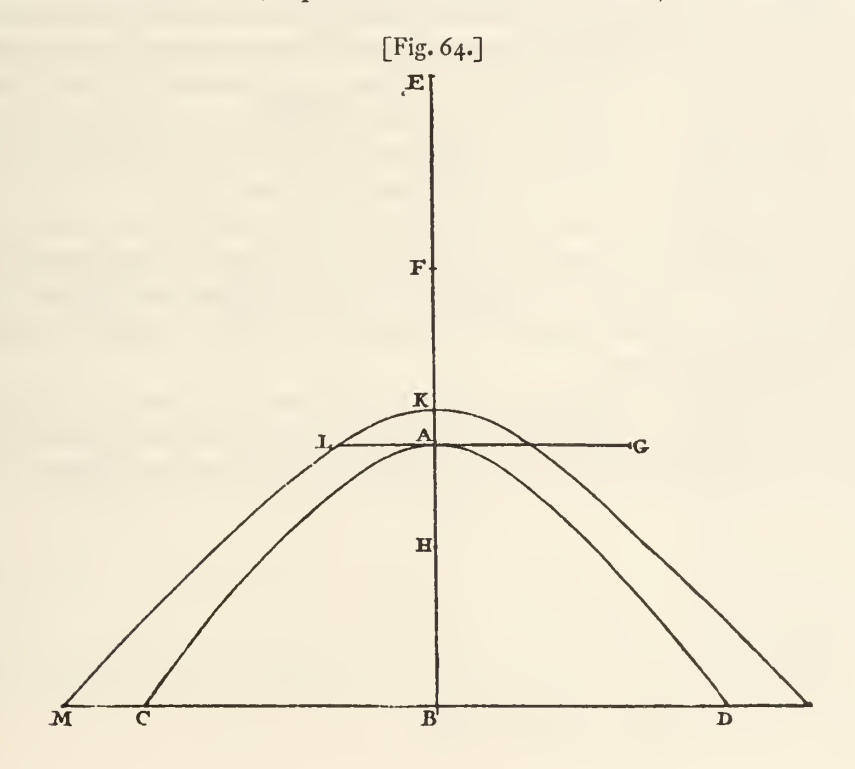
Sit rurſus focorum alteruter F, diviſâque bifariam FC in G, intelligatur parabola AGB quæ baſin habeat axem AB, verticem vero punctum G. Sitque inter diametrum DE, & rectam curvæ parabolicæ AGB æqualem, media proportionalis linea H. Erit hæc radius circuli qui ſuperficiei ſphæroidis propoſiti æqualis ſit.

Conoidis hyperbolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire [2]).

Eſto conoides hyperbolicum [Fig. 64] cujus axis AB, ſectio per axem hyperbola CAD, cujus latus tranſverſum EA, centrum F, latus rectum AG.

Sumatur in axe recta AH, æqualis dimidio lateri recto AG, & ut HF ad AF longi-

[Fig. 64.]



De l'évolution des courbes.

HF eſt à AF en longueur, ainſi ſoit AF à FK en puiſſance. Suppoſons conſtruite une autre hyperbole KLM à ſommet K, qui poſſède le même axe et le même centre F et qui ait ſon latus rectum et ſon latus tranſverſum inverſement proportionnels aux grandeurs correſpondantes de la première. Que BC prolongée la coupe en M et que AL ſoit parallèle à BC. La ſurface courbe du conoïde ſera maintenant au cercle de diamètre CD qui conſtitue ſa baſe, comme l'eſpace ALMB, compris entre trois droites et la courbe hyperbolique, eſt à la moitié du carré de BC. On achèvera donc aiſément la conſtruction, poſée la quadrature de l'hyperbole.

Tandis que d'après notre démonſtration la ſurface du conoïde parabolique ſe réduit, tout auſſi bien que celle de la ſphère, à la ſurface d'un cercle ſuivant les règles connues de la géométrie, il faut admettre, pour que cette reduction ait lieu pour la ſurface du ſphéroïde allongé, que la longueur d'un arc de circonférence puiſſe être égalée à une droite. Mais la quadrature de l'hyperbole eſt requiſe pour la complanation correſpondante de la ſurface du ſphéroïde aplati, ainſi que pour celle de la ſurface du conoïde hyperbolique. Car la longueur de la ligne parabolique, que nous avons employée dans le cas de ce ſphéroïde, dépend de la quadrature de l'hyperbole, comme nous le montrerons tout-à-l'heure.

Cependant nous avons trouvé, ce qui ne ſemble pas indigne d'être remarqué, qu'on peut conſtruire, ſans ſuppoſer aucunement la quadrature de l'hyperbole, un cercle égal à la ſomme des ſurfaces d'un ſphéroïde aplati et d'un conoïde hyperbolique.

En effet, nous avons réuſſi à prouver qu'étant donné un ſphéroïde aplati quelconque, on peut trouver un conoïde hyperbolique, ou au contraire qu'étant donné un conoïde hyperbolique, on peut trouver un ſphéroïde aplati tel qu'il eſt poſſible d'obtenir un cercle égal à la ſomme des ſurfaces des deux corps [1]). Il ſuffira d'en avoir donné un ſeul exemple dans un cas plus ſimple que les autres.

Soit donné un ſphéroïde aplati à axe SI [Fig. 65] et que STIK ſoit une ellipſe obtenue par une ſection du ſphéroïde par l'axe. Soit O le centre de cette ellipſe et TK ſon grand axe. Que la forme de l'ellipſe ſoit telle que ſon latus tranſverſum TK ait à ſon latus rectum un rapport égal à celui d'une ligne diviſée en extrême et moyenne raiſon à ſa plus grande partie.

Prenons BC double en puiſſance à SO et de même BA double en puiſſance par rapport à OK. Que BC, BA, BF et BE ſoient en proportion continue et que EP ſoit priſe égale à EA. Suppoſons maintenant conſtruit un conoïde hyperbolique QFN à

[1]) T. XIV, p. 192—195, 324—326, 329—334.

tudine, ita ſit AF ad FK potentiâ. Et intelligatur vertice K alia hyperbola deſcripta KLM, eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & transverſum illi reciproce proportionalia habeat. Occurrat autem ipſi producta BC in M, ſitque AL parallela BC. Erit jam ſicut ſpatium ALMB, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehenſum, ad dimidium quadratum ex BC, ita ſuperficie conoidis curva ad circulum baſeos ſuæ, cujus diameter CD. Unde conſtructio reliqua facile abſolvetur, poſitâ hyperbolæ quadraturâ. De linearum curvarum evolutione.

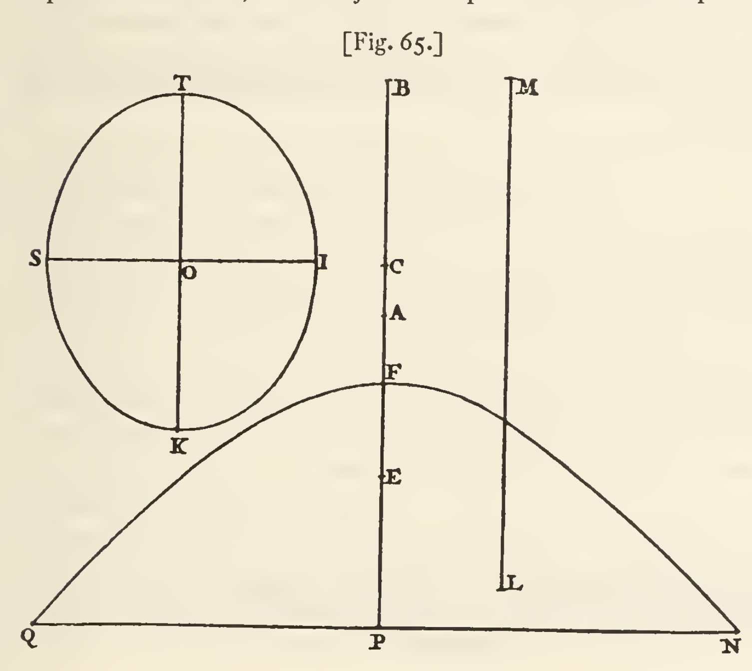
Quum igitur conoidis parabolici ſuperficies ad circulum redigatur, æque ac ſuperficies ſphæræ, ex notis geometriæ regulis; in ſuperficie ſphæroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum eſt arcus | circumferentiæ longitudinem æquari poſſe lineæ rectæ. Ad ſphæroidis vero lati, itemque ad conoidis hyperbolici ſuperficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in ſphæroide hoc adhibuimus, pendet à quadratura hyperbolæ, ut mox oſtendemus. (p. 76).

Verum, quod non indignum animadverſione videtur, invenimus absque ulla hyperbolicæ quadraturæ ſuppoſitione, circulum æqualem conſtrui ſuperficiei utrique ſimul, ſphæroidis lati & conoidis hyperbolici.

Dato enim ſphæroide quovis lato, poſſe inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, poſſe inveniri ſphæroides latum ejusmodi, ut utriusque ſimul ſuperficiei exhibeatur circulus æqualis [1]). cujus exemplum in caſu uno cæteris ſimpliciore ſufficiet attuliſſe.

Sit ſphæroides latum cujus axis SI [Fig. 65], ſectio per axem ellipſis STIK, cujus ellipſis centrum O, axis major TK. ponatur autem ellipſis hæc ejusmodi, ut latus transverſum TK habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta, ad partem ſui majorem.

[Fig. 65.]



Sumatur BC potentia dupla ad SO, item BA potentia dupla ad OK. & ſint hæ quatuor continue proportionales BC, BA, BF, | BE, & ponatur EP æqualis EA. Intelligatur jam conoides hyperbolicum QFN, cujus axis FP; axi adjecta, (p. 77).

De l'évolution des courbes.

axe FP, et dont la longueur ajoutée à l'axe, c.à.d. le demi latus tranſverſum, ſoit FB, tandis que BC repréſente ſon latus rectum.

La ſurface courbe de ce conoïde, jointe à celle du ſphéroïde SI, ſera égale à un cercle de rayon ML, le carré de ML étant égal à la ſomme du carré TK et de deux fois le carré SI [1]).

Trouver une ligne droite égale à une courbe parabolique [2]).

ABC [Fig. 66] repréſente une portion d'une parabole à axe BK, auquel la baſe AC eſt perpendiculaire. On demande de trouver une droite égale à la courbe ABC.

Prenons une droite IE [Fig. 67] égale à la demi-baſe AK et prolongeons-la juſqu'au point H de telle manière que IH ſoit égale à AG, laquelle, touchant la parabole au point A de la baſe, coupe l'axe prolongé en G. Soit en autre DEF une portion d'hyperbole décrite avec le ſommet E et le centre I, et dont EH repréſente le diamètre, la baſe DHF lui étant normale. Le latus rectum eſt arbitraire. Si l'on ſuppoſe maintenant un parallélogramme DPQF conſtruit ſur la baſe DF, lequel ſoit égal à l'aïre DEF, ſon côté PQ coupera le diamètre de l'hyperbole en R de telle manière que RI ſera égale à la courbe parabolique AB, dont ABC eſt le double.

Il apparaît par là comment la meſure de la courbe parabolique dépend de la quadrature de l'hyperbole et réciproquement.

Or, un problème quelconque qui ſe réduit à l'une des deux queſtions nommées eſt capable d'une ſolution numérique auſſi approchée qu'on veut par l'admirable invention des logarithmes. En effet, nous avons trouvé jadis que par eux la quadrature de l'hyperbole eſt réſolue numériquement avec une approximation auſſi grande qu'on le déſire [3]). Voici notre règle.

---

[1]) C'est le cas spécial dont il est question aux p. 194—195 et 333—334 du T. XIV.

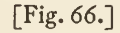
[2]) Voir les p. 234—236 du T. XIV.

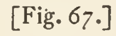
[3]) Voir les p. 434—435 et 474 et suiv. (1662) du T. XIV.

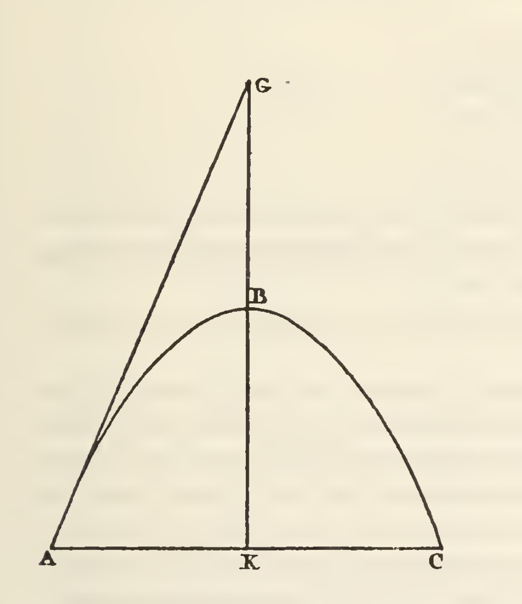
ſive $\frac{1}{2}$ latus transverſum FB; dimidium latus rectum æquale BC. De linearum curvarum evolutione.

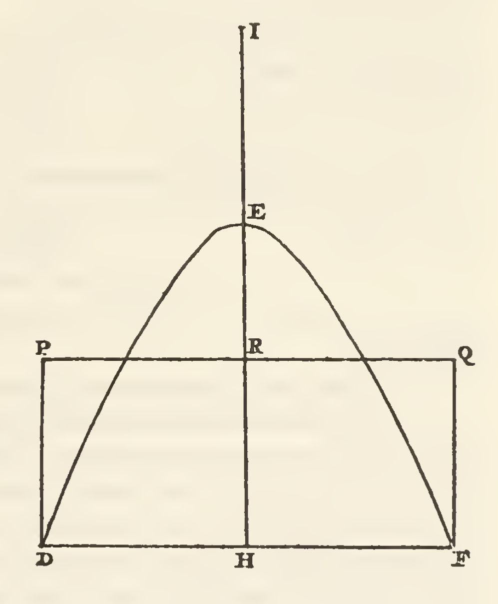
Hujus conoidis ſuperficies curva, unà cum ſuperficie ſphæroidis SI, æquabitur circulo cujus datus erit radius ML, qui nempe poſſit quadratum TK cum duplo quadrato SI [1]).

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire [2]).


[Fig. 66.]


[Fig. 67.]





Sit parabolæ portio ABC [Fig. 66], cujus axis BK, baſis AC axi ad angulos rectos; & oporteat curvæ ABC rectam æqualem invenire.

Accipiatur baſi dimidiæ AK æqualis recta IE [Fig. 67], quæ producatur ad H, ut ſit IH æqualis AG, quæ parabolam in puncto baſis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ DEF, vertice E, centro I deſcriptæ, cujusque diameter ſit EH; baſis vero DHF ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu ſumi poteſt. Quod ſi jam ſuper baſi DF intelligatur parallelogrammum conſtitutum DPQF, quod portioni DEF æquale ſit; ejus latus PQ ita ſecabit diametrum hyperbolæ in R, ut RI ſit æqualis curvæ parabolicæ AB, cujus dupla eſt ABC.

Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolicæ menſura, & illa ab hac viciſſim.

Quæcunque vero problemata ad alterum è duobus hiſce reducuntur, quamlibet veræ proximam ſolutionem per numeros accipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur [3]). Eſt autem regula hujusmodi. (p. 78).

De l'évolution des courbes.

Soit DAB [Fig. 68] une portion d'hyperbole à aſymptotes CS et CV, DE et BV étant des parallèles à l'aſymptote SC.

Qu'on prenne la différence des logarithmes correſpondant à des nombres ayant entre eux les mêmes rapports que les droites DE et BV, et enſuite le logarithme de cette différence. Ajoutons-y le logarithme, qui eſt toujours le même, 0,36221,56887 [1]). La ſomme ſera le logarithme du nombre qui repréſentera l'eſpace DEVBAD, compris entre trois droites et la courbe DAB, exprimé en parties telles que le parallélogramme DC en a 100000,00000. D'où l'on conclura auſſi facilement à l'aire de la portion DAB.

Soit p.e. la proportion DE : BV égale à 36 : 5.

Du logarithme de 36	1,55630,25008	
retranchons	0,69897,00043	
La différence des logarithmes ſera	0,85733,24965 [2]),	
et	9,93314,92856	le logarithme de cette différence.
En y ajoutant	0,36221,56887,	le logarithme qu'il faut toujours
ajouter, on obtient	10,29536,49713	pour le logarithme de l'eſpace DEVBAD.

Le nombre correſpondant à ce logarithme a 11 chiffres, puiſque la caractériſtique eſt 10. Il faut donc d'abord chercher le nombre inférieur, auſſi approché que poſſible, qui correſpond au logarithme trouvé: c'eſt le nombre 19740. Enſuite il faut calculer d'après la différence de ce même logarithme et de celui qui le ſuit dans la table, les chiffres ſuivants 81026 que l'on doit écrire à la ſuite des premiers pour obtenir le nombre total, ſavoir 197408,10260, où le zéro eſt ajouté à la fin pour que le nombre des chiffres ſoit en effet de onze. L'aire de l'eſpace DEVBAD eſt donc à fort peu près de 197408,10260 parties, telles que le parallélogramme DC en a 100000,00000.

PROPOSITION X.

Montrer des lignes courbes telles que par leur évolution ſoient décrites des ellipſes et des hyperboles, et trouver des lignes droites égales à ces courbes [3]).

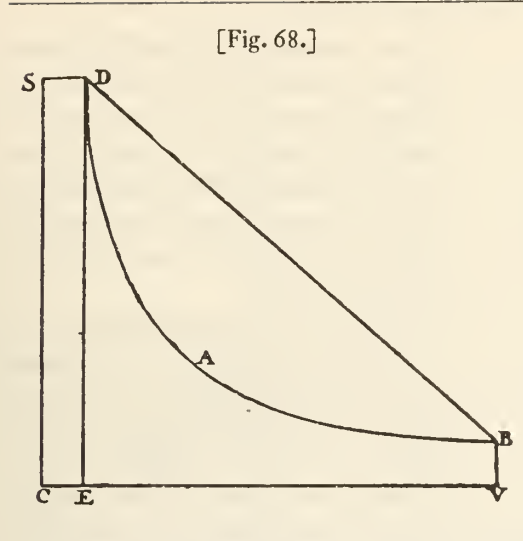
Soit AB [Fig. 69] une ellipſe ou hyperbole quelconque à axe tranſverſal AC, à centre D, et dont le latus rectum ſoit le double de AE. Menons à partir d'un point

---

[1]) Voir sur ce nombre remarquablement exact la note 2 de la p. 476 du T. XIV.

[2]) Dans l'édition originale une faute d'impression, déjà corrigée dans l'édition de 's Gravesande, avait changé le chiffre 2 en 1. On trouve ailleurs chez Huygens le nombre correct: voir la l. 5 de la p. 477 du T. XIV ainsi que la p. 23 du Manuscrit 13, dont il est question dans une note de cette même p. 477.

[Fig. 68.]



Sit DAB [Fig. 68] portio hyperbolæ, cujus asymptoti CS, CV, ductis DE, BV parallelis asymptoto SC. De linearum curvarum evolutione.

Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter se rationem habentibus quam rectæ DE, BV; ejusque differentiæ quæratur logarithmus. Cui addatur logarith|mus hic (p. 79). (qui semper est idem) 0,36221,56887 [1]). Summa erit logarithmus numeri qui spatium DEVBAD designabit, tribus rectis & curva DAB comprehensi, in partibus qualium parallelogrammum DC est 100000,00000. Unde porro facile quoque habebitur area portionis DAB.

Sit ex. gr. proportio DE ad BV ea quæ 36 ad 5.

Ab	1,55630,25008,	logarithmo 36.
auferatur	0,69897,00043.	logarithmus 5.
Erit	0,85733,24965.	differentia logarithmorum [2]).
Et	9,93314,92856.	logarithmus differentiæ.
Cui addatur	0,36221,56887.	logarithmus semper addendus.
Fit	10,29536,49743.	logarithmus spatii DEVBAD.

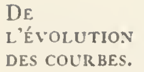
Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteristica sit 10. Quæratur itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus est 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejusdem, & proxime eum in tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur 81026, scribendi post priores, ut fiat 197408,10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo area spatii DEVBAD proxime partium 197408,10260, qualium partium parallelogrammum DC est 100000,00000.

PROPOSITIO X.

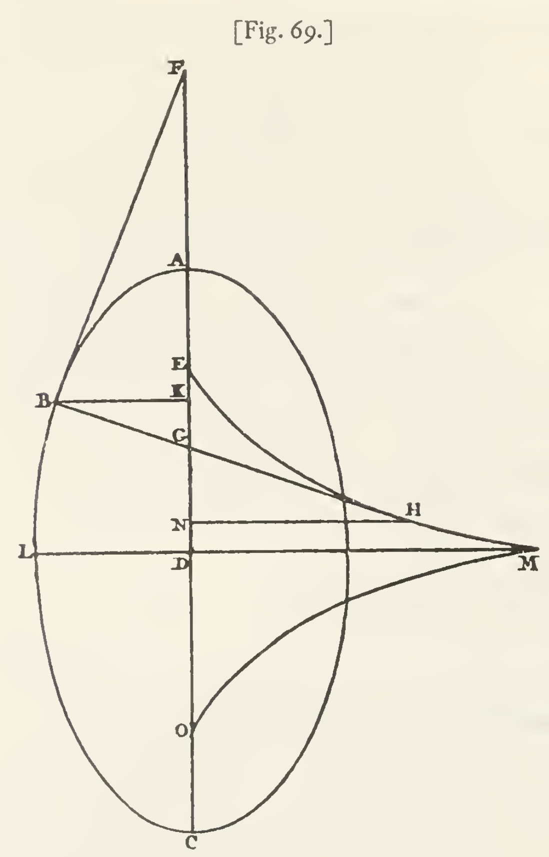
Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipses & hyperbolæ describantur, rectasque invenire iisdem curvis æquales [3]).

Sit ellipsis vel hyperbole quælibet AB [Fig. 69] cujus axis transversus AC; centrum figuræ D; latus rectum duplum ipsius AE. Et sumpto in sectione quovis puncto, ut

[3]) Voir les notes 5—7 de la p. 122 du T. XVII.


De l'évolution des courbes.

[Fig. 69.]

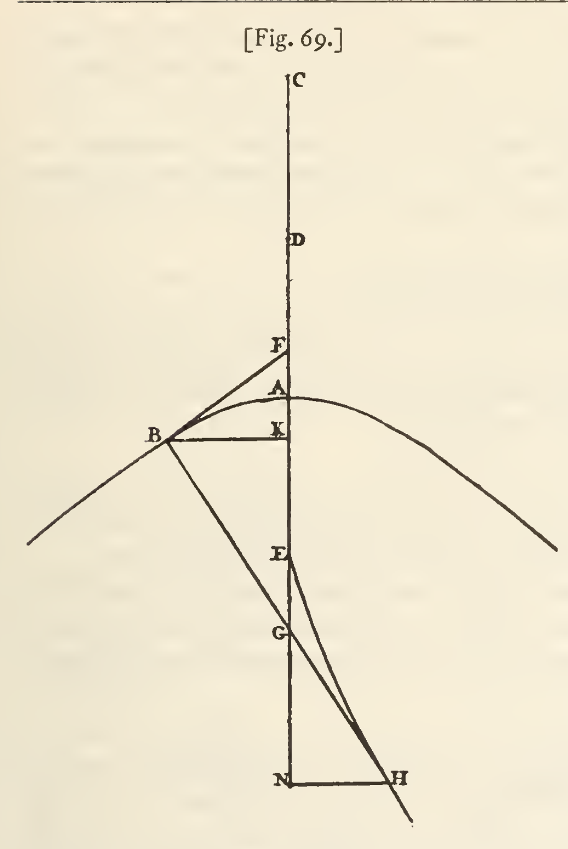


B quelconque de la ſection l'ordonnée BK et au dit point B une tangente qui coupe l'axe en F. Soit BG perpendiculaire à FB et puiſſe-t-elle couper l'axe en G. Prolongeons BG jusqu'au point H de telle manière que le rapport BH : HG ſoit composé des rapports GF : FK et AD : DE.

Je dis que la courbe EHM dont tous les points ſont trouvés de la même manière que le point H eſt celle par l'évolution de laquelle, jointe à la droite EA, eſt décrite la ſection AB. En d'autres termes que BH touche la courbe en H et eſt égale à la ligne entière HEA. C'eſt pourquoi, lorſqu'on retranche EA de HB, la droite qui reſte ſera égale à l'arc HE. Et il paraît, puisque tous les points de la courbe indifféremment ſont trouvés ſuivant la même méthode bien déterminée, qu'elle eſt partout du genre de celles qui ſont eſtimées purement géométriques. Il s'enſuit que la relation de tous ſes points à ceux de l'axe AC pourra être exprimée par une certaine équation que je trouve monter à la ſixième dimenſion et poſſéder un minimum de termes lorſque AB eſt une hyperbole dont le latus tranſverſum et le latus rectum ſont égaux; en effet, dans ce dernier cas, ſi l'on tire d'un point quelconque de la courbe tel que H une perpendiculaire HN à l'axe CAN, et qu'on appelle AC a, CN [1]) x, et NH y, le cube de $x^2 - y^2 - a^2$ ſera toujours égal à $27x^2y^2a^2$. Mais dans ce cas particulier les points de la courbe EHM pourront être trouvés beaucoup plus rapidement, comme cela ſera démontré dans la ſuite.

Au reſte il faut remarquer que dans le cas de l'ellipſe chaque quadrant eſt décrit par l'évolution d'une ligne correſpondante; le quadrant ABL p.e. par l'évolution de la ligne AEHM, le quadrant CL par celle de la ligne COM ſymétrique avec la précédente. Il y a en effet cette différence entre les deux ſections que — tandis que l'origine de la courbe EHM eſt tant pour l'ellipſe que pour l'hyperbole le point E, la droite AE ayant été priſe égale à la moitié du latus rectum — dans le cas de l'hyperbole la courbe nommée s'étend à partir du point E juſqu'à l'infini, mais que dans le cas de ellipſe elle ſe termine au point M du petit axe, LM étant priſe égale à la moitié du latus rectum, qui ſe rapporte aux ordonnées perpendiculaires au dit petit axe. Car il

[Fig. 69.]



B, applicetur ordinatim ad axem recta BK, & ad dictum punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F; sitque BG ipsi FB perpendicularis, axique occurrat in G; & producatur BG usque ad H, ut BH ad HG habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus GF ad FK, & AD ad DE. De linearum curvarum evolutione.

Dico curvam EHM, cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H, esse eam cujus evolutione, unà cum recta EA, describetur sectio AB. Ipsam autem BH tangere curvam in | H, & esse toti HEA æqualem. (p. 80). Quamobrem, si ab HB auferatur EA, reliqua recta portioni curvæ HE æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaque ratione inveniantur, esse eam utrobique ex earum genere, quæ merè geometricæ censentur. Unde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis AC, æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad sextam dimensionem ascendere invenio; minimumque habere terminorum, si fuerit AB hyperbola cujus latera transversum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H, ad axem CAN perpendiculari HN; vocatâque AC, a; CN [1], x; & NH, y; erit semper cubus ab $xx—yy—aa$ æqualis 27 $xxyyaa$. Sed hoc casu brevius quoque multo, quam prædicta constructione, curvæ EHM puncta reperiri possunt, ut in sequentibus ostendetur.

Cæterum notandum est, in ellipsi singulos quadrantes singularum linearum evolutione describi; sicut quadrans ABL evolutione lineæ AEHM, quadrans CL evolutione similis huic oppositæ COM. Est enim hæc in sectione utraque diversitas, quod cum principium quidem curvæ EHM, tam in ellipsi quam in hyperbola, sit punctum E, sumpta AE æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti; in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipsi finitur | in puncto axis minoris M, sumpta LM æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti, secundum quod possunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos ter- (p. 81).

[1]) Lisez: DN.

De l'évolution des courbes.

apparaîtra facilement à celui qui considère la genèse de cette courbe, que ce sont là ses extrémités, en tenant compte de la proportion AD : DE = LM : MD propre à l'ellipse.

Or, nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ces choses, mais nous poursuivrons en enseignant la méthode par laquelle on trouve tant les courbes qui correspondent aux sections coniques que d'autres courbes en nombre infini provenant de courbes données quelconques.

PROPOSITION XI.

Étant donnée une ligne courbe, en trouver une autre par l'évolution de laquelle elle peut être décrite; et montrer que de toute courbe géométrique provient une autre courbe également géométrique, et qui est rectifiable [1]).

Soit [Fig. 70] une courbe ou une partie d'elle ABF courbée vers un seul côté, et une droite KL à laquelle tous les points soient rapportés; et qu'il faille trouver une autre courbe telle que DE par l'évolution de laquelle ABF puisse être décrite.

Supposons cette courbe déjà trouvée. Puisque toutes les tangentes à la courbe DE doivent être normales à la développante ABF, il est évident que réciproquement toutes les normales à ABF, telles que BD et FE, seront tangentes à la développée CDE.

Considérons les points B et F fort proches l'un de l'autre, et puisque l'évolution commence par hypothèse à partir du point A et que F en est plus éloigné que B, le point de contact E sera également plus éloigné du point A que le point D; et l'intersection des droites BD et FE, qui est G, tombera au-delà du point D sur la droite BD. Car il est nécessaire que BD et FE se coupent, puisqu'elles sont normales à la courbe BF du côté où elle est concave.

[1]) Comparez les p. 206 et 387 (note 2) du T. XIV, ainsi que le § 1 à la p. 142 et le § 5 à la p. 146 du T. XVII, notamment la note 3 de la p. 143 de ce dernier Tome, où nous avons reproduit la première Fig. 70 du texte. Nous y avons remarqué que la lettre C du § 1 manque dans cette figure; toutefois dans son exemplaire à lui de l'„Hor. osc." Huygens y a ajouté la lettre C de sa main, de sorte que l'accord avec le texte du § 1 nommé est dès lors complet.

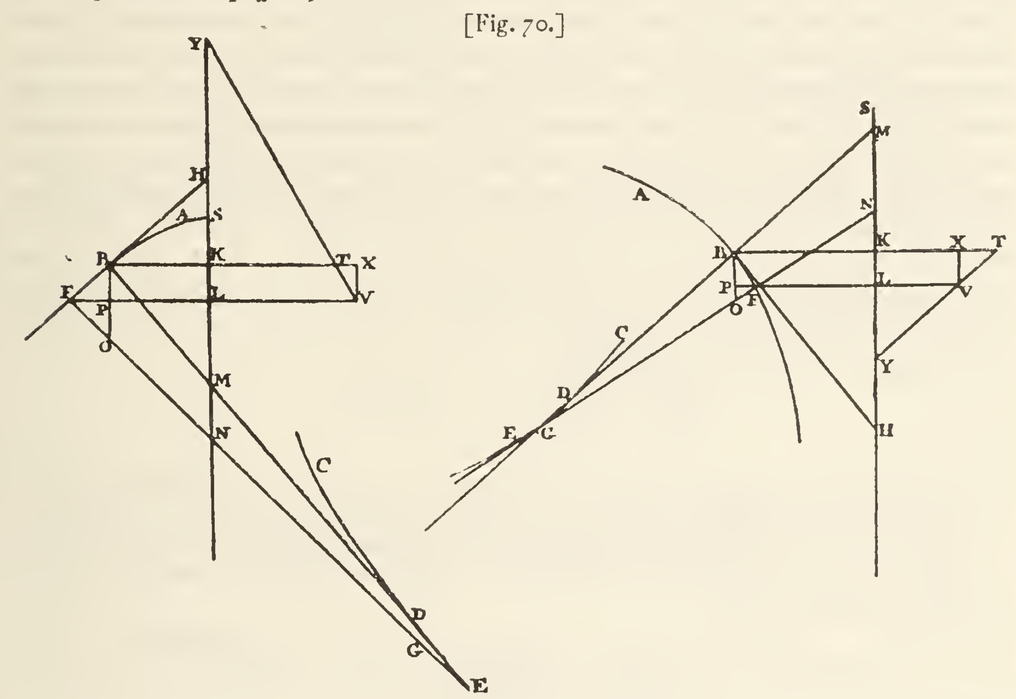
minos esse hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus consideranti, quodque in ellipsi est sicut AD ad DE, ita LM ad MD. De linearum curvarum evolutione.

Horum autem demonstrationi non immorabimur, sed ad ipsam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex sectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuscunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; & ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea æqualis dari possit [1]).

[Fig. 70.]



Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa ABF [Fig. 70], & recta KL, ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut DE, cujus evolutione ipsa ABF describatur.

Ponatur jam inventa; & quoniam tangentes omnes curvæ DE, necesse est occurrere lineæ ABF, ex evolutione descriptæ, ad angulos rectos; patet quoque vicissim eas quæ ipsi ABF ad rectos angulos insistunt, ut BD, FE, tacturas evolutam CDE.

Intelligantur autem puncta B, F, inter se proxima; & siquidem à parte A evolutio (*p.* 82). incipere ponatur, ulteriusque inde distet F quam B, etiam contactus E ulterius quam D distabit ab A; intersectio vero rectarum BD, FE, quæ est G, cadet ultra punctum D in recta BD. Nam concurrere ipsas BD, FE necesse est, cum curvæ BF ad partem cavam insistant rectis angulis.

De l'évolution des courbes.

Or, d'autant que le point F sera plus proche du point B, d'autant plus rapprochés seront apparemment aussi les points D, G et E; par conséquent, si l'intervalle BF est considéré comme infiniment petit, les trois points nommés devront être considérés comme n'en formant qu'un seul; en outre, lorsqu'on tire la droite BH qui touche la courbe en B, celle-ci sera estimée être une tangente en F aussi. Soit BO parallèle à KL et BK, FL des perpendiculaires sur cette dernière; puisse FL couper la droite BO en P et soient marqués les points M et N où les droites BD et FE coupent KL. Comme alors le rapport BG : GM est égal au rapport BO : MN, le dernier étant donné, le premier sera également connu: et comme la droite BM est donnée en grandeur et en position, le point G situé sur le prolongement de BM sera également donné; et ce point est identique avec le point D de la courbe CDE puisque, comme nous l'avons dit, G et D coïncident [1]). Or, le rapport BO : MN est donné en effet, directement dans le cas de la cycloïde où nous l'avons examiné en premier lieu (et où nous avons trouvé qu'il est de 2 : 1 [2])), par la composition de deux rapports donnés dans les autres courbes que nous avons prises en considération jusqu'aujourd'hui. Car puisque le rapport BO : MN est composé des rapports BO : BP, ou NH : LH, et BP ou KL : MN, il est clair que si ces deux rapports sont donnés, la raison composée des deux BO : MN sera également connue. Mais il apparaîtra bientôt que ces deux rapports sont donnés dans toutes les courbes géométriques, et que par conséquent on peut toujours leur assigner des courbes par l'évolution desquelles elles peuvent être décrites et qui sont par conséquent rectifiables.

---

[1]) En transposant ce calcul dans les notations modernes — comparez sur ce sujet la p. 44 de l'Avertissement qui précède — on peut écrire, comme le disent la p. 143 du T. III des „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" de M. Cantor (Deuxième éd. Leipzig, Teubner 1901) et la note 70 de la traduction allemande de l'„Hor. osc." par A. Heckscher et A. v. Oettingen publiée en 1913:

$$BO = BP + PO = BP\left[1 + \left(\frac{PF}{BP}\right)^2\right] = \Delta x\left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

donc
$$\lim. BO = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx;$$

$$MN = KL + LN - KM = \Delta x + \Delta\,(\text{sous-normale}).$$

La sous-normale étant $y\frac{dy}{dx}$, on a

$$d\left(y\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2},$$

donc
$$\lim. MN = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx + y\frac{d^2y}{dx^2}\,dx.$$

Comme BG : MG = BO : MN, on a donc

Quanto autem punctum F ipsi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet; ideoque, si interstitium BF infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda; ac præterea, ductâ rectâ BH, quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F censebitur. Sit BO parallela KL, & in hanc perpendiculares cadant BK, FL: secetque FL rectam BO in P, & sint puncta notata M, N, in quibus rectæ, BD, FE, occurrant ipsi KL. Quia igitur ratio BG ad GM est eadem quæ BO ad MN, data hac dabitur & illa; & quia recta BM datur magnitudine ac positione, dabitur & punctum G in producta BM, sive D in curva CDE, quia G & D in unum convenire diximus [1]). Datur autem ratio BO ad MN, simpliciter quidem in Cycloide, ubi primùm omnium illam investigavimus, invenimusque duplam [2]); in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compositionem. Nam quia ratio BO ad MN componitur ex rationibus BO ad BP, sive NH ad LH, & ex BP sive KL ad MN; patet, si rationes hæ utræque dentur etiam ex iis compositam rationem BO ad MN datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in sequentibus patebit; ac proinde iis semper curvas adsignari posse, quarum evolutione describantur, quæque ideo ad rectas lineas sint reducibiles.

De linearum curvarum evolutione.

$$\lim. \frac{BG}{MG} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}},$$

d'où l'on tire

$$\lim. \frac{BG}{BG - MG} \text{ ou } \lim. \frac{BG}{BM} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-y\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

La normale BM étant

$$x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ il en résulte}$$

$$\lim. BG = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ rayon de courbure.}$$

Vers 1694 Jacques Bernoulli réussit à trouver pour ce rayon l'expression équivalente $\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ („Jac. B. Curvatura Laminæ elasticæ. Ejus identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti etc.", p. 264 des Acta Eruditorum de Leipzig de 1694).

[3]) Voir le § 3 à la p. 145 du T. XVII; voir aussi la note 2 de la p. 142 du même Tome et la note 1 de la p. 404 du T. XIV.

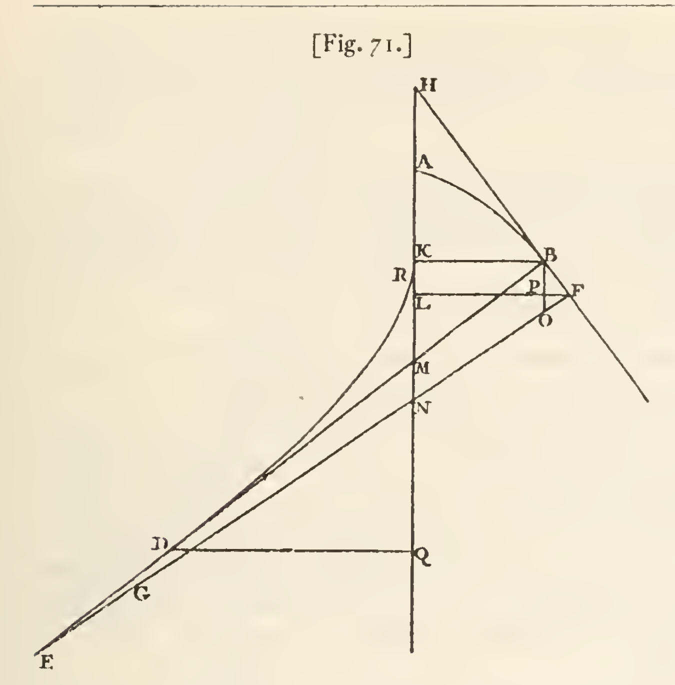
De l'évolution des courbes.

Suppoſons d'abord [Fig. 71] que ABF ſoit une parabole de ſommet A et d'axe AQ. Puiſque les lignes BM et FN ſont normales à la parabole et BK et FL à l'axe AQ, d'après une propriété de la parabole, MK et NL ſeront chacune égale à la moitié du latus rectum; et en retranchant la partie commune LM on aura KL = MN. Par conſéquent, attendu que le rapport BG : GM eſt composé des rapports NH : HL et KL : MN, comme il a été dit, et que le dernier des deux eſt de 1 : 1, il eſt évident que BG : GM = NH : HL; et, par diviſion, BM : MG = NL : LH, ou MK : KH; car LH et KH ſont conſidérées comme identiques à cauſe de la proximité des points B et F. Or, le rapport MK : KH eſt donné, lorſque le point B l'eſt puiſque MK et KH ſont données chacune en grandeur: MK eſt égale à la moitié du latus rectum, et KH = 2KA. La droite BM eſt auſſi donnée en poſition et en grandeur. Par conſéquent MG ſera auſſi donnée et le point G ou D de la courbe RDE également: ce point eſt trouvé en prolongeant BM juſqu'en G de telle manière qu'on ait: BM : MG = $\frac{1}{2}$ latus rectum: 2KA.

De cette manière, un nombre quelconque de points, outre B, ayant été pris ſur la parabole ABF, autant de points de la ligne RDE ſeront trouvés de la même manière; par là même il eſt évident que la ligne RDE eſt géométrique et l'on connaît une de ſes propriétes d'où les autres peuvent être déduites. Par exemple, ſi nous voulons demander enſuite, par quelle équation s'exprime la relation de tous les points de la courbe CDE [3]) à la droite AQ, DQ étant une perpendiculaire ſur AQ, le latus rectum de la parabole ABF étant appelé a, AK b, AQ x et QD y, voici ce que nous aurons. Puiſque BM : MD, c. à. d. KM : MQ, $= \frac{1}{2}a : 2b$, et que KM $= \frac{1}{2}a$, MQ ſera auſſi égale à $2b$. Or, MA $= \frac{1}{2}a + b$. Par conſéquent AQ ou $x = 3b + \frac{1}{2}a$. D'où $b = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$. Enſuite, comme MK² ou $\frac{1}{4}a^2 : KB^2$ ou $ab = MQ^2$ ou $4b^2 : QD^2$, on aura QD^2 ou $y^2 = \dfrac{16b^3}{a}$. Et, en ſubſtituant à b l'expreſſion $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$ qui a été trouvée égale à lui, on obtiendra: $y^2 = 16(\frac{1}{3}x - 6a)^3 : a$. Par conſéquent $\frac{27}{16}\,ay^2 = (x - \frac{1}{2}a)^3$. Prenons ſur l'axe de la parabole AR $= \frac{1}{2}a$; on aura alors RQ $= x - \frac{1}{2}a$. Il apparaît donc que la courbe CD [1]) eſt d'une telle nature que le cube de la ligne RQ eſt toujours égal à un parallélépipède dont la baſe eſt le carré de QD et la hauteur $\frac{27}{16}\,a$; et

[1]) Lisez RDE [Fig. 71].

[Fig. 71.]



Ponatur primo parabola eſſe ABF [Fig. 71], cujus vertex A, axis AQ. Cum igitur lineæ BM, FN, ſint parabolæ ad angulos rectos; ductæque ſint ad axem AQ perpendiculares BK, FL; erunt, ex proprietate parabolæ, ſingulæ MK, NL dimidio lateri recto æquales; & ablàta communi LM, æquales inter ſe KL, MN. Hinc, quum ratio BG ad GM componatur ex rationibus NH ad HL, & KL ad MN, uti dictum fuit, ſitque earum poſterior ratio æqualitatis, liquet rationem BG ad GM fore eandem quæ NH ad HL; & dividendo, BM ad MG, eandem quæ NL ad LH, ſive MK ad KH; nam LH, KH pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F. Data autem eſt ratio MK ad KH, dato puncto B; quoniam tam MK, quam KH dantur magnitudine; nam MK æquatur dimidio lateri recto, KH vero duplæ KA. Dataque etiam eſt poſitione & magni|tudine recta BM. Ergo & MG data erit, adeoque & punctum G, ſive D, in curva RDE; quod nempe invenitur productâ BM uſque in G, ut ſit BM ad MG ſicut $\frac{1}{2}$ lateris recti ad duplam KA. (*p.* 83).

De linearum curvarum evolutione.

Et ſic quidem, adſumptis in parabola ABF aliis quotlibet punctis præter B, totidem quoque puncta lineæ RDE, ſimili ratione, invenientur; atque hoc ipſo lineam RDE geometricam eſſe conſtat, unáque proprietas ejus innoteſcit, ex qua cæteræ deduci poſſunt. Ut ſi inquirere deinde velimus, quanam æquatione exprimatur relatio punctorum omnium curvæ CDE [1]) ad rectam AQ: ducta in hanc perpendiculari DQ, vocatoque latere recto parabolæ ABF, a; AK, b; AQ, x; QD, y. Quoniam ratio BM ad MD, hoc eſt, KM ad MQ, eſt ea quæ $\frac{1}{2}a$ ad $2b$, eſtque ipſa KM ∞ $\frac{1}{2}a$, erit & MQ æqualis $2b$. Eſt autem MA ∞ $\frac{1}{2}a + b$. ergo AQ ſive x æqualis $3b + \frac{1}{2}a$. Unde $b \infty \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$. Porro quoniam, ſicut quadratum MK, hoc eſt, $\frac{1}{4}aa$ ad quadratum KB, hoc eſt, ab, ita qu. MQ, hoc eſt, $4bb$ ad qu. QD; erit qu. QD, ſive $yy \infty \frac{16b^3}{a}$. Ubi, ſi in locum b ſubſtituatur $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$, quod illi æquale inventum eſt, fiet $yy \infty$ 16. cub. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$ diviſis per a. Ac proinde $\frac{27}{16}ayy \infty$ cubo ab $x - \frac{1}{2}a$. Accipiatur AR in axe parabolæ ∞ $\frac{1}{2}a$; eritque RQ ∞ $x - \frac{1}{2}a$. Curvam igitur CD ejus naturæ eſſe liquet, ut ſemper cubus lineæ RQ æquetur parallelepipedo, cujus baſis qu. QD, altitudo $\frac{27}{16}a$;

De l'évolution des courbes.

que par conséquent cette courbe est la paraboloïde dont nous avons fait voir plus haut que la parabole AB est la développante, paraboloïde dont le latus rectum est égal à $\frac{27}{16}$ fois celui de la parabole AB. En effet, s'il en est ainsi son latus rectum devient égal à $\frac{16}{27}$ fois celui de la paraboloïde, comme il a été trouvé en cet endroit.

Or, il est manifeste de quelle manière on peut trouver le rapport OB : BP ou NH : HL, non seulement lorsque ABF est une parabole, mais encore lorsque c'est une autre courbe géométrique quelconque. Car il suffira de mener une tangente à la courbe au point considéré F [Fig. 70] et de prendre FN perpendiculaire à FH, par quoi NH et HL seront données et par conséquent aussi leur rapport.

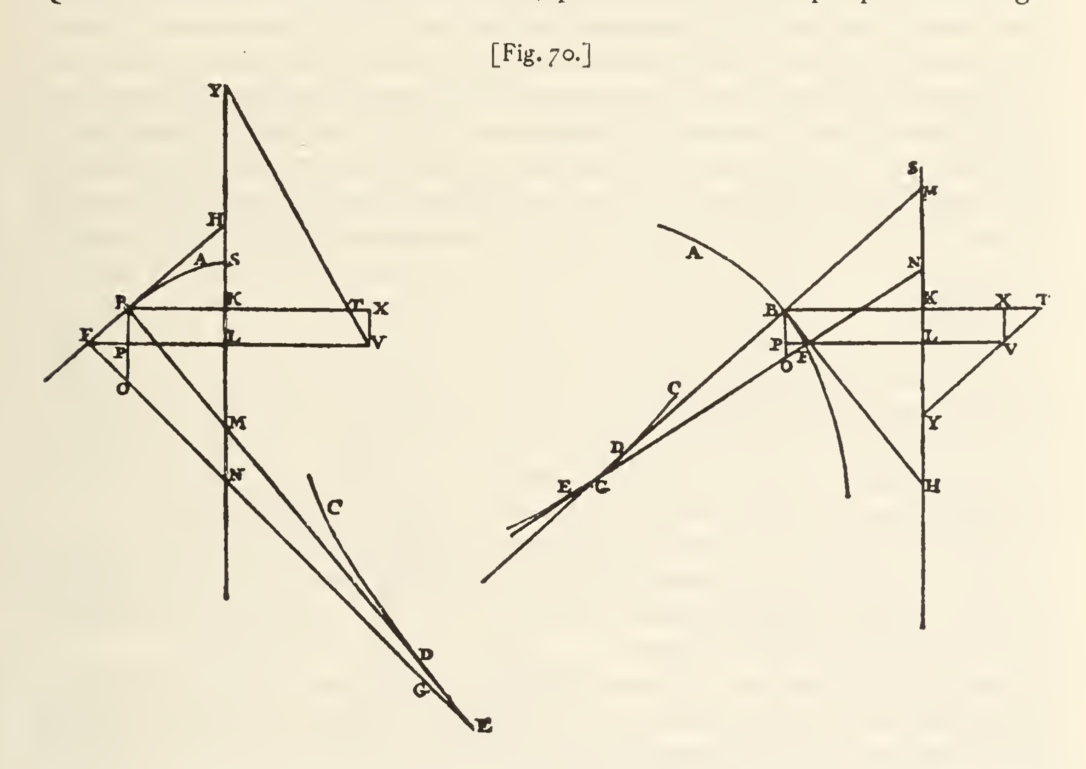
Mais il n'est pas aussi évident comment le rapport KL : MN peut être trouvé; toutefois nous montrerons comme suit que cela est toujours possible.

Soient les droites KT et LV perpendiculaires à KL, soit KT = KM, LV = LN, et tirons VX parallèle à LN et rencontrant KT en X. Vu que la différence de LK et de NM est toujours la même que celle de LN et de KM, c. à. d. que celle de LV et de KT, et que la différence de LV et de KT est égale à XT, et que XV = LK, il en résulte que NM est égale ou bien à VX + XT ou bien à VX — XT. Par conséquent, si le rapport VX : XT est donné, le rapport VX : VX + XT ou VX : VX — XT, en d'autres termes celui de VX ou LK à MN sera également donné.

ac proinde ipſam paraboloidem eſſe, cujus evolutione deſcribi parabolam AB ſupra oſtendimus; cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{27}{16}$ lateris recti parabolæ AB. tunc enim hujus latus rectum æquale ſit $\frac{16}{27}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum. De linearum curvarum evolutione.

Quomodo porro ratio OB ad BP, ſive NH ad HL, non tantum cum ABF parabola eſt, ſed etiam alia quælibet curva geometrica, ſemper inveniri poſſit manifeſtum eſt. Quoniam tantum recta FH ducenda eſt, quæ curvam in adſumpto puncto F tangat (*p.* 84).

[Fig. 70.]



[Fig. 70], & FN ipſi FH perpendicularis: unde NH & HL datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.

At non æque liquet quo pacto ratio KL ad MN innoteſcat, quam tamen ſemper quoque reperiri poſſe ſic oſtendemus.

Sint rectæ KT, LV, perpendiculares ſuper KL, ſitque KT æqualis KM, & LV æqualis LN, & ducatur VX parallela LN, quæ occurrat ipſi KT in X. Quoniam ergo ſemper eadem eſt differentia duarum LK, NM, quæ duarum LN, KM, hoc eſt, quæ duarum LV, KT; eſt autem differentiæ ipſarum LV, KT æqualis XT, & XV ipſi LK; erit proinde NM æqualis duabus ſimul VX, XT, vel ei quo VX ipſam XT ſuperat. Atque adeo, ſi data fuerit ratio VX ad XT, data quoque erit ratio VX ad utramque ſimul VX, XT, vel ad exceſſum VX ſupra XT, hoc eſt, data erit ratio VX ſive LK ad NM:

De l'évolution des courbes.

Or, il faut favoir que puifque nous avons pris KT = KM et LV = LN, le lieu des points T, V fera une certaine ligne droite ou courbe donnée. Et fi c'eft une ligne droite, comme c'eft le cas lorfque ABF eft une fection conique, et KL fon axe, il eft clair que le rapport VX : XT fera donné, étant donnée la pofition de la ligne VT qui eft le lieu des points V, T, et qu'alors le dit rapport a toujours la même valeur quel que foit l'intervalle KL.

Mais lorfque le lieu eft une autre ligne courbe, le rapport VX : XT fera différent felon que l'intervalle KL fera plus grand ou plus petit. Or, il faut examiner la valeur de ce rapport, lorfque nous nous figurons KL infiniment petite, puis que nous avons auffi fuppofé les points B et F fort proches l'un de l'autre. Pareillement il faut fonger que les points V et T interceptent une partie abfolument minime de la ligne courbe; d'où il s'enfuit que la droite VT coïncidera avec celle qui touche la courbe en T. Soit donc TY cette tangente: elle peut être conftruite puifque la courbe fur laquelle fe trouvent les points T et V eft géométrique [1]). Le rapport YK : KT eft donc donné, et par conféquent auffi VX : XT, d'où nous avons montré qu'on peut tirer le rapport LK : NM.

On trouve la nature de la ligne paffant par les points T et V en prenant un certain point S fur la droite KL et en appelant SK x et KT y. Car puifque la courbe ABF eft donnée et que BM eft fa normale, on trouvera ainfi par la méthode des tangentes enfeignée par Descartes [2]) la grandeur de la ligne KM que l'on égalera à KT ou y: par cette équation la nature de la courbe TV, à laquelle il faut enfuite mener une tangente, apparaîtra. Mais tout deviendra plus clair par l'exemple fuivant.

Soit ABF [Fig. 72] la paraboloïde rectifiée plus haut, favoir celle dont les cubes des perpendiculaires fur la droite SK font entre eux comme les carrés des abfciffes fituées fur elle, et qu'on demande de trouver la courbe CDE par l'évolution de laquelle la paraboloïde SBF eft décrite.

Premièrement on trouve aifément le rapport BO : BP parce que nous favons que la tangente en B à la paraboloïde peut être conftruite en prenant SH = $\frac{1}{2}$SK. Comme BM eft normale à cette tangente, les lignes MH et HK font données, et par conféquent auffi leur rapport qui eft égal à OB : BP.

---

[1]) Voir sur la construction des tangentes aux courbes géométriques les p. 442—448 du T. XIV, notamment la note 6 de la p. 446 sur l'algorithme de Hudde, et la note 3 de la p. 442, où le lecteur est renvoyé à la „Regula" de la p. 315 du T. IV contenue dans la lettre de Huygens à J. de Witt du 25 février 1663.

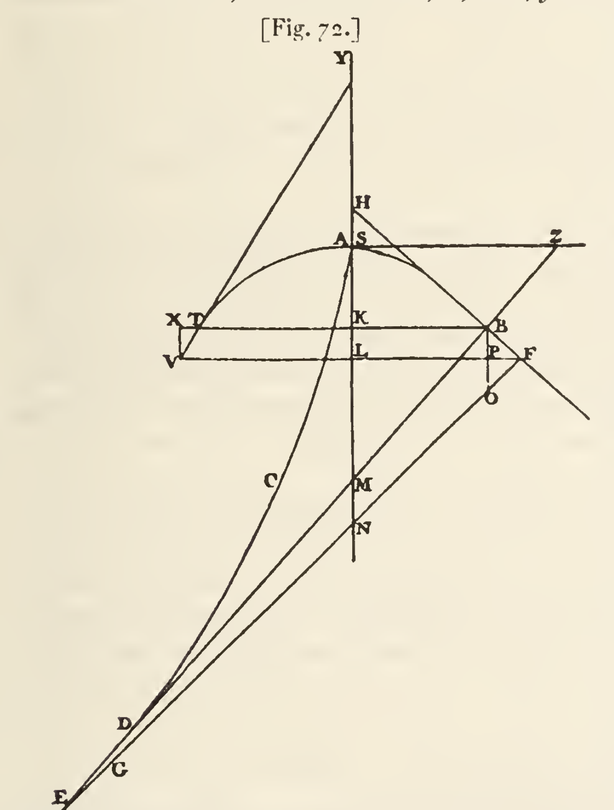
[2]) Dans le second livre de la „Géométrie" (éd. Adam et Tannery, T. VI, p. 413—424); voir la p. 17 du T. XI et la note 10 de la p. 65 du T. XII.

Sciendum eſt autem, quoniam KT ipſi KM, & LV ipſi LN, æquales ſumptæ ſunt, locum punctorum T, V, fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox oſtendetur. Et ſiquidem ſit linea recta; ut contingit ſi ABF coni ſectio fuerit, & KL axis ejus; conſtat rationem VX ad XT datam fore, data poſitione ipſius lineæ VT, quæ locus eſt punctorum V, T; ſemperque can|dem tunc haberi dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum KL. De linearum curvarum evolutione. (p. 85).

At ſi locus alia linea curva fuerit, diverſa erit ratio VX ad XT, prout majus minusve fuerit intervallum KL. Inquirendum eſt autem quænam futura ſit iſta ratio, cum KL infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B, F, proxima invicem poſuimus. Similiter itaque & puncta V, T, lineæ curvæ minimam particulam intercipere intelligendum eſt; unde recta VT, cum ea quæ in T curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa TY; poteſt enim duci quoniam curva, ad quam ſunt puncta T, V, geometrica eſt [1]). Ratio igitur YK ad KT data erit, adeoque & VX ad XT. ex qua etiam rationem LK ad NM dari oſtendimus.

Quænam vero ſit linea ad quam ſunt puncta T, V, invenitur ponendo certum punctum S in recta KL, & vocando SK, x; KT, y. Nam quia data eſt curva ABF, eique BM ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineæ KM, per methodum tangentium à Carteſio traditam [2]), quæ ipſi KT, ſive y æquabitur, & ex ea æquatione, natura curvæ TV innoteſcet, ad quam deinde tangens ducenda eſt. Sed clariora omnia fient ſequenti exemplo.

[Fig. 72.]



Sit ABF [Fig. 72] paraboloides illa, cui ſuperius rectam æqualem invenimus; in qua nempe cubi perpendicularium in rectam SK, ſint inter ſe ſicut quadrata ex ipſa SK abſciſſarum. Et oporteat invenire curvam CDE cujus evolutione paraboloides SBF deſcribatur.

Hic primum ratio BO ad BP facile invenitur, quia tangentem paraboloidis in puncto B duci ſcimus, ſumpta SH æquali $\frac{1}{2}$ SK. Cui tangenti cum BM ad angulos rectos inſiſtat, dantur jam lineæ MH, HK, ac proinde earum inter ſe ratio, quæ eſt eadem quæ OB ad BP.

De l'évolution des courbes.

Pour calculer enſuite le rapport de BP ou KL à MN tirons normalement à KL les droites KT et LV égales reſpectivement à KM et LN dont la dernière ſera la plus grande des deux; et ſoit VX parallèle à LK. Puiſqu'alors KL + LN — KM [1]) = MN — où l'on peut auſſi de XV + VL ou XV + XK retrancher KT, ce qui donne le reſte VX + XT — on aura VX + XT = MN; partant le rapport KL : MN ſera égal à VX : VX + XT. Et pour trouver la valeur de ce rapport lorſque l'intervalle KL eſt extrêmement petit, il faut ſuivant ce qui a été dit plus haut chercher quel eſt le lieu ou la ligne des points T, V. Appelons à cet effet a le latus rectum de la paraboloïde et ſoit SK = x, KT = y.

Comme KH, KB et KM ſont alors proportionnelles et que HK = $\frac{3}{2}x$, tandis que d'après la nature de la paraboloïde KB = $\sqrt[3]{ax^2}$, KM ou KT deviendra égale à $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2x}$. Donc $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2x} = y$, partant $\frac{8}{27}a^2x = y^3$. D'où il apparaît que le lieu des points T, V eſt cette paraboloïde que les géomètres appellent cubique. On y mènera une tangente au point T en prenant SY = 2SK, et en joignant Y et T par une droite. Le rapport VX : VX + XT, que nous avons dit être égal à KL : MN, ſera maintenant celui de YK à YK + KT. Or, ce dernier rapport eſt donné, par conſéquent auſſi le rapport KL : MN. Mais il a été démontré que le rapport OB : PB eſt également connu. Comme le rapport BD : DM eſt compoſé des deux rapports en queſtion, ainſi que cela eſt apparu plus haut, le rapport BD : DM ſera lui auſſi connu; et, par diviſion, on connaîtra le rapport BM : MD et par conſéquent auſſi le point D de la courbe DE.

Or, c'eſt ainſi qu'on parviendra à la conſtruction la plus courte. KT ou KM a été appelée y. On aura donc MH = $y + \frac{3}{2}x$. Et MH : HK, ou OB : BP, = $y + \frac{3}{2}x : \frac{3}{2}x$, ou en doublant les termes = $2y + 3x : 3x$. Enſuite, parce que YK = $3x$, on aura YK : YK + KT, ou YK : KL + MN d'après ce qui a été dit plus haut, = $3x : 3x + y$. Mais nous avons dit que le rapport BD : DM eſt compoſé des rapports OB : BP et KL : MN. Le rapport BD : DM ſera donc compoſé des rapports $2y + 3x : 3x$ et $3x : 3x + y$, et ſera par conſéquent égal à $2y + 3x : 3x + y$; et, par diviſion, on aura BM : MD = $y : 3x + y$.

Soit SZ perpendiculaire à SK et que MB prolongée la coupe en Z. Comme le rapport BM : MD a été trouvé égal à $y : y + 3x$, c. à. d. à MK : MK + 3 KS, et qu'à ce dernier rapport eſt égal le rapport MB : MB + 3BZ. on aura par conſéquent MB : MD = MB : MB + 3BZ. D'où il appert que MD doit être priſe égale à MB + 3BZ. Et de la même manière on pourra trouver un nombre quelconque de points de la courbe CDE. Un arc quelconque de cette courbe tel que DS ſera égal à la droite DB qui eſt normale à la paraboloïde SAB. Il eſt certain que la courbe trouvée eſt géométrique et, ſi nous le voulons, nous pouvons exprimer par une équation la relation de tous ſes points à ceux de l'axe SK.

De la même manière, ſi nous faiſons cette recherche pour la paraboloïde ou parabole cubique [Fig. 73] dont les cubes des ordonnées perpendiculaires à l'arc ſont

Ut autem ratio BP, ſive KL ad MN innoteſcat, ponantur ad KL perpendiculares rectæ KT, LV, æquales ſingulis KM, LN, ſitque VX parallela LK. Jam quia ex duabus ſimul KL, LN, auferendo KM, relinquitur MN [1]); hoc eſt, auferendo ex duabus XV, VL, ſive XV, XK, ipſam KT; hinc autem relinqui apparet VX & XT: erunt igitur hæ duæ VX, XT ipſi MN æquales, ac proinde ratio KL ad MN eadem quæ VX ad duas ſimul VX, XT. Ut autem hæc ratio innoteſcat cum intervallum KL eſt minimum; oportet ſecundum prædicta inquirere quis ſit locus, ſive linea ad quam ſunt puncta T, V. Quod ut fiat ſit latus rectum paraboloidis ABF ∞ a; SK ∞ x; KT ∞ y. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quia igitur proportionales ſunt KH, KB, KM, eſtque HK ∞ | $\frac{1}{2}x$: KB ex natura (*p.* 86). paraboloidis æqualis R. cub. axx: fiet KM, hoc eſt KT ∞ $\frac{2}{3}$ R. cub. aax ∞ y, ac proinde $\frac{8}{27}$ aax ∞ y^3. Unde patet locum punctorum T, V, eſſe paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad T tangens ducetur, ſumptâ SY duplâ ipſius SK, junctâque YT. Et jam quidem ratio VX ad duas ſimul VX, XT, quam diximus eandem eſſe ac KL ad MN, erit ea quæ YK ad utramque ſimul YK, KT. Hæc autem ratio data eſt, ergo & ratio KL ad MN. Sed & rationem OB ad PB datam eſſe oſtenſum eſt. Ergo, cum ex duabus hiſce componatur ratio BD ad DM, ut ſupra patuit, dabitur & hæc; & dividendo, ratio BM ad MD; adeoque & punctum D in curva DE.

Ad conſtructionem autem breviſſimam hoc pacto hic perveniemus. KT ſive KM dicta fuit y. Itaque MH erit $y + \frac{3}{2}x$. Et MH ad HK, ſive OB ad BP, ut $y + \frac{3}{2}x$ ad $\frac{3}{2}x$. ſive, ſumptis omnium duplis, ut $2y + 3x$ ad $3x$. Deinde quia YK ∞ $3x$, erit YK ad YK + KT, ſive per prædicta, KL ad MN, ut $3x$ ad $3x + y$. Atqui ex rationibus OB ad BP, & KL ad MN, componi diximus rationem BD ad DM. Ergo ratio BD ad DM erit compoſita ex rationibus $2y + 3x$ ad $3x$, & $3x$ ad $3x + y$; ideoque erit ea quæ $2y + 3x$ ad $3x + y$. & dividendo, ratio BM ad MD, eadem quæ y ad $3x + y$.

Sit SZ perpendicularis ad SK, eique occurrat MB producta in Z. | Quia ergo ratio (*p.* 87). BM ad MD inventa eſt ea quæ y ad $y + 3x$, hoc eſt quæ MK ad MK + 3 KS. Sicut autem MK ad MK + 3 KS, ita MB ad MB + 3 BZ; erit proinde MB ad MD ut MB ad MB + 3 BZ. Unde liquet MD æqualem ſumendam ipſi MB + 3 BZ. Atque ita quotlibet puncta curvæ CDE invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut DS, rectæ DB, quæ paraboloidi SAB ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Conſtat autem geometricam eſſe, & ſi velimus, poſſumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipſius ad puncta axis SK.

Simili modo autem, ſi inquiramus in paraboloide illa ſive parabola cubica [Fig. 73], in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut portiones axis abſciſſæ,

---

[1]) Note manuscrite de Huygens: „Supponitur hic rectam LN majorem esse quam KM. quod melius fuerat antea probari, etsi verum est”. ’s Gravesande donne cette preuve dans son édition de 1724. Le lecteur vérifiera aisément que dans la courbe considérée la sous-normale est d’autant plus grande que le point considéré de la courbe est plus éloigné du sommet.

De l'évolution des courbes.

entre eux comme les abſciſſes qui ſont ſituées ſur lui, nous trouverons que la courbe par l'évolution de laquelle elle eſt décrite et qui eſt par conſéquent rectifiable, eſt déterminée par points par une conſtruction nullement plus difficile. En effet, ſoit SAB cette parabole cubique, SM ſon axe (or, c'eſt improprement qu'on parle d'un axe dans le cas de cette courbe, puiſque ſa forme eſt telle que, lorſqu'on tire SZ perpendiculairement à SM, SZ a des parties ſemblables de la courbe ſituées de part et d'autre). Tirons par un point B quelconque pris ſur la paraboloïde la droite BD qui lui ſoit normale et coupe l'axe en M, la droite SZ en Z. Prenons enſuite BD $= \frac{1}{2}$BM $+ \frac{3}{2}$ BZ. D ſera alors un des points de la courbe cherchée RD ou RI par l'évolution de laquelle, après qu'on y a encore ajouté une certaine droite RA, la paraboloïde SAB ſera décrite. Or, il y a ici, ce qui mérite d'être remarqué, et ce qui arrive auſſi dans le cas de certaines autres paraboloïdes de ce genre, deux évolutions de ſens oppoſés, dont l'une et l'autre ſe fait à partir du point déterminé A; de ſorte que par l'évolution de ARD prolongée juſqu'à l'infini la branche infinie ABF de la paraboloïde eſt décrite, mais par l'évolution de ARI qui s'étend également juſqu'à l'infini, ſeulement l'arc AS. Quant au point A, on le détermine en prenant SP de telle grandeur que ſon rapport au latus rectum de la paraboloïde ſoit égal à celui de l'unité à $\sqrt[8]{91125}$ (lequel nombre eſt le cube de 45) et en tirant l'ordonnée correſpondante PA. En partant de là, on trouvera enſuite le point R, extrémité commune des deux courbes RD et RI, comme tous les autres points de ces courbes, c.à.d. comme le point D a été trouvé tout-à-l'heure.

Enfin, quelle que ſoit dans la famille des paraboloïdes la courbe SAB, nous avons trouvé qu'on peut toujours avec la même facilité trouver par points une autre courbe par l'évolution de laquelle elle peut être décrite et qui eſt par conſéquent rectifiable. Nous repréſentons donc dans la table qui ſuit, et qui peut s'étendre juſqu'où l'on voudra, la conſtruction univerſelle.

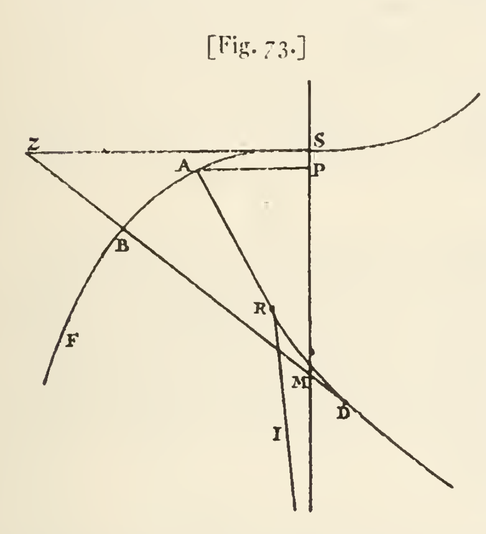
$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} ax = y^2 \\ a^2x = y^3 \\ ax^2 = y^3 \\ ax^3 = y^4 \\ a^3x = y^4 \end{array}\right\}, \text{ on aura } \left\{\begin{array}{l} \text{BM} + 2\text{BZ} \\ \frac{1}{2}\text{BM} + \frac{3}{2}\text{BZ} \\ 2\text{BM} + 3\text{BZ} \\ 3\text{BM} + 4\text{BZ} \\ \frac{1}{3}\text{BM} + \frac{4}{3}\text{BZ} \end{array}\right\} = \text{BD}.$$

Soit SB [Fig. 74] une parabole ou paraboloïde à ſommet S, et SK l'axe (ou bien une perpendiculaire à l'axe) auquel ſoient rapportés par une équation les points de la paraboloïde. Nous ſuppoſons toujours SK tiré du côté concave, et SZ perpendiculaire à lui. Etant poſée maintenant SK $= x$, BK $= y$, laquelle eſt la perpendiculaire à SK à partir d'un point quelconque, et le latus rectum de la courbe $= a$, la première colonne de la table, celle de gauche, explique la nature de chaque paraboloïde par ſon

inveniemus curvam cujus evolutione describitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliori constructione per puncta determinari. Nam si fuerit illa SAB; axis SM; (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus sit ejusmodi, ut ductâ SZ, quæ secet SM ad angulos rectos, ea portiones similes curvæ habeat ad partes oppositas;) agatur per punctum quodlibet B, in paraboloide sumptum, recta BD, quæ curvam ad angulos rectos secet, axique ejus occurrat in M, rectæ vero SZ in Z. Deinde sumatur BD æqualis dimidiæ BM, unà cum sesquialtera BZ. Eritque D unum è punctis curvæ quæsitæ RD vel RI, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam RA, describetur paraboloides SAB. Sunt autem hic, quod notatu dignum est, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque à puncto certo A initium capit; ita ut evolutione ipsius ARD, in infinitum porro continuatæ, describatur paraboloidis pars infinita ABF; evolutione autem totius ARI, similiter in infinitum extensæ, tantum particula AS. Punctum autem A definitur, sumptâ SP quæ sit ad | latus rectum paraboloidis, sicut unitas ad radicem quadrato-quadraticam (*p.* 88). numeri 91125, (is cubus est ex 45) applicatâque ordinatim PA. Unde porro punctum R, confinium duarum curvarum RD, RI, invenitur sicut cætera omnia harum curvarum, hoc est, sicut punctum D modo inventum fuit.

De linearum curvarum evolutione.

[Fig. 73.]



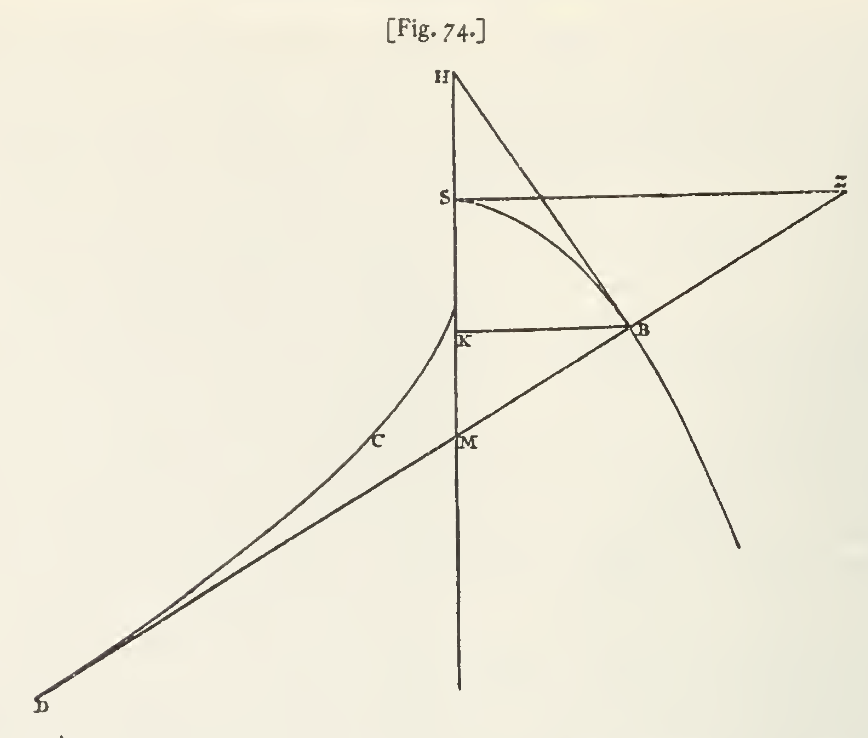
Denique, quæcunque fuerit ex paraboloidum genere curva SAB, semper æque facile curvam aliam, cujus evolutione ipsa describatur, quæque propterea rectæ adæquari possit, per puncta inveniri comperimus. Atque adeo constructionem universalem sequenti tabella exhibemus, quæ quousque libuerit extendi poterit.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} a\,x \propto y^2 \\ a^2x \propto y^3 \\ ax^2 \propto y^3 \\ ax^3 \propto y^4 \\ a^3x \propto y^4 \end{array}\right. \quad \text{Erit} \quad \left\{\begin{array}{r} \text{BM} + 2\text{BZ} \\ \tfrac{1}{2}\text{BM} + \tfrac{3}{2}\text{BZ} \\ 2\text{BM} + 3\text{BZ} \\ 3\text{BM} + 4\text{BZ} \\ \tfrac{1}{3}\text{BM} + \tfrac{4}{3}\text{BZ} \end{array}\right\} \propto \text{BD}.$$

Sit SB [Fig. 74] parabola, vel paraboloidum aliqua, cujus vertex S; recta SK vel axis, vel axi perpendicularis, ad quam referuntur æquatione puncta paraboloidis; & ipsa quidem SK semper ad partem cavam ducta intelligitur; cui perpendicularis SZ. Ponendo jam SK $\propto x$; BK $\propto y$, quæ à puncto quovis curvæ perpendicularis est ipsi SK; & latere recto curvæ $\propto a$; prior pars tabellæ, quæ ad sinistram est, naturam

De l'évolution des courbes.

[Fig. 74.]



équation. À ces équations correſpondent dans la colonne droite les longueurs de la ligne BD laquelle placée normalement ſur la courbe SB fournira le point D de la courbe cherchée CD. Par exemple, ſi SB eſt la parabole qui provient de la ſection du cône, nous ſavons que ſon équation eſt la première de la table, ſavoir $ax = y^2$, à laquelle correſpond dans l'autre colonne BM + 2 BZ = BD. D'où eſt connue la longueur de la ligne BD, et par conſéquent auſſi la méthode de trouver un nombre quelconque de points de la courbe CD. Il a été démontré plus haut que dans ce cas-ci cette développée eſt une paraboloïde, ſavoir celle dont l'équation eſt la troiſième de cette table.

Or, la table eſt conſtruite de cette manière qu'on donne à BM pour coëfficient l'expoſant de x dans l'équation, et à BZ celui de y, et qu'on diviſe enſuite la ſomme des deux termes par l'expoſant de a [1]).

Outre ces lignes paraboloïdiques nous en avons trouvé d'autres d'où l'on déduit des courbes rectifiables par une conſtruction à peu près ſemblable. Elles reſſemblent à des hyperboles en ceci qu'elles ont des aſymptotes qui toutefois font toujours entre elles un angle droit. Nous conſidérons comme la première d'entre elles l'hyperbole ordinaire qui provient de la ſection du cône.

Pour expliquer la nature des autres, ſoient PS et KS [Fig. 75] les aſymptotes de la courbe AB, comprenant entre elles un angle droit, et tirons à partir d'un point

ſingularum paraboloidum ſingulis æquationibus explicat. Quibus reſpondent in parte dextra quantitates lineæ BD, quæ ſi curvæ SB inſiſtat ad angulos rectos, exhibitura ſit punctum D | in curva quæſita CD. Exempli gratia, ſi SB eſt parabola quæ ex coni ſectione fit, ei ſcimus convenire æquationem tabellæ primam, $ax \propto y^2$; cui reſpondet ab altera parte BM + 2BZ $\propto$ BD. Unde longitudo lineæ BD cognoſcitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ CD. Quam quidem, hoc caſu, paraboloidem eſſe ſupra demonſtratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia eſt hujus tabellæ.

De linearum curvarum evolutione.

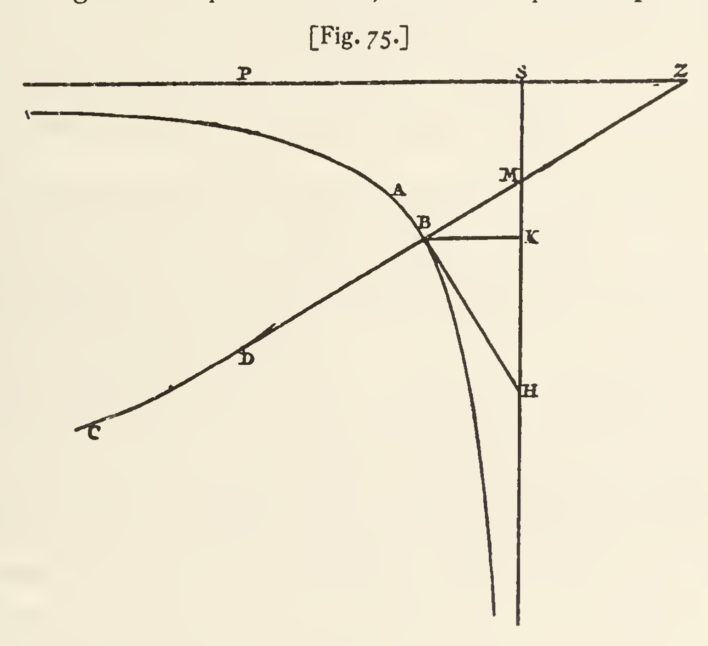
(p. 89).

Conſtruitur autem tabella hoc pacto, ut BM ſumatur multiplex ſecundum numerum qui eſt exponens poteſtatis x in æquatione; BZ vero, multiplex ſecundum exponentem poteſtatis y; ex his autem utriſque compoſitæ accipiatur pars denominata ab exponente poteſtatis a [1]).

Præter haſce autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non abſimili conſtructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Aſſimilantur autem hyperbolis, eo quod aſymptotos ſuas habent, ſed tantum angulum rectum conſtituentes. Et harum primam quidem ſtatuimus hyperbolam ipſam, quæ eſt è coni ſectione.

Reliquarum vero naturam ut explicemus; ſunto PS, SK [Fig. 75], aſymptoti curvæ AB, rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet B ducatur

[Fig. 75.]



[1]) L'équation de la „paraboloïde" ou parabole de degré supérieur étant $y^a = kx^b$, où k est une droite à la puissance $a-b$, — c'est la notation dont nous nous sommes servis dans les Tomes précédents; voir la note 2 de la p. 147 du T. XVII —, on trouve en effet BD $= \dfrac{b.\mathrm{BM} + a.\mathrm{BZ}}{a-b}$.

De l'évolution des courbes.

quelconque B de la courbe la droite BK parallèle à PS. Soit $SK = x$ et $KB = y$. Dans le cas où AB eſt une hyperbole nous ſavons que le rectangle des lignes SK et KB, c.à.d. le rectangle xy, eſt toujours égal au même carré que nous pouvons appeler a^2.

L'hyperboloïde qui la ſuit ſera celle pour laquelle le ſolide exprimé par la multiplication de la ligne SK par la hauteur KB, c. à. d. le ſolide x^2y, eſt égal à un certain cube que nous pouvons déſigner par a^3. Il exiſte encore d'autres hyperboloïdes en nombre infini du même genre; la table ſuivante exprime la propriété de chacune d'elles par ſon équation, et en même temps la méthode de conſtruction de la courbe DC par l'évolution de laquelle elle eſt produite.

$$\text{Si} \begin{pmatrix} xy = a^2 \\ x^2y = a^3 \\ xy^2 = a^3 \\ x^3y = a^4 \\ xy^3 = a^4 \end{pmatrix}, \text{ on aura } \begin{pmatrix} \frac{1}{2}BM + \frac{1}{2}BZ \\ \frac{2}{3}BM + \frac{1}{3}BZ \\ \frac{1}{3}BM + \frac{2}{3}BZ \\ \frac{3}{4}BM + \frac{1}{4}BZ \\ \frac{1}{4}BM + \frac{3}{4}BZ \end{pmatrix} = BD.$$

La droite DBMZ eſt normale, comme auparavant, à la courbe AB et coupe les aſymptotes SK et SP en M et Z. Si par exemple la courbe propoſée eſt l'hyperbole AB dont l'équation eſt $xy = a^2$, il faut prendre $BD = \frac{1}{2}BM + \frac{1}{2}BZ$, comme la table l'indique; le point D ſe trouvera alors ſur la courbe cherchée DC, dont on pourra trouver d'autres points en nombre quelconque de la même manière et dont chaque partie peut être égalée à une ligne droite. Et cette courbe DC eſt la même que celle dont nous avons exprimé plus haut par une équation la relation à l'axe de l'hyperbole. Or, la conſtruction de cette table eſt entièrement la même que celle de la table précédente [1]).

Au reſte, puiſqu'il faut, tant pour la conſtruction de ces courbes que pour celles qui proviennent des paraboloïdes, tirer les lignes DBZ coupant au point donné B les courbes AB ou leurs tangentes à angles droits, nous dirons en général comment on trouve ces tangentes. À cet effet il faut conſidérer dans l'équation qui exprime la nature de chaque courbe — ces équations ſont données dans les deux tables précédentes — quels ſont les expoſants de x et de y et prendre SK : KH = expoſant de x : expoſant de y. Une droite qui joint les points H et B touchera alors la courbe au point B. Dans le cas de la troiſième hyperboloïde par exemple, dont l'équation eſt $xy^2 = a^3$, comme l'expoſant de x eſt 1 et celui de y 2, il faut que SK : KH = 1 : 2 [2]). Ceux qui ſe ſont appliqués à l'art analytique connaiſſent la démonſtration de cette propoſition: ils ont commencé depuis longtemps à conſidérer ces lignes et ont meſuré les lieux plans et ſolides non ſeulement de ces paraboloïdes, mais auſſi de quelques eſpaces s'étendant juſqu'à l'infini compris entre les hyperboloïdes et leurs aſymptotes. C'eſt ce que nous pourrions exécuter nous auſſi d'après une méthode facile et univerſelle, la démonſtration étant dérivée de la ſeule propriété des tangentes [3]). Mais ces choſes ne ſont pas de ce lieu.

---

[1]) L'équation de l'hyperbole de degré supérieur étant $x^b y^a = k$, où k est une droite à la puissance

BK parallela PS, sitque SK ∞ x; KB ∞ y. Si igitur hyperbola sit AB, scimus rectangulum linearum SK, KB, hoc est, rectangulum xy semper eidem quadrato æquale esse, quod vocetur aa. De linearum curvarum evolutione.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua solidum ex quadrato | lineæ SK, in altitudinem KB ductum, hoc est, solidum xxy, cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3. Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides existunt, quarum proprietatem sequens tabella singulis æquationibus exhibet, simulque rationem construendi curvam DC, cujus evolutione quæque generetur. (p. 90).

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} xy \infty a^2 \\ x^2y \infty a^3 \\ xy^2 \infty a^3 \\ x^3y \infty a^4 \\ xy^3 \infty a^4 \end{array}\right. \text{Erit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\text{BM} + \frac{1}{2}\text{BZ} \\ \frac{2}{3}\text{BM} + \frac{1}{3}\text{BZ} \\ \frac{1}{3}\text{BM} + \frac{2}{3}\text{BZ} \\ \frac{3}{4}\text{BM} + \frac{1}{4}\text{BZ} \\ \frac{1}{4}\text{BM} + \frac{3}{4}\text{BZ} \end{array}\right\} \infty \text{ BD.}$$

Recta DBMZ curvam AB, ut antea quoque, secat ad angulos rectos, occurritque asymptotis SK, SP, in M & Z. Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit AB, cujus æquatio est xy ∞ a^2, sumetur BD ∞ $\frac{1}{2}$BM + $\frac{1}{2}$BZ, quemadmodum tabella præcipit. Eritque punctum D in curva DC quæsita, cujus alia quotlibet puncta sic inveniri poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa est curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ superius æquatione expressimus. Constructio autem tabellæ hujus plane eadem est quæ superioris [1]).

Cæterum, quoniam tum ad harum curvarum, tum ad earum quæ ex paraboloidibus nascuntur constructionem, ducendæ sunt lineæ DBZ, quæ ad datum punctum B secent curvas AB, sive ipsarum tangentes BH, ad angulos rectos; dicemus in universum quomodo hæ tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, considerare oportet quæ sint exponentes potestatum x & y, & facere ut, sicut exponens potestatis x ad exponentem potestatis y, ita sit SK ad KH [2]). Juncta enim HB curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio est xy^2 ∞ a^3: quia exponens potestatis x est 1, potestatis autem y exponens 2; oportet esse ut 1 ad 2 ita SK ad KH. Horum autem demonstrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt; & non solum paraboloidum istarum, sed & spatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & asymptotos interjectorum, plana solidaque dimensi sunt. Quod quidem & nos, facili atque universali methodo, expedire possemus, ex sola tangentium proprietate sumpta demonstratione [3]). Sed illa non sunt hujus loci.

$a + b$, on trouve en effet BD = $\dfrac{b.\text{BM} + a.\text{BZ}}{a+b}$.

[2]) Comparez la note 1 de la p. 232 qui précède. D'après la „Regula" citée dans cette note, la soustangente de la courbe $x^b y^a - k = 0$ (KH dans la Fig. 74 du texte) devient $\frac{a}{b}x$ (où x est la droite SK). Donc SK : KH = b : a.

[3]) Voir les p. 197—198 et 288—293 (datant de 1657) du T. XIV.

QUATRIÈME PARTIE

DE L'HORLOGE À PENDULE.

Du centre d'oscillation.

Le très savant Mersenne m'a jadis proposé, comme à beaucoup d'autres, lorsque j'étais encore presqu'enfant, la recherche des centres d'oscillation ou d'agitation [1]). C'était alors un problème célèbre entre les géomètres de ce temps ainsi que je le conclus des lettres qu'il m'écrivait et aussi des écrits de Descartes publiés depuis peu, lesquels contiennent la réponse aux lettres de Mersenne sur ce sujet. Il demandait que je trouvasse ces centres dans les secteurs de cercle, suspendus tant de l'angle que du milieu de l'arc, et oscillant latéralement, ainsi que dans les segments de cercle et dans les triangles, suspendus tantôt du sommet, tantôt du milieu de la base. Ce problème revient à trouver un pendule simple — consistant en un poids attaché à un fil — de longueur telle qu'il exécute ses oscillations dans le même temps qu'une des figures suspendues dont nous avons parlé. Il me promettait en même temps une grande et enviable récompense de mon ouvrage si par hasard j'arrivais à satisfaire à sa demande. Mais il n'obtint alors de personne ce qu'il désirait. Car quant à moi, comme je ne trouvai rien qui m'ouvrît le premier chemin à cette contemplation, repoussé pour ainsi dire à l'entrée même, je m'abstins alors d'une plus longue investigation; et ceux qui espéraient avoir réussi, hommes illustres comme Descartes [2]), Honoré Fabry [3]) et d'autres [4]), n'atteignirent point le but, excepté dans quelques cas des plus faciles où cependant ils n'ont donné, à mon avis, aucune démonstration valable. J'espère que cela deviendra manifeste par comparaison avec ce que nous enseignerons ici, si par hasard quelqu'un compare ce qui a été publié par eux avec notre présente théorie, que j'estime reposer d'une part sur des principes plus certains et que j'ai d'autre part trouvée entièrement conforme aux expériences. L'occasion de reprendre ces recherches nous fut offerte par la manière de mettre au point les pendules de notre automate en leur appliquant, outre le poids inférieur, un autre poids mobile comme cela a été expliqué dans la description de l'horloge. Reprenant ainsi la question sous de meilleurs auspices et depuis le commencement, j'ai enfin triomphé de toutes les difficultés et résolu non seulement les problèmes de Mersenne, mais aussi d'autres plus

---

[1]) Voir les p. 349 et suiv. du T. XVI.

[2]) Voir sur la règle erronée de 1646 de Descartes pour trouver le centre d'agitation la p. 352 du T. XVI.

HOROLOGII OSCILLATORII

(p. 91).

Pars Quarta.

De centro Oscillationis.

Centrorum Oscillationis, seu Agitationis, investigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliisque multis, doctissimus Mersennus proposuit [1]), celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Cartesii haud pridem editis, quibus ad Mersennianas super his rebus responsum continetur. Postulabat autem centra illa ut invenirem in circuli sectoribus, tam ab angulo quam à medio arcu suspensis, atque in latus agitatis, item in circuli segmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media basi pendentibus. Quod eo redit, ut pendulum simplex, hoc est, pondus filo appensum reperiatur ea longitudine, ut oscillationes faciat temporum eorundem ac figuræ istæ, uti dictum est, suspensæ. Simul vero pretium operæ, si forte quæsitis satisfecissem, magnum sane & invidiosum pollicebatur. Sed a nemine id quod desiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam patesceret; velut à limine repulsus, longiori investigatione tunc quidem abstinui. Qui vero rem sese confecisse sperabant viri insignes, Cartesius [2]), Honoratus Fabrius [3]), aliique [4]), nequaquam scopum attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, sed quorum tamen demonstrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifestum fore spero, si quis forte quæ ab illis tradita sunt, cum nostris hisce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonstrata arbitror, & experimentis prorsus convenientia reperi. Occasio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati nostri temperandorum ratione oblata est, dum pondus mobile, præter id quod in imo est, illis applico, ut in descriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auspiciis atque à prima origine rem exorsus, tandem difficultates omnes superavi, nec tantum problematum Mersennianorum solutionem, sed alia quoque

---

[3]) Voir les p. 52 et suiv. de l'Avertissement qui précède.

[4]) Voir sur de Roberval les p. 352 et 490 du T. XVI, sur lord Brouncker la p. 375 du T. XVI et la p. 306 (note 1) qui suit.

C. de Waard écrit (p. XLVIII de sa „Note sur la Vie de Mersenne"): „c'est avec Mersenne que Roberval et Cavendish s'appliquent peu après [1642] à la recherche du centre de percussion des différents corps".

Du centre d'oscillation.

difficiles que ceux-là; j'ai même enfin trouvé une méthode générale pour chercher la place de ce centre dans les lignes, les surfaces et les corps solides[1]). D'où j'ai retiré — outre le plaisir de trouver ce qui avait été longuement recherché par autrui et d'apprendre à connaître dans ces matières les lois et décrets de la nature — l'avantage de savoir désormais mettre au point l'horloge d'après une méthode facile et sûre. Un deuxième résultat qui me semble plus important c'est que je puis, en me basant sur cette théorie, donner une définition très exacte d'une longueur déterminée et restant invariable dans le cours des siècles; on la trouvera à la fin de cette partie.

DÉFINITIONS.

I.

Appelons pendule une figure quelconque douée de pesanteur, que ce soit une ligne, une surface ou un corps solide, suspendue de telle manière qu'elle peut par la force de sa gravité continuer son mouvement réciproque autour d'un point ou plutôt autour d'un axe supposé parallèle à l'horizon.

II.

Donnons à cet axe horizontal autour duquel se fait par hypothèse le mouvement du pendule, le nom d'axe d'oscillation.

III.

Appelons pendule simple celui qui est censé consister en un fil, ou ligne inflexible, dépourvu de pesanteur, et portant en bas un poids qui y est attaché; poids dont la gravité doit être considérée comme recueillie pour ainsi dire en un seul point.

IV.

Appelons pendule composé celui qui consiste en plusieurs poids gardant des distances invariables tant entre elles que de l'axe d'oscillation. Toute figure suspendue pesante de forme quelconque peut donc être appelée un pendule composé, puisqu'elle est divisible par la pensée en un nombre quelconque de parties.

V.

Appelons pendules isochrones ceux dont les oscillations, par des arcs semblables, sont exécutés dans des temps égaux.

VI.

Appelons plan d'oscillation le plan perpendiculaire à l'axe d'oscillation qui est censé passer par le centre de gravité de la figure suspendue.

illis difficiliora reperi, & | viam denique, qua in lineis, ſuperficiebus, ſolidiſque corpo- (p. 92).
ribus certa ratione centrum illud inveſtigare liceret [1]). Unde quidem, præter voluptatem De centro oscillationis
inveniendi quæ multum ab aliis quæſita fuerant, cognoſcendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Acceſſit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, ſæculiſque omnibus duraturæ, menſuræ definitionem abſolutiſſimam per hæc tradere poſſem; qualis eſt ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum dicatur figura quælibet gravitate prædita, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum, ita ſuſpenſa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis ſuæ continuare poſſit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oſcillationis.

III.

Pendulum ſimplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, conſtare intelligitur, ima ſui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, cenſenda eſt.

IV.

Pendulum verò compoſitum, quod pluribus ponderibus conſtat, immutabiles diſtantias ſervantibus, tum inter ſe, tum ab axe Oſcillationis. Hinc figura quælibet ſuſpenſa, ac gravitate prædita, pendulum compoſitum dici poteſt, quatenus cogitatu in partes quotlibet eſt diviſibilis.

V.

Pendula iſochrona vocentur, quorum Oſcillationes, per arcus ſimiles, æqualibus temporibus peraguntur.

VI. (p. 93).

Planum Oſcillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ ſuſpenſæ duci intelligitur, ad axem oſcillationis rectum.

---

[1]) Voir sur les méthodes successivement employées par Huygens les p. 361—373 du T. XVI.

Du centre d'oscillation.

VII.

Appelons ligne du centre une droite perpendiculaire à l'axe d'oscillation et passant par le centre de gravité de la figure.

VIII.

Appelons ligne verticale une droite tirée de l'axe d'oscillation, dans le plan d'oscillation, perpendiculairement au plan de l'horizon.

IX.

Appelons centre d'oscillation ou d'agitation d'une figure quelconque un point situé sur la ligne du centre et distant de l'axe d'oscillation d'une longueur égale à celle du pendule simple isochrone avec la figure.

X.

Appelons axe de gravité une droite quelconque passant par le centre de gravité de la figure.

XI.

Qu'une figure plane ou une ligne située dans un plan soit dite osciller „in planum" (exécuter une oscillation plane) lorsque l'axe d'oscillation est situé dans le même plan que la figure ou la ligne.

XII.

Que la figure ou la ligne plane soit dite osciller „in latus" (exécuter une oscillation latérale) lorsque l'axe d'oscillation est perpendiculaire à son plan.

XIII.

Lorsque nous dirons que des poids sont multipliés par des lignes droites, ceci doit être entendu comme suit: ce sont les nombres ou les lignes qui expriment les quantités des poids et leurs rapports mutuels qui sont ainsi multipliés [1]).

HYPOTHÈSES.

I.

Nous supposons que lorsqu'un nombre quelconque de poids commencent à se mouvoir par leur propre gravité, le centre commun de gravité ne peut s'élever à une hauteur supérieure à celle où il se trouvait au début du mouvement [2]).

---

[1]) Comparez la p. 342 du T. XVI.

De centro oscillationis

VII.

Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oscillationis perpendicularis.

VIII.

Linea perpendiculi, recta in plano oscillationis, ducta ab axe oscillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

IX.

Centrum oscillationis vel agitationis figuræ cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oscillationis distans, quanta est longitudo penduli simplicis quod figuræ isochronum sit.

X.

Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ transiens.

XI.

Figura plana, vel linea in plano sita, in planum agitari dicatur, cum axis oscillationis in eodem cum figura lineave est plano.

XII.

Eædem vero in latus agitari dicantur, cum axis oscillationis ad figuræ lineæve planum rectus est.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita est intelligendum, ac si numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter se mutuam exprimentes, ita ducantur [1]).

HYPOTHESES.

I.

Si pondera quotlibet, vi gravitatis suæ, moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis compositæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere [2]).

---

[2]) Comparez sur les Hyp. I et II la p. 357 du T. XVI et les p. 38—39 de l'Avertissement qui précède.

Du centre d'oscillation.

Il faut dans ces chofes confidérer la hauteur fuivant la diftance d'un plan horizontal et admettre que les corps pefants tâchent de defcendre fur ce plan en fuivant des droites verticales, c.à.d. perpendiculaires à lui. Ce qui eft ou expreffément fuppofé par tous ceux qui ont traité du centre de gravité ou bien doit être fuppléé par les lecteurs, puifque fans cela la confidération d'un centre de pefanteur n'a pas de fens.

Or, pour que notre hypothèfe ne faffe fcrupule à perfonne, nous montrerons qu'elle ne fignifie que ce que nul n'a jamais nié, favoir que les corps graves ne montent pas d'eux-mêmes. Car premièrement, fi nous nous propofons un feul corps grave, il eft hors de doute que celui-ci ne peut s'élever par la feule force de fa gravité: nous entendons qu'il s'élève lorfque fon centre de gravité monte. Mais la même chofe doit néceffairement être admife pour un nombre quelconque de poids attachés l'un à l'autre par des lignes inflexibles, puifque rien n'empêche de les confidérer comme un feul poids. Par conféquent le centre commun de gravité de ceux-ci auffi ne pourra monter de lui-même.

Que fi nous confidérons un nombre quelconque de poids non attachés les uns aux autres, nous favons que ceux-là auffi poffèdent un centre commun de gravité. Je dis que c'eft la hauteur de ce centre qui doit être confidérée comme celle de la gravité compofée, puifque tous les poids peuvent être amenés à fe trouver à cette hauteur-là fans qu'il faille appeler à l'aide aucune autre puiffance que celle qui fe trouve dans les poids eux-mêmes: il fuffit de les joindre arbitrairement par des lignes inflexibles et de les mouvoir autour du centre de gravité, ce à quoi il n'eft befoin d'aucune force ou puiffance déterminée. C'eft pourquoi, de même qu'il ne peut pas arriver que des poids placés dans le même plan horizontal s'élèvent tous également, par la force de la gravité, au-deffus de ce plan, de même auffi le centre de gravité d'un nombre quelconque de poids, difpofés de quelque façon que ce foit, ne peut atteindre une plus grande hauteur que celle qu'il a. Or, c'eft de la manière fuivante qu'on peut démontrer que des poids quelconques peuvent être amenés fans l'application d'aucune force dans le plan horizontal paffant par leur centre commun de gravité.

Soient [Fig. 76] les poids A, B et C, de pofition donnée; et foit D leur centre commun de gravité. Suppofons mené par lui le plan horizontal dont EF foit une fection droite. Que DA, DB, DC foient des lignes inflexibles joignant les poids entre eux d'une manière invariable. Mettons maintenant les poids en mouvement jufqu'à ce que A fe trouve en E dans le plan EF. Toutes les verges ayant tourné du même angle, B fera maintenant en G et C en H.

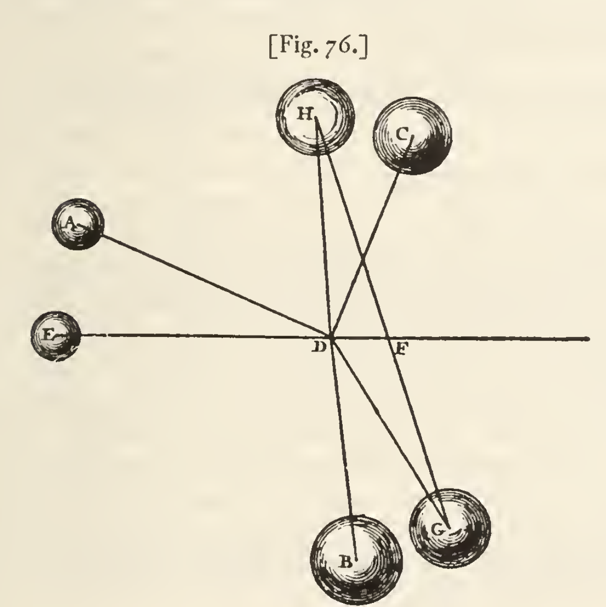
Suppofons enfuite B en C joints par la verge HG coupant le plan EF en F, où fe

Altitudo autem in his ſecundum diſtantiam à plano horizontali conſideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, ſecundum rectas ipſi perpendiculares, deſcendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expreſſe, vel à legentibus ſupplendum eſt, cum abſque eo centri gravitatis conſideratio locum non habeat. (p. 94). De centro oscillationis

Ipſa vero hypotheſis noſtra quominus ſcrupulum moveat, nihil aliud ſibi velle eam oſtendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe ſurſum non ferri. Nam primo, ſi unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis ſuæ altius aſcendere non poſſe extra dubium eſt. aſcendere autem tunc intelligitur ſcilicet, cum ejus centrum gravitatis aſcendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter ſe per lineas inflexiles conjunctis, concedi neceſſe eſt, quoniam nihil vetat ipſa tanquam unum aliquod conſiderari. Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro aſcendere poterit.

Quod ſi jam pondera quotlibet non inter ſe connexa ponantnr, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis eſſe ſcimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compoſitæ altitudinem cenſeri debere; ſiquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci poſſunt, nullâ aliâ accerſitâ potentiâ quam quæ ipſis ponderibus ineſt, ſed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus eſt. Quare, ſicut fieri non poteſt ut pondera quædam, in plano eodem horizontali poſita, ſupra illud planum, vi gravitatis ſuæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque diſpoſitorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum tranſiens, perduci poſſe, ſic oſtendetur.

[Fig. 76.]



Sint pondera A, B, C [Fig. 76], poſitione data, quorum commune gravitatis centrum ſit D. per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus ſectio recta EF. Sint jam lineæ inflexiles DA, DB, DC, quæ pondera ſibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A ſit in plano EF ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Rurſus jam B & C connecti intelligantur virgâ HG, quæ ſecet planum

trouvera auſſi néceſſairement le centre de gravité de l'enſemble de ces deux poids, puiſque D eſt celui des trois corps placés en E, G et H et que celui du corps E ſe trouve auſſi dans le plan EDF. Les poids H et G ſont maintenant de nouveau mis en mouvement autour du point F comme autour d'un axe et amenés ſans aucune force à ſe trouver ſimultanément dans le plan EF, de ſorte qu'il apparaît que les trois poids, qui étaient d'abord en A, B et C ont été tranſportés préciſément à la hauteur de leur centre de gravité D par leur propre équilibre. C.Q.F.D. La démonſtration eſt la même pour un nombre quelconque d'autres poids.

Or, l'hypothèſe que nous avons faite s'applique auſſi aux corps liquides. Par elle non ſeulement tout ce qu'Archimède a des corps flottants peut être démontré, mais auſſi beaucoup d'autres théorèmes de mécanique. Et véritablement, ſi les inventeurs de nouvelles machines qui s'efforcent vainement d'obtenir le mouvement perpétuel, ſavaient faire uſage de cette hypothèſe, ils decouvriraient aiſément eux-mêmes leurs erreurs et comprendraient que ce mouvement ne peut aucunement être obtenu par des moyens mécaniques [1]).

II.

Nous ſuppoſons que, la réſiſtance de l'air et tout autre empêchement manifeſte étant abſents, comme nous voulons que cela ſoit entendu dans les démonſtrations qui ſuivent, le centre de gravité du pendule oſcillant parcoure des arcs égaux en descendant et en montant [2]).

Ceci a été démontré pour le pendule ſimple dans la Prop. IX de la Chute des Corps peſants. Mais l'expérience fait voir que la même choſe eſt vraie pour le pendule compoſé, de ſorte que, quelle que ſoit la forme du pendule, il eſt trouvé également capable de reſter en mouvement ſinon en tant qu'il eſt plus ou moins empêché par la rencontre de l'air.

PROPOSITION I.

Lorſqu'un nombre quelconque de poids ſe trouvent du même côté d'un plan et qu'on mène à partir du centre de gravité de chacun d'eux une perpendiculaire à lui, la ſomme des produits de chaque perpendiculaire par le poids correſpondant ſera égale à celui de la perpendiculaire menée du centre de gravité de tous les poids au plan conſidéré, par la ſomme de ceux-ci.

Conſidérons [Fig. 77] les poids A, B, C ſitués du même côté d'un plan dont DF eſt une ſection droite et menons à ce plan à partir des différents poids les perpendiculaires AD, BE et CF. Que le point G ſoit le centre de gravité de tous les poids A, B, C; tirons à partir de lui la normale GH au même plan. Je dis que la ſomme des produits obtenus en multipliant chaque poids par ſa perpendiculaire eſt égale au produit de la droite GH par la ſomme des poids A, B, C.

EF in F; ubi neceſſario quoque erit centrum gravitatis bino|rum iſtorum ponderum (*p.* 95).
connexorum, cum trium, in E, G, H, poſitorum, centrum gravitatis ſit D, & ejus De centro oscillationis
quod eſt in E, centrum gravitatis ſit quoque in plano EDF. Moventur igitur rurſus pondera H, G, ſuper puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac ſimul utraque ad planum EF adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipſam ſui centri gravitatis D altitudinem, ſuo ipſorum æquilibrio, tranſlata appareat. quod erat oſtendendum. Eademque de quotcunque aliis eſt demonſtratio.

Hæc autem hypotheſis noſtra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non ſolum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonſtrari poſſunt, ſed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et ſanè, ſi hac eadem uti ſcirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile ſuos ipſi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haudquaquam poſſibilem eſſe [1]).

II.

Remoto aëris, alioque omni impedimento manifeſto, quemadmodum in ſequentibus demonſtrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis penduli agitati, æquales arcus deſcendendo ac aſcendendo percurrere [2]).

De pendulo ſimplici hoc demonſtratum eſt propoſitione 9 de Deſcenſu gravium. Idem vero & de compoſito tenendum eſſe declarat experientia; ſiquidem, quæcunque fuerit penduli figura, | æque apta continuando motui reperitur, niſi in quantum plus (*p.* 96).
minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani exiſtentibus, ſi à ſingulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ ſingulæ in ſua pondera ductæ, tantundem ſimul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.

Sint pondera A, B, C [Fig. 77], ſita ad eandem partem plani, cujus ſectio recta DF, inque ipſum à ſingulis ponderibus ducantur perpendiculares AD, BE, CF. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum GH. Dico ſummam productorum, quæ fiunt à ſingulis ponderibus in ſuas perpendiculares, æquari producto ab recta GH in omnia pondera A, B, C.

---

[1]) Comparez la p. 243 (et notamment la note 7 de cette page) du T. XVII. Voir aussi plus loin dans le présent Tome la partie intitulée „La Conservation des Forces”.

[2]) Voir la note 2 de la p. 247 qui précède.

Du centre d'oscillation.

En effet, ſuppoſons toutes les perpendiculaires provenant des différents points prolongées de l'autre côté du plan DF et ſoient DK, EL et FM chacune égale à HG; que chacune de ces lignes repréſente une verge inflexible parallèle à l'horizon, et ſuppoſons placés en K, L, M des corps graves tels que chacun d'eux faſſe équilibre, par rapport à l'interſection avec le plan DEF, avec le corps grave oppoſé A, B ou C. L'enſemble des corps K, L, M ſera donc en équilibre avec celui des corps A, B, C. Mais on aura: AD : DK = poids K: poids A, et par conſéquent DA multipliée par la grandeur A ſera égale à DK ou GH multipliée par K. Pareillement EB multipliée par B ſera égale à EL ou GH multipliée par L; et FC multipliée par C ſera égale à FM ou GH multipliée par M. Par conſéquent la ſomme des produits AD × A, BE × B, CF × F ſera égale à celle de GH par chacun des poids K, L, M. Mais comme K, L, M ſont en équilibre avec A, B, C ſéparément, ils ſeront auſſi en équilibre avec les mêmes poids A, B, C ſuſpendus en leur centre de gravité. Il s'enſuit, puiſque la diſtance GH eſt égale à chacune des diſtances DK, EL, FH, que la ſomme des grandeurs A, B, C eſt néceſſairement égale à celle de K, L, M. Par conſéquent la ſomme des produits de GH par chacun des poids A, B, C ſera auſſi égale aux produits DA × A + EB × B + FC × C. C.Q.F.D.

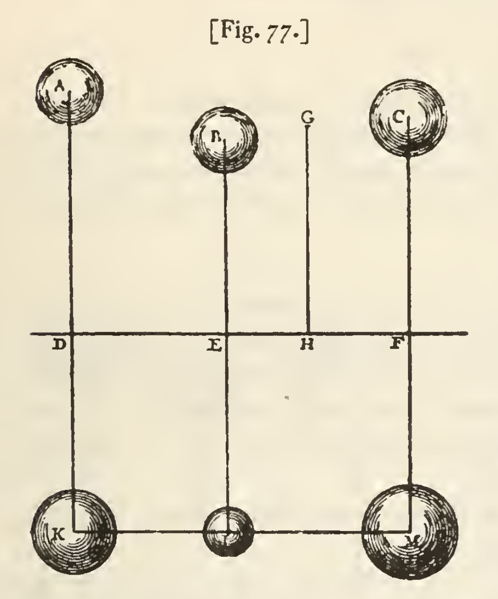
Et quoique dans la démonſtration les droites AK, BL, CM aient été conſidérées comme horizontales et le plan comme vertical, il eſt clair que ſi tous les éléments ſont placés dans une autre poſition quelconque l'égalité des produits ſubſiſte, toutes les droites étant les mêmes qu'auparavant. La propoſition eſt donc établie.

PROPOSITION II.

Les mêmes choſes qu'auparavant étant poſées et tous les poids A, B, C [*Fig.* 77] *étant égaux, je dis que la ſomme de toutes les perpendiculaires* AD, BE, CF *eſt égale à la perpendiculaire* GH, *émanant du centre de gravité, multipliée par le nombre des poids.*

En effet, comme la ſomme des produits de chaque poids par la perpendiculaire correſpondante eſt égale au produit de GH par l'enſemble des poids, et qu'ici, à cauſe de l'égalité des poids, cette ſomme de produits eſt égale au produit d'un ſeul poids par la ſomme de toutes les perpendiculaires, et que de plus le produit de GH par l'enſemble des poids eſt égal à celui d'un ſeul poids par la droite GH priſe autant de fois qu'il y a de poids, il apparaît que la ſomme des perpendiculaires eſt néceſſairement égale à GH multipliée par le nombre des poids. C.Q.F.D.

[Fig. 77.]



Intelligantur enim perpendiculares, à ſingulis ponderibus eductæ, continuari in alteram partem plani DF, ſintque ſingulæ DK, EL, FM, ipſi HG æquales; omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ ſingulæ cum ſibi oppoſitis A, B, C, æquilibrium faciant ad interſectionem plani DEF. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, ſicut longitudo AD ad DK, ita pondus K ad pondus A, ac proinde DA ducta in magnitudinem A, æquabitur DK, ſive GH, ductæ in K. Simili|ter EB in B æquabitur EL, ſive GH, in L; & FC in C æquabitur FM, ſive GH, in M. Ergo ſumma productorum ex AD in A, BE in B, CF in F, æquabitur ſummæ productorum ex GH in omnes K, L, M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipſis A, B, C, etiam iisdem A, B, C, ex centro ipſorum gravitatis G ſuſpenſis, æquiponderabunt. Unde, cum diſtantia GH æqualis ſit ſingulis DK, EL, FM, neceſſe eſt magnitudines A, B, C, ſimul ſumptas, æquari ipſis K, L, M. Itaque & ſumma productorum ex GH in omnes A, B, C, æquabitur productis ex DA in A, EB in B, & FC in C. quod erat demonſtrandum.

De centro oscillationis

(p. 97).

Etſi vero in demonſtratione poſitæ fuerint rectæ AK, BL, CM, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; patet, ſi omnia ſimul in alium quemlibet ſitum transponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes ſint eædem quæ prius. Quare conſtat propoſitum.

PROPOSITIO II.

Poſitis quæ prius, ſi pondera omnia A, B, C [Fig. 77], *ſint æqualia; dico ſummam omnium perpendicularium* AD, BE, CF, *æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ*, GH, *multiplici ſecundum ponderum numerum.*

Quum enim ſumma productorum, à ponderibus ſingulis in ſuas perpendiculares, æquetur producto ex GH in pondera omnia; ſitque hìc, propter ponderum æqualitatem, ſumma illa productorum æqualis producto ex uno pondere in ſummam omnium perpendicularium; itemque productum ex GH in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in GH, multiplicem ſecundum ponderum numerum: patet ſummam perpendicularium neceſſario jam æquari ipſi GH, multiplici ſecundum ponderum numerum. quod erat demonſtrandum.

Du centre d'oscillation.

PROPOSITION III.

Si un certain nombre de grandeurs defcendent toutes, ou montent toutes, quoique fuivant des diftances verticales différentes, leurs changements de niveau multipliés chacun par la grandeur correfpondante, donneront une fomme de produits égale au changement de niveau du centre commun de gravité de ces grandeurs multiplié par leur fomme.

Soient données [Fig. 78] les grandeurs A, B, C qui defcendent de A, B, C en D, E, F, ou montent de D, E, F en A, B, C. Et que leur centre commun de gravité, au moment où elles font en A, B, C, foit à la même hauteur que le point G; mais que ce centre foit à la hauteur du point H lorqu'elles font en D, E, F. Je dis que la fomme des produits de la hauteur AD par A, BE par B, CF par C, eft égale au produit de GH par l'enfemble de A, B, C.

En effet, confidérons un plan horizontal à fection droite MP. Puiffent AD, BE, CF et GH prolongées le couper en M, N, O, P.

* Prop. I. de cette Partie. Puifqu'alors $AM \times A + BN \times B + CO \times C = GP\ (A + B + C)$*), et que de même $DM \times A + EN \times B + FO \times C = HP\ (A + B + C)$, il s'enfuit que la différence des premiers produits d'avec les deuxièmes eft égale à $GH\ (A + B + C)$. Or, il eft manifefte que la dite différence eft égale à $AD \times A + BE \times B + CF \times C$. Cette dernière fomme fera donc auffi égale à $GH\ (A + B + C)$. C.Q.F.D.

PROPOSITION IV.

Si un pendule compofé de plufieurs poids et commençant fon mouvement confidéré à partir du repos, a exécuté une partie quelconque de fon ofcillation entière et qu'on fe figure qu'à partir de ce moment, le lien commun étant rompu, chacun de fes poids tourne fa viteffe acquife vers le haut et s'élève à la plus grande hauteur poffible, par ce fait le centre commun de gravité remontera à la hauteur qu'il avait avant le commencement de l'ofcillation.

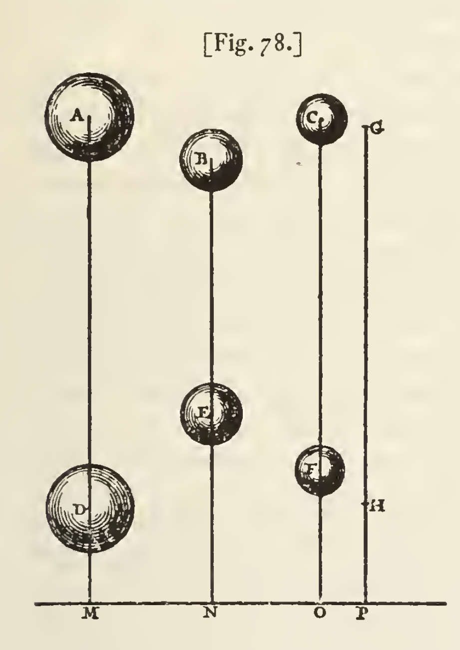
Que le pendule [Fig. 79] foit compofé de poids en nombre quelconque A, B, C, attachés à une verge ou furface impondérable, et qu'il foit fufpendu à un axe paffant par le point D perpendiculairement au plan qui eft vu ici. Que le centre de gravité des poids A, B, C, foit auffi fitué dans ce même plan, et que la ligne du centre DE faffe un angle EDF avec la ligne perpendiculaire DF, bien entendu lorfque le pen-

PROPOSITIO III.

De centro oscillationis

Si magnitudines quædam descendant omnes, vel ascendant, licet inæqualibus intervallis; altitudines descensus vel ascensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductæ, efficient summam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines.

[Fig. 78.]



Sunto magnitudines A, B, C [Fig. 78], quæ ex A, B, C, descendant in D, E, F; vel ex D, E, F, ascendant in A, B, C. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero sunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico summam productorum ex altitudine AD in A, BE in B, CF in C, æquari producto ex GH in omnes A, B, C. (*p.* 98).

Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta MP, atque in ipsum incidant productæ AD, BE, CF & GH, in M, N, O, P.

Quia igitur summa productorum ex AM in A, BN in B, CO in C, æqualis est facto ex GP in omnes A, B, C*. Similiterque summa productorum ex DM in A, EN in B, FO in C, æqualis facto ex HP in omnes A, B, C; sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex GH in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero excessum æquari manifestum est productis ex AD in A, BE in B, CF in C. Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex GH in omnes A, B, C. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

PROPOSITIO IV.

Si pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

Sit pendulum [Fig. 79] compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel (*p.* 99). superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, positum sit; lineaque centri DE, inclinetur ad lineam perpendiculi DF, angulo EDF: attracto, nimirum,

Du centre d'oscillation.

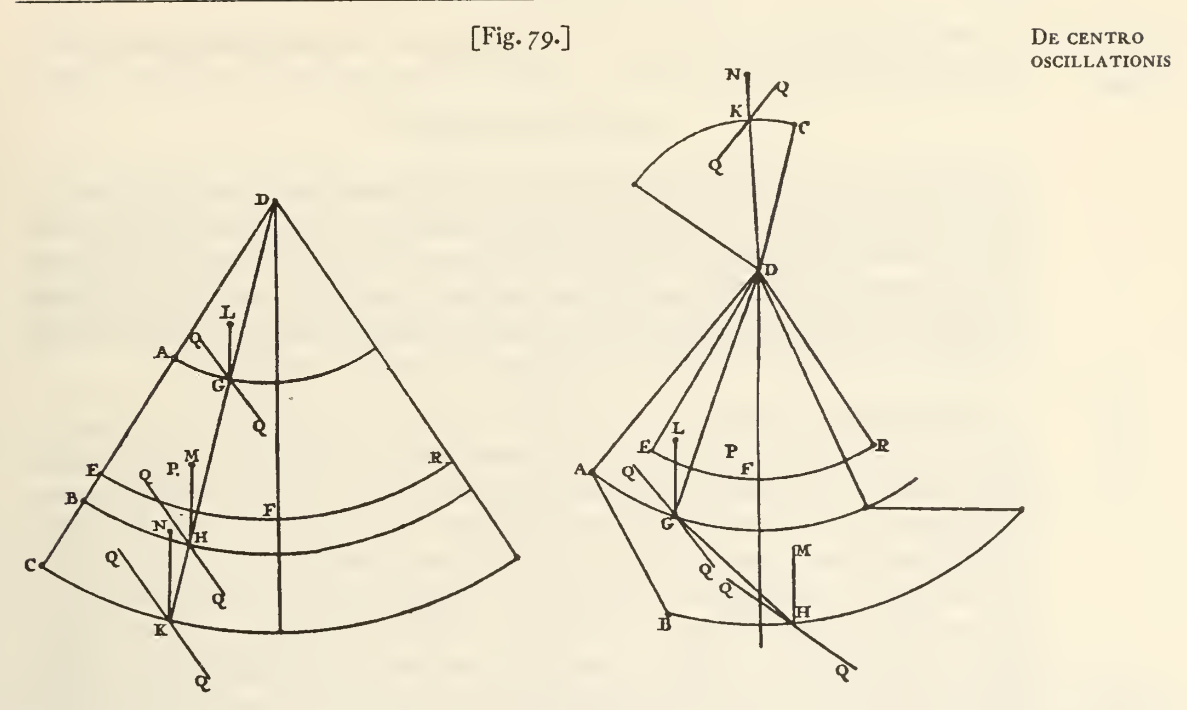
dule a été écarté de sa position d'équilibre jusque là. Supposons maintenant qu'on lui permette de suivre son mouvement à partir de cette position et qu'il exécute une partie quelconque de son oscillation, de sorte que les poids A, B, C arrivent en G, H, K. Qu'on se figure que chacun des poids, le lien commun étant rompu, tourne alors sa vitesse vers le haut (ce qui peut arriver par la rencontre de certains plans inclinés) et s'élève à la plus grande hauteur possible, jusqu'en L, M ou N. Soit le point P le centre de gravité de tous les poids lorsqu'ils auront atteint ces positions. Je dis que ce point est à la même hauteur que le point E.

Car il est d'abord certain que P n'est pas plus haut que E, d'après la première de nos hypothèses. Mais nous montrerons comme suit qu'il n'est pas non plus situé à une moindre hauteur. En effet, soit d'abord, si cela est possible, P situé plus bas que E et supposons que les poids redescendent en tombant des mêmes hauteurs auxquelles ils sont parvenus en montant, savoir LG, MH, NK. D'où il est clair qu'ils atteindront les mêmes vitesses qu'ils avaient en commençant leur ascension *), c.à.d. celles qu'ils avaient acquises par le mouvement du pendule de CBAD en KHGD. Par conséquent, si on les rapporte maintenant avec les dites vitesses à la verge ou surface qui les soutenait, qu'ils s'y attachent simultanément et continuent le mouvement suivant les arcs commencés — ce qui arrivera si, avant d'atteindre la verge, ils rebondissent, comme on peut se le figurer, des plans inclinés QQ —, le pendule ainsi restitué absoudra la partie restante de son oscillation de la même manière que s'il eût continué son mouvement sans aucune interruption. De sorte que le centre de gravité E du pendule parcourt en descendant et en montant des arcs égaux EF, FR et se trouve donc en R à la même hauteur qu'en E. Mais nous avons posé que E serait plus élevé que F, centre de gravité des poids situés en L, M, N. Par conséquent R sera aussi plus élevé que P: le centre de gravité des poids qui sont tombés de L, M, N se serait donc élevé à une hauteur supérieure à celle dont il était descendu, ce qui est absurde *). Le centre de gravité P n'est donc pas situé plus bas que

* Prop. 4 de la 2ième Partie.

* Hypoth. 1 de cette Partie.

[Fig. 79.]



eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Unde, relicto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, fieri poterit,) & quousque possunt ascendere, nempe in L, M, N. Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E.

Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E, ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilius fore sic ostendemus. Sit enim, si potest, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex iisdem, ad qua ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt LG, MH, NK. Unde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines *, hoc est, eas ipsas quas acquisierant * Propos. 4. part. 2.
motu penduli ex CBAD in KHGD. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent; quod fiet, si priusquam virgam attingant, à planis inclinatis QQ repercussa intelli|gantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æquè ac si absque ulla interruptione motum continuasset. (p. 100). Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales EF, FR, descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, positorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum *. * Hypoth. 1. huj.

Du centre d'oscillation.

E. Mais il n'était pas non plus ſitué à une plus grande hauteur. Il faut donc qu'il ſoit ſitué à la même hauteur. C.Q.F.D.

PROPOSITION V.

Etant donné un pendule compoſé d'un nombre quelconque de poids, ſi chacun des poids eſt multiplié par le carré de ſa diſtance à l'axe d'oſcillation et que la ſomme des produits eſt diviſée par le produit de la ſomme des poids par la diſtance du centre commun de gravité de tous les poids au même axe d'oſcillation, il en réſultera la longueur du pendule ſimple iſochrone avec le pendule compoſé, en d'autres termes la diſtance entre l'axe et le centre d'oſcillation du pendule compoſé[1]).

Soient [Fig. 80] les poids A, B, C qui compoſent le pendule (et dont on ne conſidère ni la figure ni la grandeur mais ſeulement la gravité) ſuſpendus à l'axe paſſant par le point D et ſuppoſé perpendiculaire au plan qui eſt vu ici. Que leur centre commun de gravité E ſe trouve auſſi dans ce plan; car peu importe que les poids ſoient en des plans divers. Appelons d la diſtance du point E de l'axe, ſavoir la droite ED. Soit de même e la diſtance AD du poids A, f celle de BD et g celle de CD. Or, on trouve, en multipliant chaque point par le carré de ſa diſtance, la ſomme des produits $ae^2 + bf^2 + cg^2$. D'autre part, lorſqu'on multiplie la ſomme des poids par la diſtance du centre de gravité commun, le produit ſera $ad + bd + cd$ *). D'où réſulte, en diviſant le premier produit par le deuxième,

* Prop. I. de cette Partie.

$$\frac{ae^2 + bf^2 + cg^2}{ad + bd + cd}.$$

Si l'on égale à cette longueur celle du pendule ſimple FG, qui ſera déſignée par x, je dis qu'il ſera iſochrone avec le pendule compoſé donné.

Suppoſons en effet le pendule FG et la ligne du centre DE écartés du même angle de la ligne perpendiculaire, le premier de FH et le deuxième de DK, et qu'étant

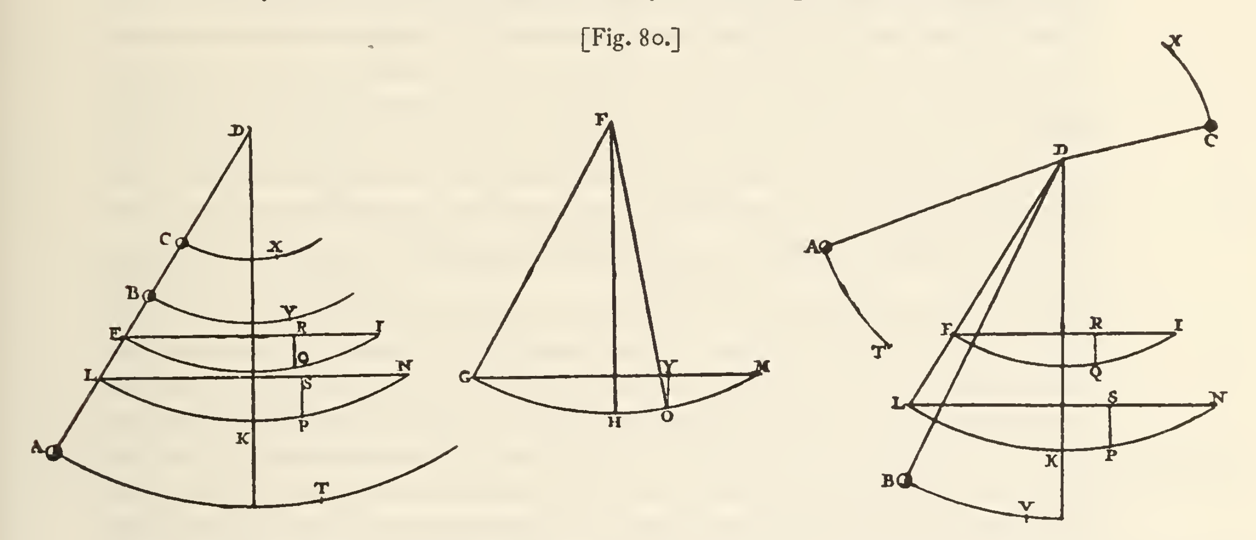
[1]) Comparez sur la formule fondamentale des Prop. V et VI la p. 33 de l'Avertissement qui précède, et le quatrième alinéa de la p. 471 du T. XVI.

Non igitur centrum gravitatis P humilius eſt quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum ſit neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum. DE CENTRO OSCILLATIONIS

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet compoſito, ſi ſingula ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe oſcillationis, & ſumma productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum ſummam, in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis; orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius penduli compoſiti [1]).

[Fig. 80.]



Sint [Fig. 80] pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, ſed gravitas tantum conſideretur), A, B, C, ſuſpenſa ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conſpicitur, rectus intelligitur. In quo plano ſit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diverſis eſſe nihil refert. Diſtantia puncti E ab axe, nempe recta ED, vocetur d. Item ponderis A diſtantia AD, ſit e; BD, f; CD, g. Ducendo itaque ſingula pondera in qua|drata ſuarum diſtantiarum, (*p.* 101). erit productorum ſumma $aee + bff + cgg$. Et rurſus, ducendo ſummam ponderum in diſtantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Unde, * Prop. 1. huj. productum prius per hoc dividendo, habebitur

$$\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}.$$

Cui longitudini ſi æqualis ſtatuatur longitudo penduli ſimplicis FG, quæ etiam x vocabitur; dico hoc illi compoſito iſochronum eſſe.

Ponantur enim tum pendulum FG, tum linea centri DE, æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab FH, hæc ab DK, atque inde dimiſſa librari, & in recta

Du centre d'oscillation.

abandonnés à eux-mêmes ils commencent leur oſcillation à partir de là, et que ſur la ligne DE DL ſoit priſe égale à FG. Par conſéquent le poids G du pendule FG parcourra en une oſcillation entière l'arc GM que la ligne perpendiculaire FH coupera en deux parties égales; et le point L parcourra l'arc LN, ſemblable et égal à l'autre, que DK diviſera par le milieu. De même le centre de gravité E parcourra l'arc ſemblable EI. Que ſi nous démontrons, après avoir pris ſur les arcs GM, NL des points quelconques qui les diviſent de la même manière, tels que O et P, que la viteſſe du poids G en O eſt la même que celle du point L en P, il en réſultera que les deux arcs ſont parcourus en des temps égaux et que par conſéquent le pendule FG eſt iſochrone avec le pendule composé de A, B, C. Or, cela ſera démontré comme ſuit.

Soit d'abord, ſi cela eſt poſſible, la viteſſe du point L, lorſqu'il eſt parvenu juſqu'en P, plus grande que celle du poids G en O. Or, il eſt conſtant que quand le point L parcourt l'arc LP, le centre de gravité E parcourt en même temps l'arc ſemblable EQ. Soient tirées vers le haut à partir des points Q, P, O des perpendiculaires qui rencontrent les cordes des arcs EI, LN, GM en R, S, Y. Déſignons SP par y. Partant, vu que LD ou x eſt à ED ou d comme SP ou y eſt à RQ, RQ ſera égale à $\frac{dy}{x}$. Or, puiſque le poids G a en O la viteſſe néceſſaire pour remonter à la hauteur d'où il eſt deſcendu, ſavoir par l'arc OM ou par la perpendiculaire OY égale à PS, le point L aura, en parvenant à P, une plus grande viteſſe qu'il ne lui faut pour monter de PS. Mais tandis que L ſe déplace juſqu'en P, le poids A, B, C parcourront en même temps des arcs ſemblables à LP, ſavoir AT, BV, CX. Et la viteſſe du point L en P eſt à celle du poids A en T, lorſqu'ils ſont retenus par le même lien, comme la diſtance DL eſt à DA. Mais comme le carré de la viteſſe du point L en P eſt au carré de la viteſſe du point A en T, ainſi eſt la hauteur à laquelle il eſt poſſible de monter avec cette viteſſe-là à celle où il eſt poſſible de monter avec cette viteſſe-ci*). Par conſéquent auſſi, comme le carré de la diſtance DL, c.à.d. x^2, eſt au carré de la diſtance DA, ſavoir e^2, ainſi eſt la hauteur où il eſt poſſible de monter avec la viteſſe du point L parvenu en P (hauteur dont nous avons dit qu'elle eſt ſupérieure à PS ou y) à la hauteur qui peut être atteinte avec la viteſſe que le poids A poſſède en T, bien entendu ſi ce poids, après être parvenu juſqu'en T, pouvait quitter le pendule et diriger ſéparément ſon mouvement vers le haut. Cette hauteur ſera donc ſupérieure à $\frac{e^2y}{x^2}$.

* Prop. 3 & 4 de la 2ième Partie.

Pour la même raiſon la hauteur à laquelle s'élèverait le poids B avec la viteſſe acquiſe par le trajet de l'arc BV ſerait plus grande que $\frac{f^2y}{x^2}$. Et la hauteur à laquelle s'élèverait le poids C avec la viteſſe acquiſe en parcourant l'arc CX ſerait plus grande que $\frac{g^2y}{x^2}$. Par conſéquent, chacune de ces hauteurs étant multipliée par le poids cor-

DE ſumatur DL æqualis FG. Itaque pondus G penduli FG, integra oſcillatione arcum GM percurret, quem linea perpendiculi FH medium ſecabit. punctum vero L arcum illi ſimilem & æqualem LN, quem medium dividet DK. Itemque centrum gravitatis E, percurret ſimilem arcum EI. Quod ſi in arcubus GM, NL, ſumptis punctis quibuſlibet, ſimiliter ipſos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas eſſe oſtendatur ponderis G in O, & puncti L in P; conſtabit inde æqualibus temporibus utrosque arcus percurri, ac proinde pendulum FG, pendulo compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe. Oſtendetur autem hoc modo. De centro oscillationis

Sit primo, ſi poteſt, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Conſtat autem, dum punctum L percurrit arcum LP, ſimul centrum gravitatis E percurrere arcum ſimilem EQ. Ducantur à punctis Q, P, O, perpendiculares ſurſum, quæ occurrant ſubtenſis arcuum EI, LN, GM, in R, S, Y. & SP vocetur y. Unde, cum ſit ut LD, x, ad ED, d, ita SP, y, ad RQ; erit RQ æqualis $\frac{dy}{x}$. Jam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eandem unde deſcendit altitudinem aſcendere, nempe per arcum OM, vel perpendicularem OY ipſi PS æqualem; punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua aſcenditur ad altitudinem PS. Dum vero L tranſit in P, ſimul pondera A, B, C, ſimiles arcus percurrunt ipſi LP, nimirum AT, BV, CX. Eſtque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quum vinculo eodem contineantur, ſicut diſtantia DL ad DA. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita eſt altitudo ad quam illa celeritate aſcendi poteſt, ad altitudinem quò hac celeritate aſcendi poteſt*. Ergo etiam, ut quadratum diſtantiæ DL, quod eſt xx, ad quadratum diſtantiæ DA, quod eſt ee, ita eſt altitudo quo aſcenditur celeritate puncti L, quum eſt in P, (quæ altitudo major dicta eſt quam PS ſive y,) ad altitudinem quo aſcenditur celeritate ponderis A in T; ſi nempe poſtquam in T pervenit, relicto pendulo, | ſeorſim motum ſuum ſurſum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{eey}{xx}$. * Prop. 3 & 4. part 2. (p. 102).

Eadem ratione, erit altitudo ad quam aſcenderet pondus B, celeritate acquiſita per arcum BV, major quam $\frac{ffy}{xx}$. Et altitudo ad quam aſcenderet pondus C, celeritate acquiſita per arcum CX, major quam $\frac{ggy}{xx}$. Unde, ductis ſingulis altitudinibus iſtis in

Du centre d'oscillation.

refpondant, la fomme des produits fera fupérieure à $\frac{ae^2y + bf^2y + cg^2y}{x^2}$. Nous en conclurons que cette fomme eft auffi plus grande que $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Car puifque la longueur x a été pofée égale à $\frac{ae^2 + bf^2 + cg^2}{ad + bd + cd}$, on aura $adx + bdx + cdx = ae^2 + bf^2 + cg^2$. En tout étant multiplié par y et divifé par x^2, on aura $\frac{ady + bdy + cdy}{x} = \frac{ae^2y + bf^2y + cg^2y}{x^2}$. D'où réfulte ce que nous avons dit. Or, cette fomme de produits eft égale à celle qui s'obtient en multipliant la hauteur à laquelle monte le centre commun de gravité des poids A, B, C par la fomme $a + b + c$ de ces poids, bien entendu dans le cas où, comme nous l'avons dit, chacun de ces poids s'élève féparément à la plus grande hauteur poffible. Mais le quantité $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ s'obtient auffi comme produit de la defcente du centre de gravité des mêmes poids (laquelle defcente eft RQ ou $\frac{dy}{x}$, comme il a été trouvé plus haut) par la même fomme des poids $a + b + c$. Par conféquent, comme il a été démontré que le produit obtenu d'abord eft plus grand que ce deuxième, il s'enfuit que l'afcenfion du centre de gravité des poids A, B, C, lorfque, parvenus en T, V, X, après avoir quitté le pendule, ils dirigent chacun à part les viteffes acquifes vers le haut, fera plus grande que la defcente du même centre de gravité pendant le mouvement qui les amène de A, B, C en T, V, X. Ce qui eft abfurde, puifque la dite afcenfion doit être égale à la defcente, d'après la propofition précédente.

Si l'on dit que la viteffe du point L, quand il fera parvenu en P, eft plus petite que celle du poids G parvenu jufqu'en O, nous démontrerons de la même manière que l'afcenfion poffible du centre de gravité des poids A, B, C eft plus petite que la defcente, ce qui encore une fois ne s'accorde pas avec la propofition précédente. Refte donc que la viteffe du point L tranfporté jufqu'en P eft la même que celle du poids G en O. D'où il réfulte, comme nous l'avons dit plus haut, que le pendule fimple FG eft ifochrone avec le pendule compofé de A, B, C.

PROPOSITION VI.

Etant donné un pendule compofé d'un nombre quelconque de poids égaux, fi la fomme des carrés des diftances des poids à l'axe d'ofcillation eft divifée par la diftance du centre de gravité commun du même axe d'ofcillation, cette dernière diftance étant multipliée par le nombre des poids, il en réfultera la longueur du pendule fimple ifochrone avec le pendule compofé[1]).

Soient pofées les mêmes chofes qu'auparavant, mais qu'on fe figure tous les poids

ſua pondera, erit ſumma productorum major quam $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. quæproin- De centro oscillationis
de major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia poſita eſt longitudo x æqualis $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$; erit $adx + bdx + cdx$ æquale $aee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per xx, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. Unde quod dictum eſt conſequitur. Eſt autem ſumma iſta productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam aſcendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in ſummam ipſorum ponderum, $a + b + c$; ſi nempe ſingula, uti dictum, ſeorſim quouſque poſſunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex deſcenſu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui deſcenſus eſt RQ, ſive $\frac{dy}{x}$, ut ſupra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum ſummam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus oſtenſum fuerit, ſequitur aſcenſum centri gravitatis ponderum A, B, C, ſi, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, ſingula celeritates acquiſitas ſurſum convertant, majorem fore ejuſdem centri gravitatis deſcenſu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod eſt abſurdum, cum dictus aſcenſus deſcenſui æqualis eſſe debeat, per antecedentem.

Eodem modo, ſi dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem eſſe celeritate ponderis G quum in O pervenerit; oſtendemus aſcenſum poſſibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem eſſe quam deſcenſum, quod eidem propoſitioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem ſit celeritas puncti L, ad P tranſlati, quæ ponderis G in O. Unde, ut ſuperius dictum, ſequitur pendulum ſimplex FG compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus compoſito; ſi ſumma quadratorum factorum à diſtantiis, quibus unumquodque pondus abeſt ab axe oſcillationis, ap|plicetur ad diſtantiam centri gravitatis communis ab eodem oſcillationis axe, (*p.* 103). *multiplicem ſecundum ipſorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni*[1]).

Sint poſita eadem quæ prius, ſed pondera omnia inter ſe æqualia intelligantur, &

[1]) Voir la note 1 de la p. 258 qui précède.

Du centre d'oscillation.

égaux et que chacun d'eux foit appelé a. Qu'ici auffi il ne leur foit attribué aucune grandeur, mais qu'ils foient confidérés quant à la dimenfion comme extrêmement petits.

La longueur du pendule fimple ifochrone fera donc d'après la propofition précédente $\frac{ae^2 + af^2 + ag^2}{ad + ad + ad}$. Ou bien, puifque le numérateur et le dénominateur ont le facteur commun a, la même longueur fera exprimée par $\frac{e^2 + f^2 + g^2}{3d}$. Cette formule repréfente la fomme des carrés des diftances des poids à l'axe d'ofcillation, divifée par la diftance du centre de gravité de tous ces poids au même axe d'ofcillation, cette dernière diftance étant multipliée par le nombre des poids qui eft ici de trois. En effet, on voit aifément que ce nombre, par lequel il faut multiplier la diftance d, correfpond néceffairement au nombre des poids. La propofition eft donc prouvée.

Que fi les poids égaux font attachés l'un à l'autre par une feule ligne droite fufpendue à fon extrémité fupérieure, il eft établi que la diftance à l'axe d'ofcillation de leur centre commun de gravité, multipliée par le nombre des poids, eft égale à la fomme des diftances de tous les poids du même axe d'ofcillation *); par conféquent, dans ce cas, on aura auffi la longueur du pendule fimple ifochrone avec le pendule compofé, en divifant la fomme des carrés des diftances de tous les poids à l'axe d'ofcillation par la fomme de ces mêmes diftances.

* Prop. 2. de cette Partie.

DÉFINITION XIV.

S'il y a dans le même plan une figure et une ligne droite qui la touche extérieurement, qu'on aftreint une autre droite perpendiculaire à ce plan à fe mouvoir de manière à couper toujours le contour de la figure, de forte que cette droite décrit une certaine furface, et qu'on coupe enfuite cette dernière par un plan paffant par la dite tangente et incliné par rapport au plan de la figure donnée; nous défignerons le folide compris entre les deux plans et la partie de la furface décrite interceptée par ces plans, par l'expreffion Onglet [1]) coupé fur cette figure comme bafe.

Soit, dans la figure ci-ajoutée [Fig. 81], ABEC la figure plane donnée, MD la tangente, EF la génératrice paffant par fon contour; et l'onglet le corps compris entre les plans ABEC et MFG et la partie de la furface décrite par la droite EF.

[1]) Voir la note 3 de la p. 499 du T. XVI.

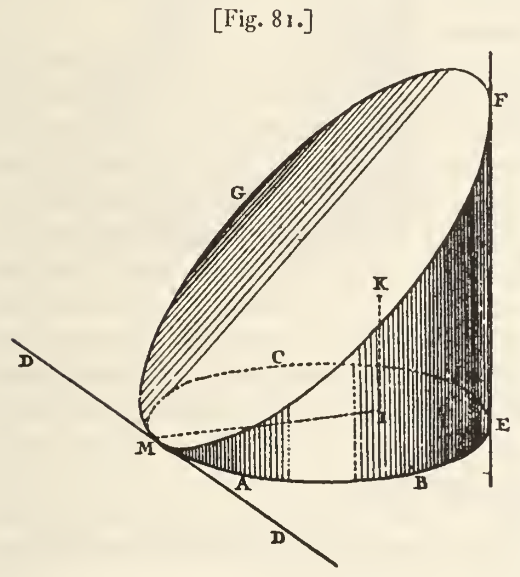
ſingula dicantur *a*. Rurſus vero nulla eorum magnitudo conſideretur, ſed pro minimis habeantur, quantum ad extenſionem. De centro oscillationis

Itaque penduli ſimplicis iſochroni longitudo, per propoſitionem antecedentem, erit $\frac{aee + aff + agg}{ad + ad + ad}$. Vel, quia quantitas diviſa ac dividens utraque per *a* dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee + ff + gg}{3d}$. Quo ſignificatur ſumma quadratorum à diſtantiis ponderum ab axe oſcillationis, applicata ad diſtantiam centri gravitatis omnium ab eodem oſcillationis axe, multiplicem ſecundum numerum ipſorum ponderum, qui hic eſt 3. facile enim perſpicitur numerum hunc, in quem ducitur diſtantia *d*, reſpondere neceſſario ipſi ponderum numero. Quare conſtat propoſitum.

Quod ſi pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta ſint, atque ex termino ejus ſuperiore ſuſpenſa; conſtat diſtantiam centri gravitatis, ex omnibus compoſitæ, ab axe oſcillationis, multiplicem ſecundum ponderum numerum, æquari ſummæ diſtantiarum omnium ponderum ab eodem oſcillationis axe *; ac proinde, hoc caſu, habebitur quoque longitudo penduli ſimplicis, compoſito iſochroni, ſi ſumma quadratorum à diſtantiis ponderum ſingulorum ab axe oſcillationis, dividatur per ſummam earundem omnium diſtantiarum. * Prop. 2. huj.

DEFINITIO XIV.

[Fig. 81.]



Si fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipſam extrinſecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, ſuperficiemque quandam deſcribat, quæ deinde ſecetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato; ſolidum comprehenſum à duobus planis iſtis, & parte ſuperficiei deſcriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus [1]) *ſuper figura illa, tanquam baſi, abſciſſus.*

In ſchemate adjecto [Fig. 81], eſt ABEC figura data; recta ea tangens | MD; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, EF; cuneus autem figura ſolida planis ABEC, MFG, & parte ſuperficiei, à recta EF deſcriptæ, comprehenſa. (*p.* 104).

Du centre d'oscillation.

DEFINITION XV.

Appelons Subcentrique de l'onglet la diſtance entre la droite par laquelle paſſe le plan qui limite l'onglet et le pied ſur la baſe de l'onglet du perpendiculaire provenant de ſon centre de gravité.

Dans la même figure [Fig. 81], K étant le centre de gravité de l'onglet, la droite KI la perpendiculaire ſur ſa baſe ABEC, et IM une perpendiculaire ſur MD, IM ſera la droite que nous appelons ſubcentrique.

PROPOSITION VII.

L'onglet coupé ſur une figure plane quelconque par un plan incliné d'un angle demi-droit eſt égal au ſolide qui s'obtient par la multiplication de cette figure par une hauteur égale à la diſtance qui ſépare le centre de gravité de la figure plane de la droite par laquelle paſſe le plan qui limite l'onglet [1]).

Soit [Fig. 82] un onglet ABD coupé ſur la figure plane ACB par un plan incliné d'un angle demi-droit et paſſant par EE, tangente à la figure ACB ſituée dans ſon plan. Soit F le centre de gravité de la figure et FA une perpendiculaire abaiſſée de ce centre ſur la droite EE. Je dis que l'onglet ACB eſt égal au ſolide obtenu par la multiplication de la figure ACB par une hauteur égale à FA.

En effet, ſuppoſons la figure ACB diviſée en particules égales extrêmement petites et ſoit G une d'elles. Il eſt certain que ſi chacune d'elles eſt multipliée par ſa diſtance à la droite EE, la ſomme des produits ſera égale à celle qui eſt obtenue par la multiplication de la droite AF par l'enſemble des particules *), c.à.d. à celle qui réſulte de la multiplication de la figure ACB par une hauteur égale à AF. Mais chacune des particules telles que G, multipliée par ſa diſtance GH, eſt égale à un très petit parallélépipède ou priſme tel que GK élevé ſur elle et ſe terminant à la ſurface oblique AD; car leurs hauteurs ſont égales aux diſtances GH à cauſe de l'inclinaiſon d'un angle demi-droit des plans AD et ACB l'un par rapport à l'autre. Et il eſt clair que l'onglet ABD entier eſt formé par ces parallélépipèdes. L'onglet lui-même ſera donc égal au ſolide conſtruit ſur la baſe ACB et ayant une hauteur égale à la droite FA. C.Q.F.D.

* Prop. 1. de cette Partie.

PROPOSITION VIII.

Si une ligne droite touche une figure plane, que la figure eſt ſuppoſée diviſée en

[1]) Comparez la propoſition un peu plus générale (l'angle d'inclinaiſon qui est ici de 45° étant quelconque) de la p. 499 (dernier alinéa) du T. XVI.

DEFINITIO XV.

De centro oscillationis

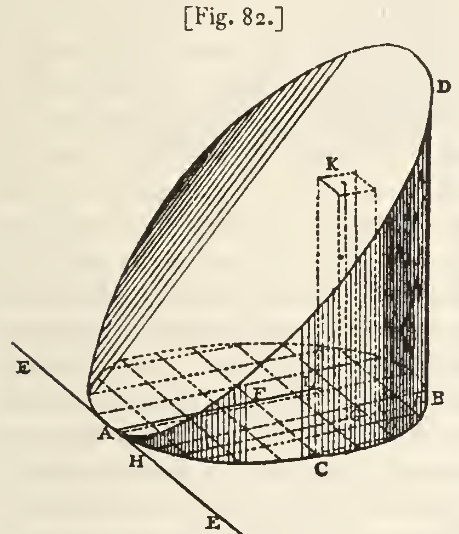
Distantia inter rectam, per quam cuneus abscissus est, & punctum baseos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica.

Nempe in figura eadem [Fig. 81], si K sit centrum gravitatis cunei, recta vero KI ad basin ejus ABEC perpendicularis ducta sit, & rursus IM perpendicularis ad MD; erit IM, quam subcentricam dicimus.

PROPOSITIO VII.

Cuneus super plana figura qualibet abscissus, plano inclinato ad angulum semirectum, æqualis est solido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem distantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abscissus est cuneus [1]).

[Fig. 82.]



Sit, super figura plana ACB [Fig. 82], cuneus ABD abscissus plano ad angulum semirectum inclinato, ac transeunte per EE, rectam tangentem figuram ACB, inque ejus plano sitam. Centrum vero gravitatis figuræ sit F, unde in rectam EE ducta sit perpendicularis FA. Dico cuneum ACB æqualem esse solido, quod fit ducendo figuram ACB in altitudinem ipsi FA æqualem.

Intelligatur enim figura ACB divisa in particulas minimas æqua|les quarum una G. Itaque (*p.* 105). constat, si harum singulæ ducantur in distantiam suam ab recta EE, summam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam AF in particulas omnes *, hoc est, ei quod fit ducendo * Prop. 1. huj. figuram ipsam ACB, in altitudinem æqualem AF. Atqui particulæ singulæ ut G, in distantias suas GH ductæ, æquales sunt parallelepipedis, vel prismatibus minimis, super ipsas erectis, atque ad superficiem obliquam AD terminatis, quale est GK; quia horum altitudines ipsis distantiis GH æquantur, propter angulum semirectum inclinationis planorum AD & ACB. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum ABD componi. Ergo & cuneus ipse æquabitur solido super basi ACB, altitudinem habenti rectæ FA æqualem. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Si figuram planam linea recta tangat, divisaque intelligatur figura in particulas

Du centre d'oscillation.

des particules très petites égales entre elles et que de chaque particule une perpendiculaire eſt abaiſſée ſur cette droite, la ſomme des carrés de toutes ces perpendiculaires ſera égale à un certain rectangle multiplié par le nombre des particules; lequel rectangle a pour côtés la diſtance du centre de gravité de la figure à la ligne droite et la ſubcentrique de l'onglet qui eſt coupé ſur la figure donnée par un plan paſſant par cette droite [1]).

En effet, toutes les autres choſes étant poſées comme dans la conſtruction précédente, ſoit LA [Fig. 82] la ſubcentrique de l'onglet ABD par rapport à la droite EE. Il s'agit donc de démontrer que la ſomme des carrés des diſtances de toutes les particules de la figure ACB eſt égale au rectangle formé par FA et LA, multiplié par le nombre des particules.

Or, il apparaît par la démonſtration précédente que les hauteurs des différents parallélépipèdes telles que GK ſont égales aux diſtances des particules qui conſtituent leurs baſes, telles que G, de la droite AE. C'eſt pourquoi, ſi l'on multiplie le parallélépipède GK par la diſtance GH, c'eſt comme ſi l'on multipliait la particule G par le carré de la diſtance GH. Et la même choſe eſt vraie pour tous les autres parallélépipèdes. Mais la ſomme des produits de tous les parallélépipèdes chacun par ſa diſtance de la droite AE eſt égale au produit de l'onglet ABD par la diſtance LA *), puiſque l'onglet a ſon centre de gravité au-deſſus du point L. Par conſéquent la ſomme des produits de chacune des particules G par le carré de ſa diſtance à la droite AE ſera égale au produit de l'onglet ABD par la droite LA, en d'autres termes au produit de la figure ACB par le rectangle de côtés FA et LA. Car l'onglet ABD eſt égal au produit de la figure ACB par la droite FA *). Derechef, comme la figure ACB eſt égale au produit d'une particule G par le nombre des particules, il s'enſuit que le dit produit de la figure ACB par le rectangle conſtruit ſur FA et LA eſt égal à celui de la particule G par le rectangle conſtruit ſur FA et LA, multiplié par le nombre des particules G. À ce produit ſera donc auſſi égal la dite ſomme des produits de chaque particule G par le carré de ſa diſtance à la droite AE, ou bien le produit d'une ſeule particule G par la ſomme de tous ces carrés. Partant, lorſqu'on omet d'un côté et de l'autre la multiplication par la particule G, il eſt néceſſaire que la dite ſomme des carrés ſoit égale au rectangle à côtés FA et LA multiplié par le nombre des particules dans leſquelles la figure ACB eſt diviſée par hypothèſe. C.Q.F.D.

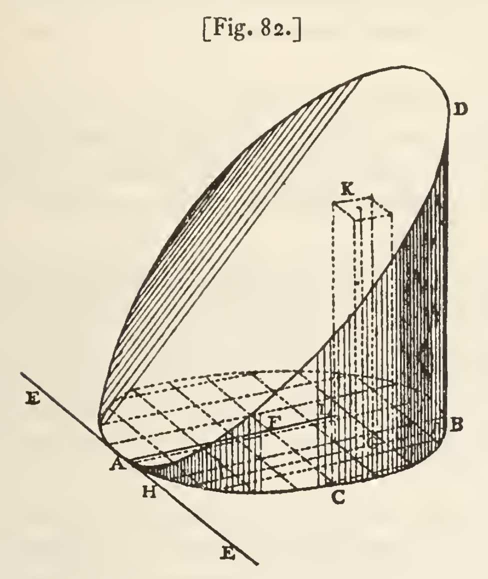
* Prop. I de cette Partie.

* Prop. précéd.

[1]) La démonstration qui suit fait voir que Huygens entend parler, comme dans la Prop. VII, d'un onglet limité par un plan incliné à 45°, quoique la subcentrique d'un onglet (ou d'un tronc) soit indépendante de la grandeur de l'inclinaison du plan limitant; comparez l'avant-dernier alinéa de la note 2 de la p. 458 du T. XVI. La Prop. VIII est un cas particulier du

minimas æquales, atque à ſingulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, ſimul ſumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum; quod nempe rectangulum fit à diſtantia centri gravitatis figuræ ab eadem recta, & à ſubcentrica cunei, qui per illam ſuper figura abſcinditur [1]). DE CENTRO OSCILLATIONIS

[Fig. 82.]



Poſitis enim cæteris omnibus quæ in conſtructione præcedenti, ſit LA [Fig. 82] cunei ABD ſubcentrica in rectam EE. Oportet igitur oſtendere, ſummam quadratorum omnium à diſtantiis particularum | figuræ ACB (*p.* 106). æquari rectangulo ab FA, LA, multiplici ſecundum particularum numerum.

Et conſtat quidem ex demonſtratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum ſingulorum, ut GK, æquales eſſe diſtantiis particularum, quæ ipſorum baſes ſunt, ut G, ab recta AE. Quare, ſi jam parallelepipedum GK ducamus in diſtantiam GH, perinde eſt ac ſi particula G ducatur in quadratum diſtantiæ GH. Eodemque modo ſe res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in diſtantias ſuas ab recta AE, æquantur ſimul producto ex cuneo ABD in diſtantiam LA *, quia cuneus gravitat ſuper puncto L. Ergo etiam ſumma productorum à particulis ſingulis G, in quadrata ſuarum diſtantiarum ab recta AE, æquabitur producto ex cuneo ABD in rectam LA, hoc eſt, producto ex figura ACB in rectangulum ab FA, LA. Nam cuneus ABD, æqualis eſt producto ex figura ACB in rectam FA *. Rurſus quia figura ACB æqualis eſt producto ex particula una G, in numerum ipſarum particularum; ſequitur, dictum productum ex figura ACB in rectangulum FA, LA, æquari producto ex particula G in rectangulum ab FA, LA, multiplici ſecundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta ſumma productorum, à particulis ſingulis G in quadrata ſuarum diſtantiarum ab recta AE, ſive à particula una G in ſummam omnium horum quadratorum. Quare, omiſſa utrinque multiplicatione in particulam G, neceſſe eſt ſummam eandem quadratorum æquari rectangulo ab FA, LA, multiplici ſecundum numerum particularum in quas figura ACB diviſa intelligitur. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

---

1) Lemme de la p. 503 du T. XVI, savoir celui où la droite DEK de la Fig. 65 de cette page touche la courbe ABC, de sorte que le tronc se réduit à un onglet.

Du centre d'oscillation.

PROPOSITION IX.

Etant donnée une figure plane et dans le même plan une droite coupant la figure ou ne la coupant pas, ſur laquelle ſont abaiſſées des perpendiculaires de toutes les très petites particules égales dans lesquelles la figure eſt diviſée par hypothèſe, trouver la ſomme des carrés de toutes ces perpendiculaires, ou bien un plan qui, multiplié par le nombre des particules, ſoit égal à la dite ſomme des carrés [1]).

Soit donnée [Fig. 83] la figure plane ABC et dans le même plan la droite ED, et la figure ayant été diviſée par la penſée en de très petites particules égales, ſuppoſons abaiſſées ſur la droite ED des perpendiculaires de toutes ces particules, comme l'eſt FK de la particule F. Qu'il faille trouver la ſomme des carrés de toutes ces perpendiculaires.

Soit AL une tangente à la figure, parallèle à la droite donné ED et toute hors de la figure. Elle peut toucher la figure ſoit du même côté où eſt ED ſoit du côté oppoſé. Soit la droite GA, coupant ED en E, la diſtance du centre de gravité de la figure à la droite AL, et HA la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur la figure par un plan passant par la droite AL. Je dis que la ſomme cherchée des carrés eſt égale à la ſomme du rectangle AGH et du carré EG, multipliés par le nombre des particules dans lesquelles la figure eſt ſuppoſée diviſée.

En effet, puiſſe FK, prolongée s'il en eſt beſoin, couper la tangente AL au point L. On peut alors en premier lieu, dans le cas où la droite ED eſt diſtante de la figure et que la tangente AL a été menée du même côté de la figure, démontrer la propoſition comme ſuit. La ſomme de tous les FK^2 eſt égale à un nombre égal de KL^2 plus un nombre double de rectangles KLF plus autant de LF^2. Mais la ſomme des KL^2 eſt égale à celle des EA^2. Et il eſt certain que l'enſemble des rectangles KLF eſt égal à autant de fois le rectangle EAG, puiſque la ſomme des FL eſt égale à autant de fois la droite GA *). Enfin les LF^2 ſont égaux à un nombre égal de rectangles HAG †),

* Prop. 2 de cette Partie.
† Prop. précéd.

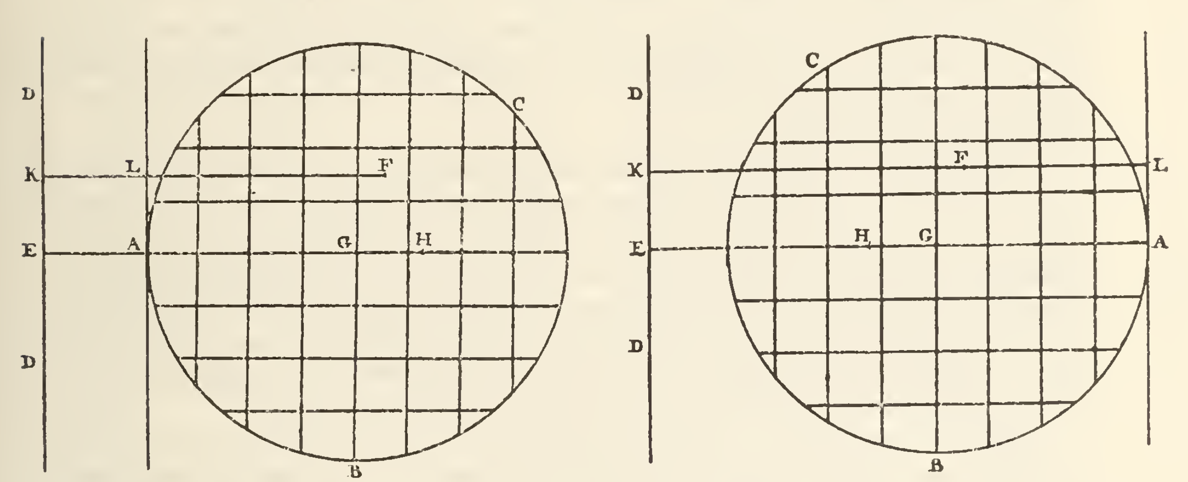
[1]) Voir la note 1 de la p. 546 du T. XVI.

PROPOSITIO IX.

De centro oscillationis

Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & æqualibus, in quas figura divisa intelligitur; invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit[1]).

[Fig. 83.]



Sit data figura plana ABC [Fig. 83], & in eodem plano recta ED; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam ED, sicut à particula F ducta est FK. Oporteatque invenire | (*p.* 107). summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus.

Sit datæ ED parallela recta AL, quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est ED, vel à parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta AL sit recta GA, secans ED in E; & subcentrica cunei, super figura abscissi plano per rectam AL, sit HA. Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo AGH una cum quadrato EG, multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.

Occurrat enim FK, si opus est producta, tangenti AL in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta ED à figura distat, & tangens AL ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum FK æquatur totidem quadratis KL, una cum bis totidem rectangulis KLF, & totidem insuper quadratis LF. Sed quadrata KL æquantur totidem quadratis EA. Et rectangula KLF æqualia esse constat totidem rectangulis EAG, quia omnes FL æquales totidem GA *. Et * Prop. 2. huj. denique quadrata LF æquantur totidem rectangulis HAG *, hoc est, totidem quadratis * Prop. præced.

Du centre d'oscillation.

en d'autres termes à autant de AG^2 plus autant de rectangles AGH. Par conséquent l'ensemble des FK^2 sera égal à un nombre égal de EA^2 plus autant de fois le double du rectangle EAG plus autant de AG^2 et de rectangles AGH. Mais trois de ces grandeurs, savoir $EA^2 + 2\,EAG + AG^2$, constituent le carré EG^2. Il appert donc que l'ensemble des KF^2 est égal à un nombre égal de EG^2 plus autant de fois le rectangle AGH. C.Q.F.D.

Dans tous les autres cas, l'ensemble des carrés FK^2 [Fig. 84] est égal à celui des KL^2 moins deux fois le même nombre de rectangles KLF plus autant de fois LF^2, en d'autres termes à un même nombre de EA^2 moins autant de fois le double du rectangle EAG plus autant de AG^2 et de rectangles AGH. Mais l'expression $EA^2 + AG^2 - 2\,EAG$ est toujours égale à EG^2. Par conséquent dans ces cas aussi la somme des FK^2 sera égale à celle des EG^2 plus un nombre égal de rectangles AGH. La proposition est donc établie.

Il s'ensuit que le rectangle AGH a la même grandeur, que AH soit la subcentrique de l'onglet limité par un plan passant par la première tangente parallèle à AL ou bien celle d'un onglet limité par un plan passant par la deuxième tangente. Par conséquent la longueur AG du premier cas est à AG du second cas, comme HG du second à HG du premier. Mais le rapport des droites AG entre elles est égal à celui des onglets limités dans l'un et l'autre cas par un plan passant par une des tangentes AL, comme cela résulte de la Prop. VII de la présente Partie. GH a donc aussi à GH un rapport inverse à celui des onglets correspondants.

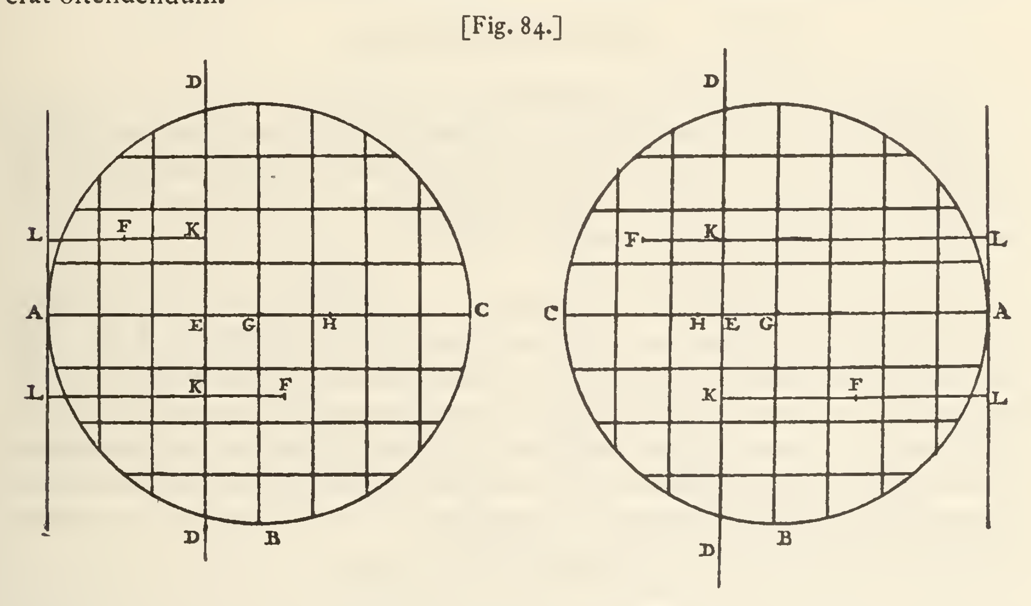
Il apparaît aussi que, le centre de gravité G de la figure plane étant donné ainsi que la subcentrique de l'onglet limité par un plan passant par l'une des deux tangentes parallèles AL, la subcentrique de l'onglet limité par un plan passant par l'autre tangente AL est également connue.

PROPOSITION X.

Etant posées les mêmes choses que dans le cas de la proposition précédente, si la droite ED [*Fig.* 85] *passe par* G, *centre de gravité de la figure* ABC, *la somme des*

AG cum totidem rectangulis AGH. Ergo quadrata omnia FK æqualia erunt totidem quadratis EA, cum totidem duplis rectangulis EAG, atque insuper totidem quadratis AG cum totidem rectangulis AGH. Atqui tria ista; nempe quadratum EA cum duplo rectangulo EAG & quadrato AG; faciunt quadratum EG. Ergo apparet quadrata omnia FK æquari totidem quadratis EG, una cum totidem rectangulis AGH. Quod erat ostendendum. De centro oscillationis

[Fig. 84.]



Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia FK [Fig. 84] æquantur totidem quadratis KL, minus bis totidem rectangulis KLF, plus totidem quadratis LF; hoc est, totidem quadratis EA, minus totidem duplis rectangulis EAG, plus totidem quadratis AG, cum toti|dem rectangulis AGH. Atqui, omnibus hisce casibus, sit quadra- (*p.* 108). tum EA, plus quadrato AG, minus duplo rectangulo EAG, æquale quadrato EG. Ergo rursus quadrato omnia FK æqualia erunt totidem quadratis EG, una cum totidem rectangulis AGH. Quare constat propositum.

Hinc sequitur, rectangulum AGH eadem magnitudine esse, utriusvis cunei subcentrica fuerit AH; hoc est, sive per hanc, sive per illam tangentium parallelarum AL abscissi. Itaque AG unius casus ad AG alterius, ut HG hujus ad HG illius. Sicut autem rectæ AG inter se, ita in utroque casu cunei per AL abscissi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce GH ad GH.

Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & subcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum AL abscissi, dari quoque cunei, per tangentem alteram AL abscissi, subcentricam.

PROPOSITIO X.

Positis quæ in propositione præcedenti; si data recta ED [Fig. 85] *transeat per* G,

Du centre d'oscillation.

carrés des distances à la droite ED *des particules dans lesquelles la figure est supposée divisée sera égale au seul rectangle* AGH, *multiplié par le nombre des particules* [1]).

Ceci est évident, puisque dans ce cas le carré EG^2 est nul.

PROPOSITION XI.

Les mêmes choses étant derechef posées que dans le cas de l'avant-dernière proposition, DE [*Fig.* 86] *étant un axe de symétrie de la figure plane* ABC, VG *la distance du centre de gravité de la demi-figure* DAD *à la droite* ED, *et* GX *la subcentrique de l'onglet coupé sur cette demi-figure par un plan passant par* ED, *le rectangle* XGV *sera égal au rectangle* AGH [2]).

En effet, le rectangle XGV, multiplié par le nombre des particules de la figure DAD, est égal à la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur la droite ED des particules de cette demi-figure *). Par conséquent le même rectangle XGV, multiplié par le nombre des particules de la figure entière ABC, sera égal à la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur la droite ED de toutes les particules de cette figure, c.à.d. au rectangle AGH multiplié par le même nombre de particules, comme cela résulte de la proposition précédente. D'où s'ensuit que les rectangles XGV et AGH sont égaux entre eux. C.Q.F.D.

* Prop. 8 de cette Partie.

PROPOSITION XII.

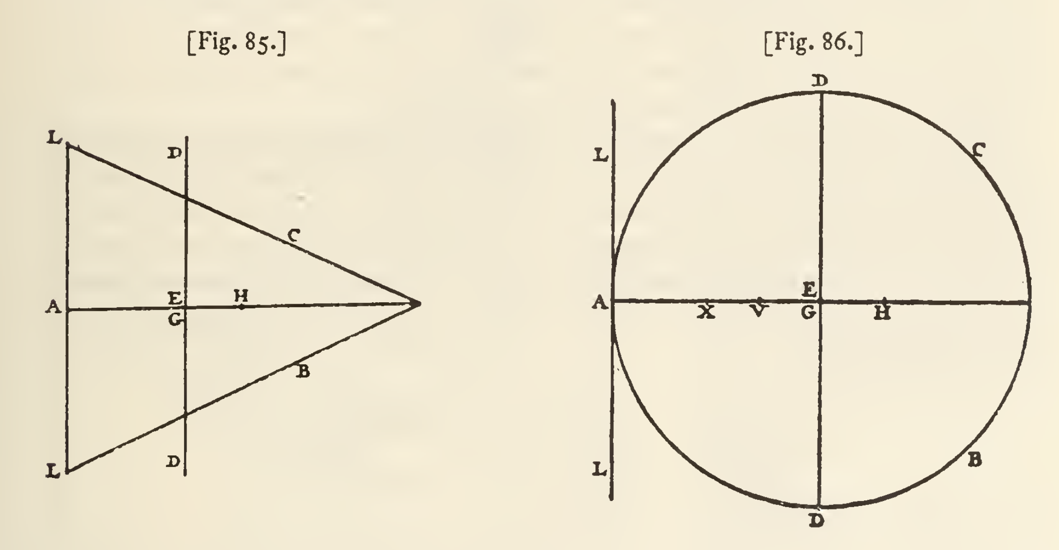
Etant donnés dans un plan un nombre quelconque de points, si de leur centre de gravité on décrit un cercle de grandeur quelconque et qu'on tire à partir de tous les

---

1) Voir les notes 5 et 6 de la p. 547 du T. XVI.
2) Voir la note 2 de la p. 549 du T. XVI.

centrum gravitatis figuræ ABC; *erit ſumma quadratorum à diſtantiis particularum, in quas figura | diviſa intelligitur, ab recta* ED, *æqualis rectangulo ſoli* AGH, *multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum* [1]). De centro oscillationis (*p.* 109).

Hoc enim manifeſtum eſt, quum nullum tunc ſit quadratum EG.



PROPOSITIO XI.

Poſitis rurſus cæteris ut in præcedentium penultima; ſi DE [Fig. 86] *ſit axis figuræ planæ* ABC, *in duas æquales ſimilesque portiones eam dividens, ſitque inſuper* VG *diſtantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* DAD *ab recta* ED, *cunei vero, ſuper ipſam abſciſſi per ipſam* ED, *ſubcentrica* GX; *erit rectangulum* XGV *æquale rectangulo* AGH [2]).

Eſt enim rectangulum XGV, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ DAD, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejusdem figuræ dimidiæ in rectam ED cadentium *. Ac proinde idem rectangulum XGV, multiplex ſecundum numerum particularum totius figuræ ABC, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam ED demiſſarum; hoc eſt, rectangulo AGH multiplici ſecundum eundem particularum numerum, ut conſtat ex propoſ. præcedenti. Unde ſequitur rectangula XGV, AGH inter ſe æqualia eſſe. quod erat demonſtrandum. * Prop. 8. huj.

PROPOSITIO XII.

Datis in plano punctis quotlibet; ſi ex centro gravitatis eorum circulus quilibet deſcribatur; ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli

Du centre d'oscillation.

points donnés à un point quelconque ſitué ſur la circonférence de ce cercle des lignes droites, la ſomme des carrés de toutes ces droites ſera toujours égale à un même plan [1]).

Soient A B C D [Fig. 87] les points donnés, et E leur centre de gravité ou bien celui de grandeurs égales ſuſpendues à eux. Qu'un cercle de grandeur quelconque F*f* ſoit décrit du centre E, et un point quelconque tel que F étant pris ſur ſa circonférence, qu'on le relie par les droites AF, BF, CF, DF aux points donnés. Je dis que l'enſemble des carrés de toutes ces droites eſt égal à un certain plan, toujours le même, où que le point F ſoit placé ſur la circonférence.

En effet, ſoient tirées les droites GH, GK formant un angle droit et pour chacune deſquelles les points donnés ſoient ſitués d'un même côté. Abaiſſons ſur ces deux droites de chacun des points donnés les perpendiculaires AL, AK; BM, BO; CN, CP; DH, DQ; et ſur l'une quelconque d'elles GH ou GK, les perpendiculaires ER, FS provenant du centre de gravité E et du point F. Enſuite auſſi les perpendiculaires AV, BX, CY, DZ des points donnés ſur FS; et ſoit FT une perpendiculaire ſur ER. Soit maintenant

AL = a	AK = e	le rayon EF = z
BM = b	BO = f	GS = x
CN = c	CP = g	
DH = d	DQ = h	

Or, comme E eſt le centre de gravité des points A, B, C, D, ſi l'on prend la ſomme des perpendiculaires AL, BM, CN, DH et qu'on la diviſe en autant de parties qu'il y a de points donnés, ER ſera égale à une de ces parties*). De même, la ſomme des perpendiculaires AK, BO, CP, DQ ayant été diviſée en autant de parties, la perpendiculaire tirée de E ſur la droite GK, ou bien la droite RG, ſera égale à l'une d'elles*). Par conſéquent, ſi la ſomme de toutes les perpendiculaires AL, BM, CN, DH ou $a + b + c + d$ eſt appelée l, m celle de AK, BO, CP, DQ ou $e + f + g + h$ et θ le nombre des points donnés, on aura ER $= \frac{l}{\theta}$ et RG $= \frac{m}{\theta}$.

* Prop. 2 de cette Partie.

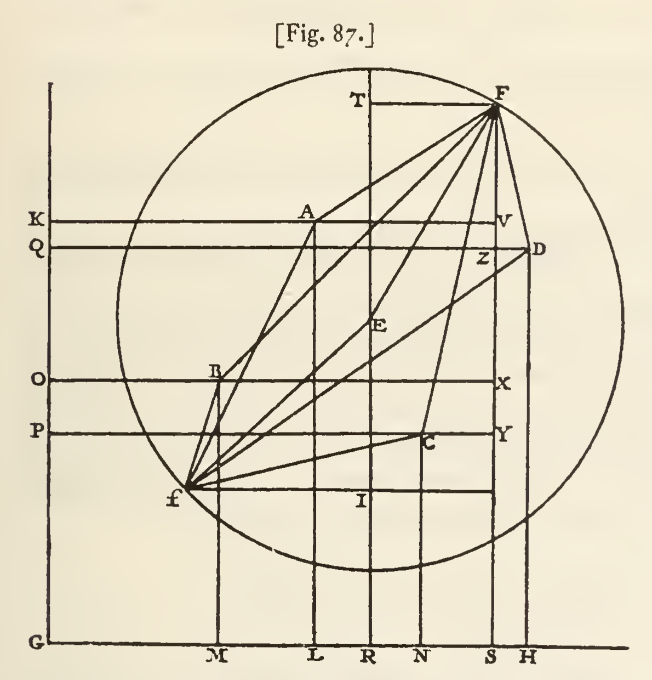
* Prop. 2 de cette Partie.

[1]) Voir sur cette Proposition qu'on trouve chez Pappus la p. 34 de l'Avertissement qui précède.

illius | circumferentia lineæ rectæ; erit ſumma quadratorum ab omnibus ſemper eidem plano æqualis [1]). (*p.* 110).

De centro oscillationis

[Fig. 87.]



Sint data puncta ABCD [Fig. 87]: centrumque gravitatis eorum, ſive magnitudinum æqualium ab ipſis ſuſpenſarum, ſit E; & centro E deſcribatur circulus quilibet F*f*, in cujus circumferentia ſumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ AF, BF, CF, DF. Dico earum omnium quadrata, ſimul ſumpta, æqualia eſſe plano cuidam dato, ſemperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F ſumptum fuerit.

Ducantur enim rectæ GH, GK, angulum rectum conſtituentes, & quarum unicuique omnia data puncta ſint poſita ad eandem partem. Et à ſingulis in utramque harum perpendiculares agantur AL, AK; BM, BO; CN, CP; DH, DQ. A centro autem gravitatis E, & à puncto F, in alterutram duarum, GH vel GK, perpendiculares ER, FS. Et item, à datis punctis, in ipſam FS perpendiculares AV, BX, CY, DZ. Et FT perpendicularis in ipſam ER. Porro ſit jam

AL ∞ a	AK ∞ e	radius EF ∞ z
BM ∞ b	BO ∞ f	GS ∞ x
CN ∞ c	CP ∞ g	
DH ∞ d	DQ ∞ h	

Quia autem E eſt centrum gravitatis punctorum A, B, C, D; ſi addantur in unum perpendiculares AL, BM, CN, DH, compoſitaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot ſunt data puncta; earum partium uni æqualis erit ER *. Similiterque, diviſâ in toti|dem partes ſummâ perpendicularium AK, BO, CP, DQ, earum uni æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam GK, ſive ipſa RG *. Itaque, ſi ſumma omnium AL, BM, CN, DH, ſive $a + b + c + d$ vocetur l: ſumma vero omnium, AK, BO, CP, DQ, ſive $e + f + g + h$, vocetur m: & numerus, datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ, erit ER ∞ $\frac{l}{\theta}$; & RG ∞ $\frac{m}{\theta}$. Cumque GS ſit x,

* Prop. 2. huj. (*p.* 111).
* Prop. 2. huj.

Du centre d'oscillation.

Et comme GS $= x$, on aura RS ou FT $= x - \frac{m}{\theta}$ ou bien $\frac{m}{\theta} - x$ ſi GR > GS; dans l'un et l'autre cas FT $= x^2 - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{m^2}{\theta^2}$. Cette quantité étant ſouſtraite de FE² ou z^2, il reſtera le carré de TE $= z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}$. Et par conſéquent TE $= \sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$. Or, nous avions ER $= \frac{l}{\theta}$. Par conſéquent TR $= \frac{l}{\theta} \pm \sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$. Appelons cette longueur TR y pour être courts.

Formons maintenant la ſomme de tous les carrés de FA, FB, FC, FD. AF² = AV² + VF². Or, AV eſt la différence de VK et de AK ou de SG et de AK; par conſéquent AV $= x - e$ ou $e - x$ et AV² $= x^2 - 2\,ex + e^2$. Mais VF eſt égale à la différence de FS et de VS ou de FS et de AL; par conſéquent VF $= y - a$ ou $a - y$, et VF² $= y^2 - 2\,ay + a^2$. Prenant la ſomme de AV² et de VF² on obtient FA² $= x^2 - 2\,ex + e^2 + y^2 - 2\,ay + a^2$. On trouvera de la même manière les carrés des autres droites FB, FC, FD. Tout étant diſpoſé par ordre on aura ceci:

$$\begin{aligned} FA^2 &= x^2 - 2\,ex + e^2 + y^2 - 2\,ay + a^2. \\ FB^2 &= x^2 - 2\,fx + f^2 + y^2 - 2\,by + b^2. \\ FC^2 &= x^2 - 2\,gx + g^2 + y^2 - 2\,cy + c^2. \\ FD^2 &= x^2 - 2\,hx + h^2 + y^2 - 2\,dy + d^2. \end{aligned}$$

La ſomme de ces carrés, ſi nous poſons $e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = n^2$ et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k^2$, ſera $\theta x^2 - 2\,mx + n^2 + \theta y^2 - 2\,ly + k^2$, puiſque θ était le nombre des points donnés, donc auſſi le nombre des carrés, et que nous avions poſé $e + f + g + h = m$ et $a + b + c + d = l$.

Or, ſi dans cette ſomme, ſavoir dans les termes $2\,\theta y$ et $2\,ly$, on ſubſtitue à y l'expreſſion qui fut déſignée par cette lettre, c.à.d.

$$\frac{l}{\theta} \pm \sqrt{z^2 - x^2 + 2\,\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}, \text{ on obtiendra}$$

$$\theta y^2 = \frac{l^2}{\theta^2} + 2\,l\sqrt{z^2 - x^2 + 2\,\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}} + \theta z^2 - \theta x^2 + 2\,xm - \frac{m^2}{\theta}$$

et $$-2\,ly = -2\,\frac{l^2}{\theta} - 2\,l\sqrt{z^2 - x^2 + 2\,\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}};$$

ou bien $$\theta y^2 = \frac{l^2}{\theta} - 2\,l\sqrt{z^2 - x^2 + 2\,\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}} + \theta z^2 - \theta x^2 + 2\,xm - \frac{m^2}{\theta}$$

et $$-2\,ly = -2\,\frac{l^2}{\theta} + 2\,l\sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}.$$

erit RS five FT $\infty\ x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, fi GR major quam GS; & femper quadratum FT $\infty\ xx - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato FE $\infty\ zz$, relinquetur quadratum TE $\infty\ zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde TE $\infty \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem ER $\infty\ \frac{l}{\theta}$. Itaque TR $\infty\ \frac{l}{\theta}$ + vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ TR, brevitatis gratia, dicatur y. Colligamus jam porro fummam quadratorum omnium FA, FB, FC, FD. Quadratum AF æquatur quadratis AV, VF. Eft autem AV æqualis differentiæ duarum VK, AK, five duarum SG, AK; ac proinde AV ∞ $x - e$ vel $e - x$; & qu. AV $\infty\ xx - 2ex + ee$. VF vero æqualis eft differentiæ duarum FS, VS five duarum FS, AL; ac proinde VF $\infty\ y - a$ vel $a - y$; & qu. VF $\infty\ yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis AV, VF, fit quadratum FA ∞ $xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum FB, FC, FD; atque omnia ordine difpofita erunt hæc;

De centro oscillationis

qu. FA $\infty\ xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. FB $\infty\ xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. FC $\infty\ xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. FD $\infty\ xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero fumma, fi ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh \infty\ nn$; & quadrata $aa + bb + cc + dd \infty\ kk$; erit ifta, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, pofitumque fuerat $e + f + g + h \infty\ m$, & $a + b + c + d \infty\ l$.

In ifta vero fumma, fi in terminis θyy & $2ly$, pro y, ponatur id cujus loco pofitum erat, nempe $\frac{l}{\theta}$ + vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$

fiet $+ \theta yy \infty\ \frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

& $- 2ly \infty\ - 2\frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

vel $+ \theta yy \infty\ \frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

& $- 2ly \infty\ - 2\frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

Du centre d'oscillation.

Par conſéquent dans l'un et l'autre cas on aura pour

$$\theta y^2 - 2\,ly : -\frac{l^2}{\theta} + \theta z^2 - \theta x^2 + 2\,xm - \frac{m^2}{\theta}.$$

En y ajoutant les autres quantités compriſes dans la ſomme ſuſdite, $\theta x^2 - 2\,xm + n^2 + k^2$, la ſomme totale, qui eſt celle des carrés de FA, FB, FC, FD, deviendra égale à $\theta z^2 + n^2 + k^2 - \frac{m^2 - l^2}{\theta}$. Ce qui eſt apparemment un plan déterminé puiſque toutes ces quantités ſont connues; il eſt donc manifeſte qu'on trouve toujours la même valeur où que le point F ſoit pris ſur la circonférence. C.Q.F.D.

Que ſi les points donnés ont par hypothèſe des poids divers, commenſurables entre eux, comme lorſque le point A pèſe 2, B 3, C 4 et D 7; qu'après avoir trouvé leur centre de gravité on décrit de nouveau un cercle, à un point de la circonférence duquel on relie les points donnés par des lignes droites; et qu'on multiplie le carré de chacune de ces droites par le nombre qui exprime le poids du point correſpondant, de ſorte qu'on prend deux fois le carré de AF, trois fois celui de BF, quatre fois celui de CF et ſept fois celui de DF; je dis qu'alors auſſi la ſomme totale ſera égale à un eſpace donné, toujours le même, où que le point ait été pris ſur la circonférence. Ceci reſſort de la démonſtration précédente, ſi nous nous figurons les points comme multiples ſelon les nombres de la peſanteur attribuée à chacun d'eux, comme s'il y avait en A deux points réunis, en B trois, en C quatre, en D ſept tous également peſants.

PROPOSITION XIII.

Lorſqu'une figure plane ou une ligne qui eſt dans un plan eſt ſuſpendue diverſement de points pris dans ce plan et également diſtants de ſon centre de gravité, cette figure ou ligne eſt iſochrone à elle-même dans le cas où ſon oſcillation eſt latérale [1].

Soit [Fig. 88] une figure plane, ou une ligne ſituée dans le plan ABC, dont D déſigne le centre de gravité. Décrivons de ce centre dans le même plan une circonférence de cercle ECF. Je dis que ſi une figure ſuſpendue en un point quelconque de cette circonférence tel que E, C ou G, oſcille latéralement, elle eſt iſochrone avec elle-même ou avec un même pendule ſimple.

Soit en premier lieu la figure ſuſpendue au point E. Lorſque celui-ci eſt ſitué en dehors de la figure, comme ici, il faut ſe figurer la ligne EH à laquelle la figure eſt ſuſpendue rigide et attachée à elle immuablement.

Suppoſons la figure ABC diviſée en de très petites particules égales, des centres de gravité de toutes leſquelles il faut tirer des droites au point E; il eſt manifeſte que

[1]) Voir le troiſième alinéa de la p. 373 du T. XVI et la note 1 de la p. 276 qui précède.

Ac proinde, utroque casu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $-\frac{ll}{\theta} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. De centro oscillationis

Quò appositis reliquis quantitatibus, summa prædi|cta contentis, $\theta xx - 2xm + nn + kk$, (p. 112).

fiet tota summa, nempe quadratorum FA, FB, FC, FD, $\infty\ \theta zz + nn + kk - \frac{mm - ll}{\theta}$.

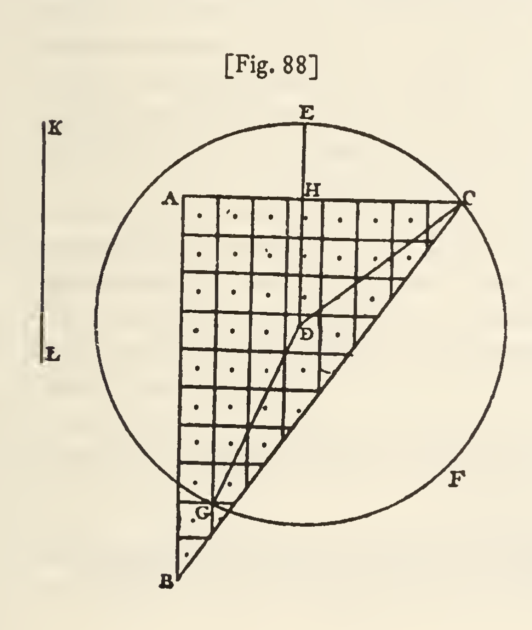
Quod apparet esse planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ sint; semperque idem reperiri, ubicunque in circumferentia sumptum fuerit punctum F. quod erat demonstrandum.

Quod si puncta data diversas gravitates habere ponantur, invicem commensurabiles, ut si punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rursus describatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac singularum quadrata multiplicia sumantur secundum numerum ponderis puncti sui; ut quadratum AF duplum, BF triplum, CF quadruplum, DF septuplum; dico rursus summam omnium æqualem fore spatio dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonstratione, si imaginemur puncta ipsa multiplicia secundum numeros attributæ cuique gravitatis; quasi nempe in A duo puncta conjuncta sint, in B tria, in C quatuor, in D septem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

Si figura plana, vel linea in plano existens, aliter atque aliter suspendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis suæ distent; agitata motu in latus, sibi ipsi isochrona est[1]).

[Fig. 88]



Sit [Fig. 88] figura plana, vel linea in plano existens ABC, cujus centrum gravitatis D. quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano describatur, ECF. Dico, si à quovis in illa puncto, ut E, C, vel G, suspensa figura agitetur in latus; sibi ipsi, sive eidem pendulo simplici, isochronam esse.

Sit prima suspensio ex E puncto, quando autem est extra figuram, ut hic, putandum est lineam EH, ex qua figura pendet, rigidam esse, atque immobiliter ipsi affixam.

Intelligatur figura ABC divisa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ sint; quas quidem manifestum est,

Du centre d'oscillation.

lorſque la figure oſcille latéralement toutes ces droites ſont perpendiculaires à l'axe d'oſcillation. Par conſéquent la ſomme des carrés de toutes ces perpendiculaires, diviſée par la droite ED multipliée par le nombre des particules dans leſquelles la figure eſt diviſée, conſtitue la longueur KL du pendule ſimple iſochrone avec la figure *). Mais lorſque la figure eſt ſuſpendue au point G, la longueur du pendule ſimple iſochrone eſt de nouveau trouvée en diviſant la ſomme des carrés des lignes qui relient les particules de la figure au point G par la droite GD multipliée par le nombre des particules *). Or, comme les points G et E ſe trouvent ſur une circonférence décrite du centre D, c.à.d. du centre de gravité de la figure ABC ou, ſi l'on veut, de celui de tous les centres des particules égales de la figure, la ſomme des carrés des lignes qui relient les dites particules au point G, ſera égale à la ſomme des carrés des lignes tirées des mêmes particules au point E *). Mais ces ſommes de carrés ſont, dans l'une et l'autre ſuſpenſion, appliquées à des grandeurs égales, ſavoir, dans le cas de la ſuſpenſion au point E, à la droite ED multipliée par le nombre de toutes les particules, et dans celui de la ſuſpenſion du point G, à la droite DG multipliée par le même nombre de particules. Il eſt donc évident que par cette dernière diviſion, ſavoir lorsque la ſuſpenſion eſt en G, la longueur du pendule iſochrone devient la même que dans le cas de la première ſuſpenſion, c.à.d. KL.

* Prop. 6 de cette Partie.

* Prop. 6 de cette Partie.

* Prop. précéd.

On démontrera de la même manière l'iſochroniſme avec le pendule KL lorſque la figure eſt ſuſpendue en C ou en un autre point quelconque de la circonférence ECF. La propoſition eſt donc établie.

PROPOSITION XIV.

Etant donnée une figure ſolide et une ligne droite de longueur indéterminée qui tombe en dehors de la figure ou bien qui la coupe, et la figure ayant été diviſée par la penſée en de très petites particules égales, à partir de chacune deſquelles on ſuppoſe des perpendiculaires abaiſſées ſur la dite droite, trouver la ſomme de tous leurs carrés, en d'autres termes trouver un plan dont la multiplication par le nombre des particules donne un produit égal à la dite ſomme des carrés [1]).

Soit donnée [Fig. 89] la figure ſolide ABCD et une ligne droite paſſant par le point E et ſuppoſée perpendiculaire au plan de cette page; cette ligne peut couper la figure ou tomber en entier hors d'elle. Étant ſuppoſé qu'à partir de chacune des très petites particules égales qui conſtituent le ſolide ABCD, telles que F, ſoit tirée une perpendiculaire ſur la droite donnée E, telle que FE, il faut maintenant trouver la ſomme de tous les FE^2.

Coupons la figure par le plan EAC paſſant par la dite ligne donnée et par le centre de gravité de la figure. Figurons-nous auſſi un deuxième plan paſſant par la même ligne donnée et par EG qui lui eſt perpendiculaire.

On ſait que le carré de chaque perpendiculaire abaiſſée d'une des dites particules ſur la ligne donnée paſſant par E, telle que FE, eſt égal à la ſomme des carrés des

quum moveatur figura motu in latus, esse ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, divisa per rectam ED, multiplicem secundum numerum particularum in quas figura divisa est, efficiunt longitudinem penduli simplicis, figuræ isochroni*, | quæ sit KL. Suspensâ autem figurâ ex puncto G, rursus longitudo penduli simplicis isochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G, per rectam GD, multiplicem secundum earundem particularum numerum*. Quum igitur puncta G & E sint in circumferentia descripta centro D, quod est centrum gravitatis figuræ ABC, sive centrum gravitatis punctorum omnium, quæ centra sunt particularum figuræ æqualium; erit proinde summa quadratorum à lineis, quæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis summæ quadratorum à lineis quæ ab iisdem particulis ducuntur ad punctum E*. Hæ vero quadratorum summæ, utraque suspensione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe, in suspensione ex E, ad rectam ED, multiplicem secundum numerum omnium particularum; in suspensione autem ex G, ad rectam DG, multiplicem secundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac posteriori, quum nempe suspensio est ex G, fieri longitudinem penduli isochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc est, eandem ipsi KL. De centro oscillationis (p. 113). * Prop. 6. huj. * Prop. 6. huj. * Prop. præced.

Eodem modo, si ex C, vel alio quovis puncto circumferentiæ ECF, figura suspendatur, eidem pendulo KL isochrona esse probabitur. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Datâ figurâ solidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; divisâque | figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, sive planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit[1]). (p. 114).

Sit data [Fig. 89] figura solida ABCD, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel secet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum ABCD constituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic FE, oporteat omnium quadratorum FE summam invenire.

Secetur figura plano EAC, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque EG, quæ ipsi est ad angulos rectos.

Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula di|ctarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, sicut FE, æquari quadratis duarum FG, FH, (p. 115).

[1]) Comparez le calcul des p. 473—474 du T. XVI de la longueur du pendule isochrone avec un ellipsoïde de révolution suspendu en un point situé sur le prolongement de son axe: on y trouve des figures auxiliaires analogues à celles dont il est question dans la Prop. XIV.

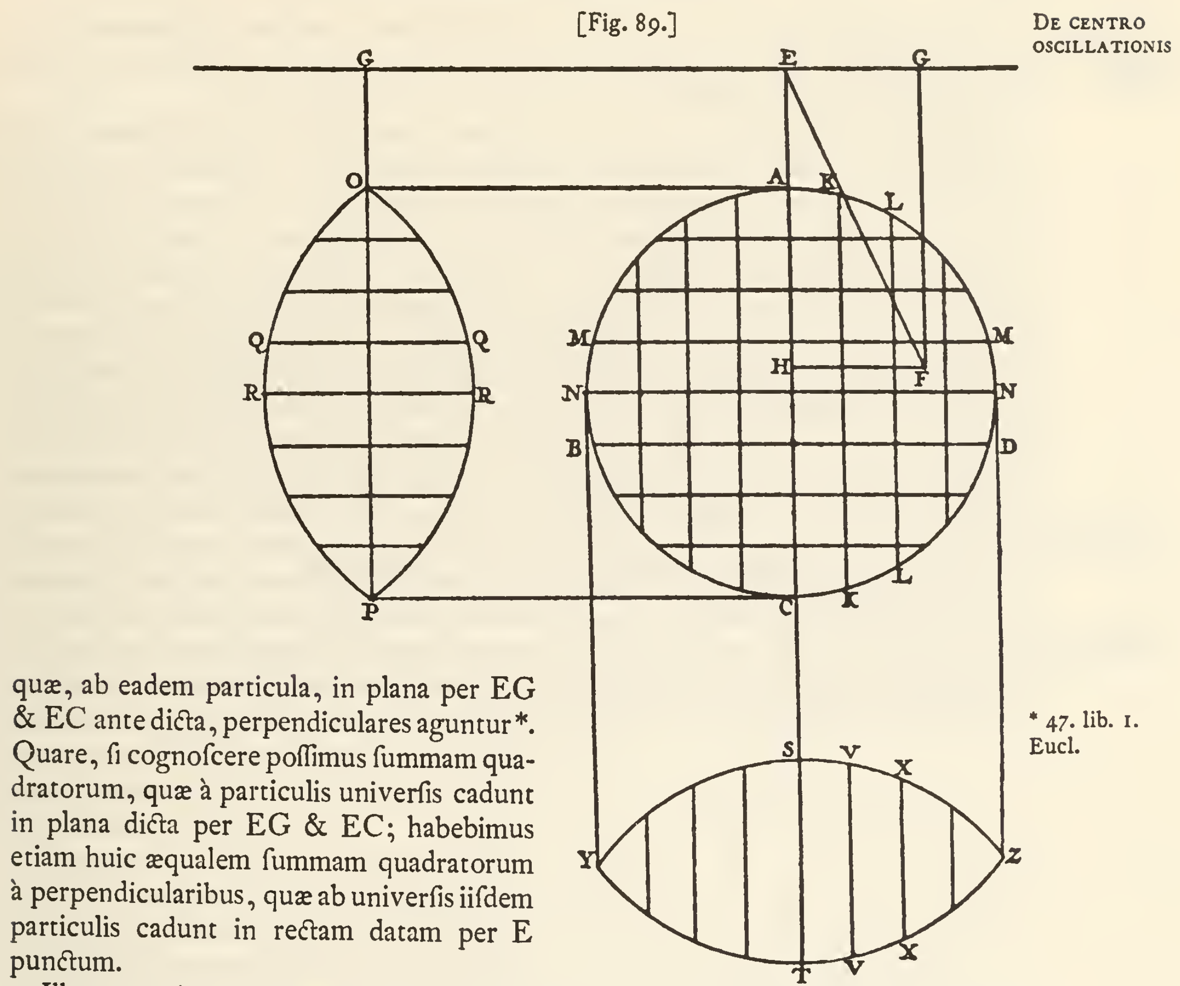
Du centre d'oscillation.
* 47. du livre I d'Eucl.

deux lignes FG et FH partant de la même particule et perpendiculaires respectivement aux plans mentionnés passant par EG et EC*). Par conséquent, si nous pouvons apprendre à connaître la somme des carrés de toutes les perpendiculaires menées des particules aux dits plans passant par EG et EC, nous aurons aussi, égale à l'ensemble de ces deux sommes, celle des carrés des perpendiculaires menées de toutes ces particules à la droite donnée passant par le point E.

Or, la première de ces deux sommes de carrés sera calculée comme suit. Considérons d'abord la figure plane OQP placée à côté de la figure solide ABCD, de la même hauteur qu'elle, et ainsi construite que lorsqu'on la coupe par les droites QQ, RR, correspondant aux plans MM, NN qui coupent la figure solide ABCD et parallèles à ces plans, le rapport de ces droites entre elles soit le même que celui de ces plans, bien entendu si l'on prend de part et d'autre les droites et les plans qui se correspondent. La ligne RR p.e. est à QQ, comme le plan NN à MM. Si l'on suppose donc la figure plane OQP divisée en autant de très petites particules égales qu'il y en a dans le solide ABCD, il y aura aussi dans chaque segment tel que QQRR de la figure plane un aussi grand nombre de particules qu'il y en a dans le segment correspondant MMNN de la figure solide; partant la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de toutes les particules de la figure OQP sur le plan EG sera égal à la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur le même plan EG de toutes les particules de la figure solide. Mais cette première somme de carrés sera connue, lorsque sera donné dans la figure OQL et son onglet ce que nous avons dit dans la Prop. IX de

[Fig. 89.]

De centro oscillationis



quæ, ab eadem particula, in plana per EG & EC ante dicta, perpendiculares aguntur*. Quare, si cognoscere possimus summam quadratorum, quæ à particulis universis cadunt in plana dicta per EG & EC; habebimus etiam huic æqualem summam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab universis iisdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

* 47. lib. 1. Eucl.

Illa vero prior quadratorum summa colligetur hoc modo. Ponatur primò figuram planam dari OQP, ad latus figuræ solidæ ABCD, ejusdem cum ipsa altitudinis, quæque sit ejusmodi, ut secta lineis rectis QQ, RR, quæ respondeant planis figuram solidam ABCD secantibus MM, NN, & his parallelis; eadem sit dictarum linearum inter se, quæ & planorum horum ratio, si nempe sumantur utrinque quæ in ordine sibi respondent. Ut si linea RR sit ad QQ quemadmodum planum NN ad MM. Quod si igitur figura plana OQP, in totidem particulas minimas æquales divisa intelligatur, quot intelliguntur in solido ABCD, erunt etiam in unoquoque segmento figuræ planæ, velut QQRR, tot numero particulæ, quot sunt in figuræ solidæ segmento MM NN, isti segmento respondente; ac proinde & summa quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ OQP in planum EG; æquabitur summæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ solidæ, in idem planum EG productis. Illa autem quadratorum summa data erit, si dentur in figura OQP, cuneoque

Du centre d'oscil-lation.

la préfente Partie être requis à ce but. Ces chofes étant données, la fomme des carrés des perpendiculaires abaiffées fur le plan EG de toutes les particules du folide ABCD fera donc auffi connue.

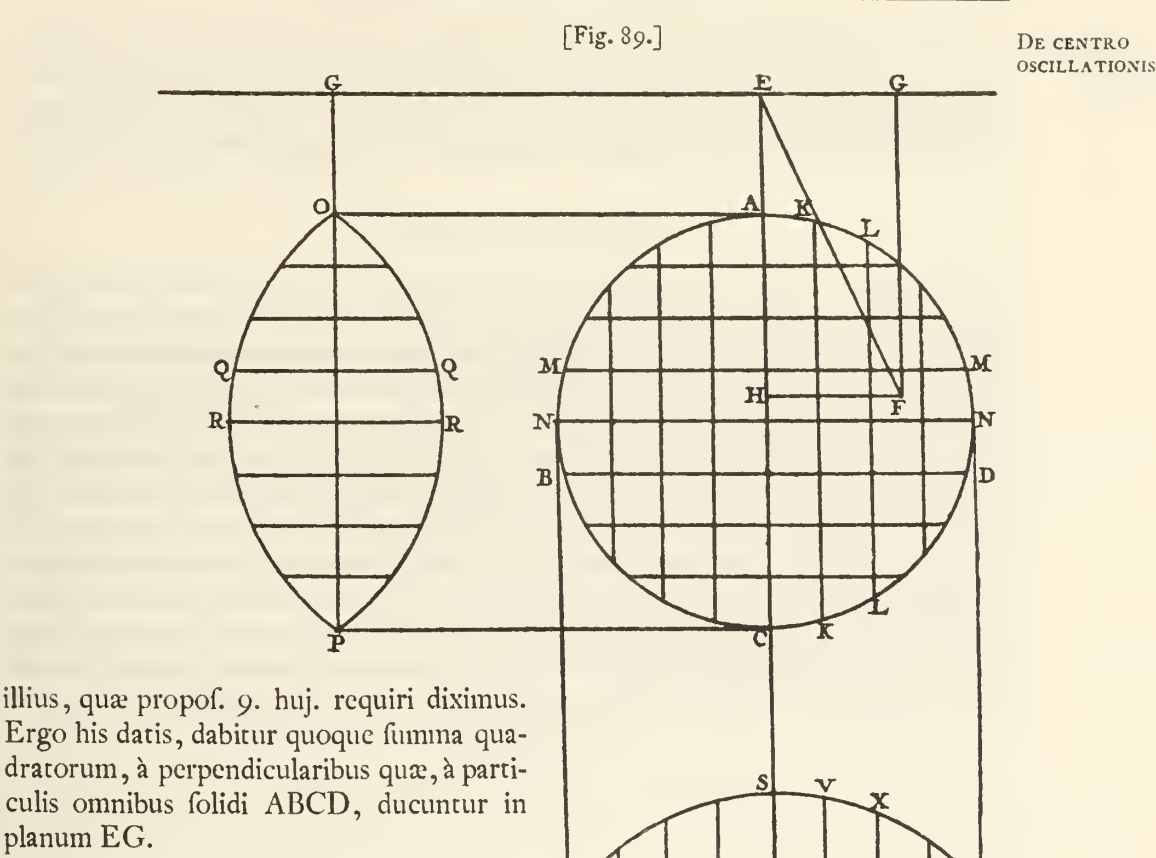
Confidérons maintenant une deuxième figure plane SYTZ de même largeur que le folide ABCD, c.à.d. comprife entre les plans tangents BY, DZ du folide, parallèle au plan EAC et ainfi conftruite que lorsqu'elle eft coupée par les lignes droites VV, XX, etc. correfpondant aux plans KK, LL, etc. qui coupent la figure ABCD et parallèles à ces plans, les rapports de ces lignes et des plans correfpondants foient égaux. Derechef la fomme des carrés des perpendiculaires abaiffées des particules de la figure SYTZ fur la droite ST fera égale à celle des carrés de toutes les perpendiculaires abaiffées fur le plan AC des particules du folide ABCD. Mais la fomme des premiers carrés fera donnée lorfque la diftance du centre de gravité de la figure STYZ de la droite BY ou DZ eft connue ainfi que la diftance à une de ces mêmes droites du centre de gravité de l'onglet correfpondant limité par un plan paffant par la même droite *). Ou bien, fi la figure SYTZ a une forme fymétrique et que ST repréfente fon axe, la même fomme des carrés fera donnée fi l'on connaît la diftance à l'axe ST du centre de gravité de la demi-figure SZT ainfi que la diftance à cet axe du centre de gravité de l'onglet coupé fur la même demi-figure par un plan paffant par l'axe *). Par conféquent, ceci étant donné, on connaîtra auffi la fomme des carrés des perpendiculaires abaiffées par hypothèfe fur le plan EAC de toutes les particules du folide ABCD. Mais nous avons trouvé auparavant la fomme des carrés de toutes les

* Prop. 9 de cette Partie.

* Prop. 11 de cette Partie.

[Fig. 89.]

DE CENTRO OSCILLATIONIS



illius, quæ propof. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque fumma quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus folidi ABCD, ducuntur in planum EG.

Ponatur nunc alia item figura plana SYTZ, ejufdem cum folido ABCD latitudinis, hoc eft, quam includant plana BY, DZ folidum contingentia, ac parallela plano EAC, quæque fit ejufmodi, ut, fecta lineis rectis VV, XX &c. quæ refpondeant planis figuram ABCD fecantibus, KK, LL, & his parallelis, faciat eandem inter fe rationem linearum harum atque illorum planorum, fi fumantur quæ fibi mutuo refpondent. Itaque rurfus quadrata fimul omnia perpendicularium, à particulis figuræ SYTZ in rectam ST cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis folidi ABCD, ducuntur in planum AC. Illorum autem fumma quadratorum data erit, fi detur diftantia centri gravitatis figuræ SYTZ ab recta BY vel DZ; nec non diftantia indidem centri gravitatis cunei fui abfciffi plano per eandem rectam *. Vel, figura SYTZ ordinata exiftente, ut ST fit axis ejus, eadem quadratorum fumma dabitur, fi detur diftantia centri gravitatis figuræ dimidiæ SZT ab axe ST, item centri gra|vitatis cunei, fuper eadem dimidia figura, abfciffi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque fumma quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus folidi ABCD, ductæ intelliguntur in planum

* Prop. 9. huj.

(p. 116).

* Prop. 11. huj.

Du centre d'oscillation.

perpendiculaires abaiſſées ſur le plan EG. Nous connaîtrons donc auſſi l'enſemble de ces deux ſommes, c.à.d. d'après ce qui a été démontré plus haut, la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées de toutes les particules du ſolide ABCD ſur la ligne droite paſſant par E et perpendiculaire au plan de cette page. C'eſt ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XV.

Les mêmes choſes étant poſées, ſi le ſolide ABCD *eſt de telle nature que la figure plane* SYTZ [*Fig.* 89] *qui lui eſt proportionnelle, n'a pas une diſtance connue de ſon centre de gravité aux tangentes* BY *ou* DZ, *ou bien que la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur elle par un plan paſſant par ces mêmes droites* BY *ou* DZ *eſt inconnue, mais que dans la figure* OQP *placée à côté d'elle la diſtance* ΦP [*Fig.* 90] *du centre de gravité de la demi-figure* OPV *à l'axe* OP *eſt donnée; il ſera poſſible en partant de là de trouver la ſomme des carrés des diſtances des particules du ſolide* ABCD *au plan* EC. *Mais il faut que toutes les ſections* NN, MM *ſoient des plans ſemblables et que le plan* EC *paſſe par les centres de gravité d'eux tous; il en eſt ainſi dans le cas du priſme, de la pyramide, du cône, des conoïdes et de beaucoup d'autres figures. Il eſt encore néceſſaire que l'on connaiſſe les diſtances du centre de gravité de ces plans à des tangentes parallèles à l'axe d'oſcillation ainſi que les ſubcentriques des onglets coupés ſur eux par des plans paſſant par les mêmes tangentes* [1]).

---

[1]) En 1665 Huygens, dans le calcul de la longueur du pendule isochrone avec un segment d'hyperboloïde de révolution se servit déjà de cette Proposition, ou plutôt de la forme spéciale qu'elle prend lorsque le corps considéré est de révolution. Voir les p. 371—373 et 554—555 du T. XVI.

EAC. Invenimus autem & ſummam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per EG ductis. Ergo & aggregatum utriuſque ſummæ habebitur, hoc eſt, per ſuperius oſtenſa, ſumma quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus ſolidi ABCD, cadunt in rectam datam per E tranſeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum. DE CENTRO OSCILLATIONIS

PROPOSITIO XV.

Iisdem poſitis, ſi ſolidum ABCD [Fig. 89] *ſit ejusmodi, ut figura plana* SYTZ, *ipſi proportionalis, non habeat notam diſtantiam centri gravitatis à tangentibus* BY *vel* DZ, *vel, ut ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per eaſdem* BY *vel* DZ, *ignoretur; in figura tamen proportionali, quæ à latere eſt,* OQP, *detur diſtantia* ΦP [Fig. 90], *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* OPV *abeſt ab axe* OP; *licebit hinc invenire ſummam quadratorum à diſtantiis particularum ſolidi* ABCD *à plano* EC. *Oportet autem ut ſectiones omnes,* NN, MM, *ſint plana ſimilia; utque per omnium centra gravitatis tranſeat planum* EC; *quemadmodum in priſmate, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figuris contingit. Atque eorum planorum diſtantias centri gravitatis, ſuper tangentibus axi oſcillationis parallelis, datas eſſe neceſſe eſt; uti & ſubcentricas cuneorum, qui ſuper ipſis abſcinduntur, ductis planis per easdem tangentes* [1]).

[Fig. 90.]

Du centre d'oscillation.

Par exemple, ſi BD [Fig. 90] eſt la plus grande des dites ſections, et qu'on conſidère en B une droite parallèle à l'axe E, c.à.d. perpendiculaire au plan qu'on voit ici, il faut que l'on connaiſſe la diſtance BD du centre de gravité de la ſection à la dite ligne en B, laquelle ſoit BC; et de même la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur la ſection BD par le plan paſſant par la même ligne en B, laquelle ſubcentrique ſoit BK.

Car, ces choſes étant données et PV étant diviſée en deux parties égales en Δ, ſi l'on fait que comme Δ P eſt à P Φ, ainſi ſoit le rectangle BCK à un certain eſpace Z; je dis que celui-ci, multiplié par le nombre des particules du ſolide ABCD, eſt égal à la ſomme cherchée des carrés des diſtances des mêmes particules au plan EC.

En effet, il eſt certain que la ſomme des carrés des diſtances des particules de la ſection plane BD au plan EC paſſant par ſon centre de gravité, ou bien celle des carrés des diſtances au même plan des particules ſolides du ſegment BNND, eſt égale au rectangle BCK multiplié par le nombre des dites particules *). Pareillement, ſi NX eſt la diſtance du centre de gravité de la ſection plane NN à la droite que nous ſuppoſons paſſer par N parallèlement à l'axe E, et que NF repréſente la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur cette ſection par un plan paſſant par la même droite; les carrés des diſtances au plan EC des particules planes de la ſection NN, ou bien les carrés des diſtances au même plan des particules ſolides du ſegment NMMN, ſeront égaux au rectangle NXF multiplié par le nombre des particules de la ſection NN ou du ſegment NMMN. Or, BD eſt diviſée en C et K, de la même manière que NN l'eſt en X et F. Par conſéquent le rectangle BCK eſt au rectangle NXF comme BD^2 eſt à NN^2.

* Prop. 10 de cette Partie.

Nous ſavons que le nombre des particules de la ſection BD eſt à celui des particules de la ſection NN comme ces ſections ſont entre elles, c.à.d. comme BD^2 eſt à NN^2. Par conſéquent le rectangle BCK, multiplié par le nombre des particules de la ſection BD, eſt au rectangle NXF multiplié par le nombre des particules de la ſection NN, comme BD^4 eſt à NN^4, en d'autres termes, comme VV^2 eſt à RR^2 dans la figure proportionnelle. Par conſéquent la première ſomme des carrés des diſtances des particules du ſegment BNND au plan EC eſt à la deuxième ſomme des carrés des diſtances des particules du ſegment NMMN comme VV^2 eſt à RR^2. Et l'on démontrera de la même manière que les ſommes des carrés des diſtances des particules dans les autres ſegments du ſolide ABCD ſont entre elles dans le rapport des carrés des droites de la figure OVV qui correſpondent à la baſe de chaque ſegment. C'eſt pourquoi la ſomme des carrés des diſtances au plan EC des particules de tous les ſegments du ſolide ABCD ſera à la ſomme des carrés des diſtances des particules d'un nombre égal de ſegments égaux au plus grand ſegment, c.à.d. des ſegments du cylindre ou priſme BDSS, ayant la même baſe et la même hauteur que le ſolide ABCD, comme la ſomme des carrés des droites VV, RR, QQ, etc. eſt à un nombre égal de carrés de droites toutes égales à la plus grande VV, c.à.d. comme le ſolide OVV de révolution autour de l'axe OP eſt au cylindre VVΩΩ ayant la même baſe et la même hauteur. Or, il eſt clair que ce rapport du ſolide OVV au cylindre VVΩΩ ſe compoſe

Veluti, si maxima dictarum sectionum sit BD, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc est, erecta ad planum quod hic conspicitur, oportet datam esse distantiam centri gr. sectionis BD à dicta linea in B, quæ sit BC, itemque subcentricam cunei, super sectione BD abscissi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ subcentrica sit BK. De centro oscillationis

Etenim his datis, divisâque PV bifariam in Δ, si fiat sicut ΔP ad | PΦ, ita rectangulum BCK ad spatium quoddam Z; dico hoc ipsum, multiplex per numerum particularum solidi ABCD, æquari summæ quæsitæ quadratorum, à distantiis earundem particularum à plano EC. (p. 117).

Quadrata enim à distantiis particularum planæ sectionis BD, à plano EC, quod per centrum gravitatis suæ transit; sive quadrata à distantiis particularum solidarum segmenti BNND à plano eodem, æquari constat rectangulo BCK, multiplici per numerum dictarum particularum*. Similiter, si planæ sectionis NN distantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, sit NX; subcentrica vero cunei super ipsa abscissi, plano per eandem rectam, sit NF; erunt quadrata à distantiis particularum planarum sectionis NN à plano EC, sive quadrata à distantiis particularum solidarum segmenti NMMN, à plano eodem, æqualia rectangulo NXF, multiplici per numerum particularum ipsarum sectionis NN, vel segmenti NMMN. Est autem BD divisa similiter in C & K, atque NN in X & F. Ergo rectangulum BCK ad rectangulum NXF, sicut quadratum BD ad quadratum NN.

* Prop. 10. huj.

Est autem & numerus particularum sectionis BD, ad numerum particularum sectionis NN, sicut sectiones ipsæ; hoc est, sicut quadratum BD ad quadratum NN. Itaque rectangulum BCK, multiplex per numerum particularum sectionis BD, ad rectangulum NXF, multiplex per numerum particularum sectionis NN, dupli|catam habebit rationem quadrati BD ad quadratum NN; hoc est, eam quam quadratum VV ad quadratum RR, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior summa quadratorum, à distantiis particularum segmenti BNND à plano EC, ad summam alteram quadratorum, à distantiis particularum segmenti NMMN, ut qu. VV ad qu. RR. Eademque ratione ostendetur, summas quadratorum à distantiis particularum in reliquis segmentis solidi ABCD, esse inter se in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura OVV, quæ basi cujusque segmenti respondent. Quare summa quadratorum, à distantiis particularum omnium segmentorum solidi ABCD à plano EC, erit ad summam quadratorum, à distantiis particularum segmentorum totidem, maximo segmento æqualium, hoc est, cylindri vel prismatis BDSS, eandem cum solido ABCD basin altitudinemque habentis, sicut quadrata omnia rectarum VV, RR, QQ, &c. ad quadrata totidem maximo VV æqualia, hoc est, sicut solidum rotundum OVV circa axem OP, ad cylindrum VVΩΩ, qui basin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem solidi OVV ad cylindrum VVΩΩ, componi constat ex ratione planorum quorum (p. 118).

Du centre d'oscillation.

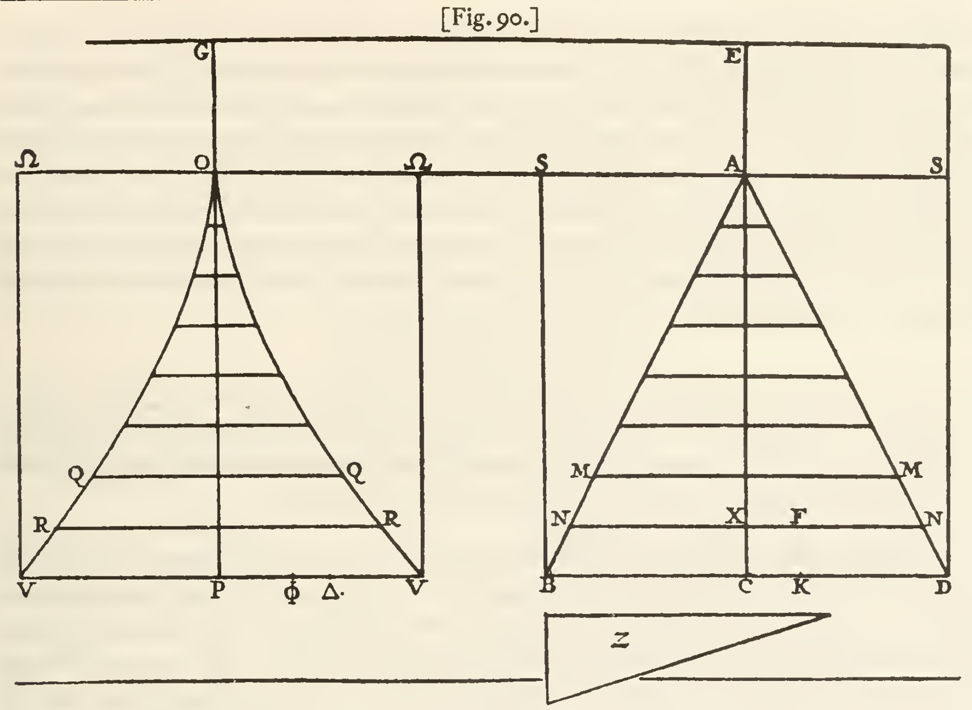
de la raifon des plans par la rotation defquels ils font engendrés, c.à.d. celle du plan OPV au rectangle PΩ, et de la raifon des diftances à l'axe OP des centres de gravité de ces plans, c.à.d. de celle de PΦ à PΔ. Et la première de ces raifons, favoir celle du plan OPV au rectangle PΩ, eft la même que celle du folide ABCD au cylindre ou prifme BDSS, c.à.d. la même que celle du nombre des particules du folide ABCD à celui des particules du cylindre ou prifme BDSS. Et l'autre raifon, celle de PΦ à PΔ eft la même, par conftruction, que celle de l'efpace Z au rectangle BCK. La dite fomme des carrés des diftances de toutes les particules du folide ABCD au plan EC a donc à la fomme des carrés des diftances de toutes les particules du cylindre ou prifme BDSS à ce même plan un rapport compofé de la raifon du nombre des particules du folide ABCD à celui des particules du cylindre ou prifme BDSS et de la raifon de l'efpace Z au rectangle BCK, en d'autres termes un rapport égal à celui du rectangle Z multiplié par le nombre des particules du folide ABCD au rectangle BCK multiplié par le nombre des particules du cylindre ou prifme BDSS. Mais la quatrième de ces grandeurs eft égale à la deuxième, c.à.d. le rectangle BCK multiplié par le nombre des particules du cylindre ou prifme BDSS eft égal à la fomme des carrés des diftances des particules de ce même prifme ou cylindre BDSS au plan EC, puifque ce rectangle BCK, multiplié par le nombre des particules du fegment BNND, eft égal à la fomme des carrés des diftances des particules de ce fegment au plan EC*). Par conféquent le troifième terme de la proportion fera auffi égal au premier; c.à.d. le plan Z, multiplié par le nombre des particules du folide ABCD, fera égal à la fomme des carrés des diftances des particules du même folide ABCD au plan EC*). C.Q.F.D.

* Prop. 10 de cette Partie.

* Prop. 14 du livre 5 d'Eucl.

[Fig. 90.]

De centro oscillationis



converſionegenerantur, hoc eſt, ex ratione plani OPV, ad rectangulum PΩ, & ex ratione diſtantiarum quibus horum planorum centra gravitatis abſunt ab axe OP; hoc eſt, & ex ratione PΦ ad PΔ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani OPV ad rectangulum PΩ, eadem eſt quæ ſolidi ABCD ad cylindrum vel priſma BDSS, hoc eſt, eadem quæ numeri particularum ſolidi ABCD, ad numerum particularum cylindri vel priſmatis BDSS. Altera vero ratio, nempe PΦ ad PΔ, eſt eadem, ex conſtructione, quæ ſpatii Z ad rectangulum BCK. Habebit itaque dicta ſumma quadratorum, à diſtantiis omnium particularum ſolidi ABCD à plano EC, ad ſummam quadratorum, à diſtantiis omnium particularum cylindri vel priſmatis BDSS ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum ſolidi ABCD, ad nnmerum particularum cylindri vel priſmatis BDSS, & ex ratione ſpatii Z ad rectangulum BCK: hoc eſt, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi ABCD, ad rectangulum BCK, multiplex per numerum particularum cylindri vel priſmatis BDSS. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis eſt ſecundæ; nempe rectangulum BCK, multiplex per numerum particularum cylindri vel priſmatis BDSS, æquale ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ejuſdem priſmatis vel cylindri BDSS à plano EC; ſiquidem rectangulum idem BCK, multiplex | per numerum particularum ſegmenti BNND, æquatur quadratis diſtantiarum particularum ejuſdem ſegmenti à plano EC*. Ergo & tertia primæ æquabitur, nempe planum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi ABCD, ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ſolidi ejuſdem ABCD à plano EC*. quod erat demonſtrandum.

(*p.* 119).

* Prop. 10. huj.

* Prop. 14. lib. 5. Eucl.

Du centre d'oscillation.

Il faut encore remarquer que lorſque le ſolide ABD eſt de révolution autour de l'axe AC, le rectangle BCK devient toujours égal au quart de BC^2, puiſque la ſubcentrique BK de l'onglet coupé ſur le cercle BD par un plan paſſant par la tangente en B eſt égale à $\frac{5}{4}$ fois le rayon BC [1]). Par conſéquent, ſi PV eſt priſe égale à BC, il s'enſuit, ſi l'on veut que $P\Delta$ ſoit à $P\Phi$ comme le rectangle BCK, c.à.d. le quart du carré de BC ou bien $P\Delta^2$, eſt à un autre plan Z, que ce dernier ſera égal au rectangle $\Delta P\Phi$. Il s'enſuit donc auſſi que ce rectangle $\Delta P\Phi$, multiplié par le nombre des particules du ſolide ABD, ſera égal à la ſomme cherchée des carrés de toutes les perpendiculaires abaiſſées de ces particules ſur le plan EC.

PROPOSITION XVI.

Lorſqu'une figure quelconque, ligne, ſurface ou ſolide, eſt diverſement ſuſpendue et oſcille autour d'axes parallèles les uns aux autres et également diſtants du centre de gravité de la figure, celle-ci eſt iſochrone avec elle-même [2]).

Conſidérons une grandeur quelconque [Fig. 91] dont E ſoit le centre de gravité; qu'elle ſoit d'abord ſuſpendue à un axe paſſant par le point F et perpendiculaire au plan de cette page. Ce dernier ſera donc le plan d'oſcillation. Si l'on décrit dans ce plan du centre E, avec le rayon EF, la circonférence FHG et qu'ayant pris ſur elle un point quelconque tel que H, on ſuppoſe en ſecond lieu que la grandeur ſoit ſuspendue à un axe paſſant par ce point et oſcille autour de lui, le plan d'oſcillation demeurant le même, je dis qu'elle ſera iſochrone avec elle-même oſcillant autour de l'axe F.

En effet, ſuppoſons la grandeur conſidérée diviſée en particules égales et fort petites. Il eſt donc manifeſte que, comme le plan d'oſcillation demeure le même dans les deux ſuſpenſions à l'égard des parties de la grandeur, les perpendiculaires qu'on peut abaiſſer de toutes les particules de la grandeur ſur le dit plan d'oſcillation auront leurs pieds aux mêmes endroits dans l'une et l'autre ſuſpenſion. Soient ces endroits les points marqués dans l'eſpace ABCD.

Comme donc E eſt le centre de gravité de la grandeur propoſée et que celle-ci garde par conſéquent dans n'importe quelle poſition l'équilibre autour de l'axe qui eſt érigé à travers le point E perpendiculairement au plan ABCD, on voit aiſément que ſi une gravité égale eſt attribuée à tous les points marqués dans l'eſpace ABCD dont nous venons de parler, le point E ſera auſſi le centre de gravité de tous ces points-là. Mais ſi, comme il peut arriver, pluſieurs perpendiculaires coïncident en certains points, ceux-ci doivent être conſidérés comme doublés autant de fois et leurs gravités comme autant de fois multiples. Lorſqu'on les enviſage de cette façon, il paraît que le point E eſt de nouveau leur centre de gravité.

---

1) Voir les p. 510—513 du T. XVI.

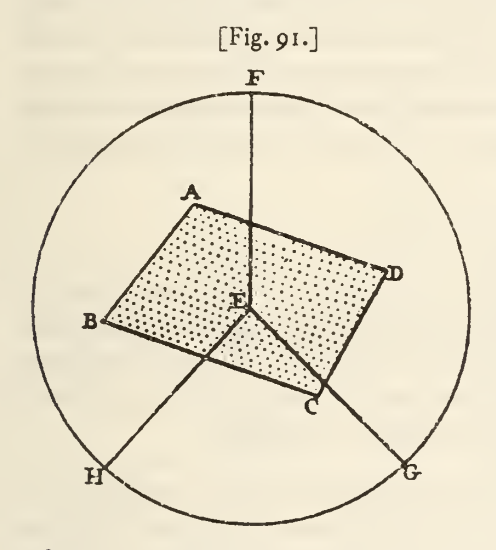
2) Comparez la p. 461 du T. XVI ainsi que la p. 34 de l'Avertissement qui précède.

Notandum vero, quando ſolidum ABD rotundum eſt circa axem AC, fieri ſemper rectangulum BCK æquale quartæ parti quadrati BC; quoniam ſubcentrica cunei, abſciſſi ſuper circulo BD, plano per tangentem in B, nempe recta BK, æquatur $\frac{5}{4}$ radii BC. Unde, ſi PV æqualis poſita ſit BC, ſequitur, faciendo ut PΔ ad PΦ ita rectangulum BCK, hoc eſt, $\frac{1}{4}$ quadrati BC, hoc eſt, qu PΔ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo ΔPΦ æquale. Ac proinde tunc ipſum rectangulum ΔPΦ, multiplex ſecundum numerum particularum ſolidi ABD, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iisdem cadunt in planum EC. DE CENTRO OSCILLATIONIS

PROPOSITIO XVI.

Figura quævis, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur, agiteturque ſuper axibus inter ſe parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochrona eſt[2]).

[Fig. 91.]



Proponatur magnitudo quævis [Fig. 91], cujus centrum gravitatis E punctum, ſitque primo ſuſpenſa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oſcillationis. In quo ſi centro E, radio EF, deſcribatur circumferentia FHG, ſumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo ſecundò ſuſpendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oſcillationis plano. Dico iſochronam fore ſibi ipſi agitatæ circa axem in F.

Intelligatur enim dividi magnitudo propoſita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa ſuſpenſione idem manet oſcillationis planum, reſpectu partium magnitudinis; manifeſtum eſt, ſi ab omnibus particulis, in quas diviſa eſt magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oſcillationis planum, illas utraque ſuſpenſione occurrere ipſi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in ſpatio ABCD. (p. 120).

Quum igitur E ſit centrum gravitatis magnitudinis propoſitæ, ipſaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus eſt ad planum ABCD, quovis ſitu æquilibrium ſervet; facile perſpicitur, quod ſi punctis omnibus ante dictis, quæ in ſpatio ABCD ſignantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum eſt punctum E. Quod ſi vero, ut fieri poteſt, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidant, illa puncta quaſi toties geminata intelligenda ſunt, gravitateſque toties multiplices accipiendæ. Atque ita conſideratorum, patet rurſus centrum gravitatis eſſe E punctum.

Du centre d'oscillation.

Il eſt maintenant évident que la ſomme des carrés des droites qui relient tous les dits points au point F eſt égale à la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées de toutes les particules de la grandeur propoſée ſur l'axe d'oſcillation paſſant par F, attendu que les lignes dont nous conſidérons ici les carrés ont dans l'un et l'autre cas les mêmes longueurs. Pareillement, lorſque la grandeur conſidérée eſt ſuſpendue à un axe paſſant par H, il apparaît que la ſomme des carrés des droites qui relient au point H tous les points marqués dans l'eſpace ABCD eſt égale à celle des carrés des perpendiculaires abaiſſées de toutes les particules de la grandeur propoſée ſur l'axe d'oſcillation paſſant par H. Par conſéquent ſi, dans l'un et l'autre cas, la ſomme des carrés des droites qui relient tous les points ſuſdits aux points F ou H eſt diviſée par les droites EF ou EH, multipliées chacune par le nombre des particules dans leſquelles la grandeur propoſéé eſt diviſée par hypothèſe, de cette diviſion réſultera la longueur d'un pendule ſimple iſochrone avec la grandeur ſuſpendue en F ou H. Or, la ſomme des carrés eſt égale dans les deux cas* et les droites EF, EH ſont auſſi égales entre elles, et le nombre des particules eſt le même. Par conſéquent, comme les dénominateurs et les numérateurs des deux expreſſions conſidérées ſont égaux, les longueurs réſultant de la diviſion le ſeront auſſi, c.à.d. il y aura égalité des deux pendules iſochrones avec la grandeur propoſée ſuſpendue d'abord en F puis en H. La propoſition eſt donc établie.

* Prop. 12 de cette Partie.

PROPOSITION XVII.

Étant donné un plan qui, multiplié par le nombre des particules dans leſquelles la figure ſuſpendue eſt diviſée par la penſée, donne un produit égal à la ſomme des carrés des diſtances de l'axe d'oſcillation, la longueur du pendule ſimple iſochrone avec la figure réſultera de la diviſion de ce plan par une droite égale à la diſtance de l'axe d'oſcillation au centre de gravité de la grandeur ſuſpendue.

Soit ABC [Fig. 92] la figure à centre de gravité E ſuſpendue à un axe paſſant par le point F perpendiculairement au plan qui eſt vu ici. Et ſuppoſant la figure diviſée en particules égales fort petites, de chacune deſquelles on doit ſe figurer qu'une perpendiculaire a été abaiſſée ſur le dit axe, ſoit trouvé, d'après les règles ſus-énoncées, le plan H qui, multiplié par le nombre des dites particules, donne un produit égal à la ſomme des carrés de toutes ces perpendiculaires. Que la diviſion du plan H par la droite FE donne la longueur FG. Je dis que celle-ci repréſente la longueur du pendule ſimple exécutant des oſcillations iſochrones avec celles de la grandeur ABC autour de l'axe F.

Porrò ſummam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F, eandem eſſe patet cum ſumma quadratorum ab iis rectis, quæ à ſingulis particulis magnitudinis propoſitæ ducuntur perpendiculares in axem oſcillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipſæ, quarum quadratra intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum ſuſpenſio eſt ex axe per H, patet ſummam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in ſpatio ABCD ſignatis, ducuntur ad punctum H, eandem eſſe cum ſumma quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propoſitæ, ducuntur perpendiculares in axem oſcillationis per H tranſeuntem. Ergo utroque caſu, ſi ſumma quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas EF vel EH, multiplices ſecundum numerum particularum in quas magnitudo propoſita diviſa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo penduli ſimplicis, quod magnitudini ſuſpenſæ ex F vel H iſochronum ſit. Eſt autem ſumma quadratorum utroque caſu æqualis *; & rectæ quoque EF, EH, inter ſe æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales ſint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc eſt, longitudines pendulornm iſochronorum magnitudini propoſitæ ſuſpenſæ ex F vel ex H. Quare conſtat propoſitum.

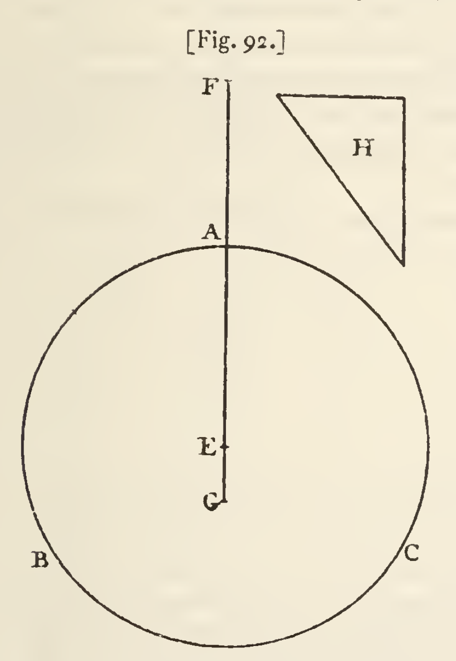
De centro oscillationis

* Prop. 12. huj.

PROPOSITIO XVII.

(*p.* 121).

[Fig. 92.]



Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas ſuſpenſa figura diviſa intelligitur, æquetur quadratis omnium diſtantiarum ab axe oſcillationis; ſi illud applicetur ad rectam æqualem diſtantiæ inter axem oſcillationis & centrum gravitatis ſuſpenſæ magnitudinis, orietur longitudo penduli ſimplicis ipſi iſochroni.

Sit figura ABC [Fig. 92], cujus centrum gravitatis E, ſuſpenſa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conſpicitur, erectus ſit. Ponendoque diviſam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: eſto, per ſuperius oſtenſa, inventum planum H, cujus multiplex per numerum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam FE, fiat longitudo FG. Dico hanc eſſe longitudinem penduli ſimplicis, iſochronas oſcillationes habentis magnitudini ABC, agitatæ circa axem per F.

Du centre d'oscillation.
* Prop. 6 de cette Partie.

En effet, comme la ſomme des carrés des diſtances de l'axe F, diviſée par la diſtance FE multipliée par le nombre des particules, conſtitue la longueur du pendule ſimple iſochrone*, et qu'à cette ſomme de carrés multipliée par le même nombre, celui des particules, eſt égale par hypothèſe le plan H; il s'enſuit que ſi l'on diviſe le plan H multiplié par le nombre des particules, par la diſtance FE multipliée par le nombre des particules, ou bien, en omettant le facteur commun, ſi l'on diviſe le plan H par la diſtance FE, il en réſultera auſſi la longueur du pendule ſimple iſochrone. Il apparaît donc que cette longueur eſt FG, comme nous l'avions dit. C.Q.F.D.

PROPOSITION XVIII.

Si l'eſpace plan qui, multiplié par le nombre des particules de la grandeur ſuſpendue, eſt égal à la ſomme des carrés des diſtances à l'axe de gravité (parallèle à l'axe d'oſcillation), eſt diviſé par une droite égale à la diſtance des deux axes nommés, il en réſultera une droite égale à l'intervalle, duquel le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité de la même grandeur [1]).

Soit ABCD [Fig. 93] une grandeur à centre de gravité E, qui ait le centre d'oscillation G lorſqu'elle eſt ſuſpendue à un axe paſſant par le point F perpendiculairement au plan de cette page. Figurons-nous de plus un autre axe parallèle à celui paſſant par F et traverſant le centre de gravité E. Et la grandeur ayant été diviſée par la penſée en de très petites particules égales, ſoit le plan I multiplié par le nombre de ces particules égal à la ſomme des carrés des diſtances au dit axe paſſant par E. La diviſion du plan I par la diſtance FE nous donne une certaine droite. Je dis qu'elle eſt égale à l'intervalle EG duquel le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité de la grandeur ABCD.

En effet, qu'on ſe figure pour que notre démonſtration de cette propoſition ſoit

[1]) Cette Proposition ne se trouve pas encore dans les travaux de 1664—1665 (T. XVI) ni dans les anagrammes envoyés à Londres en 1669 (T. VI, p. 487—489). La distance du centre de gravité au centre d'oscillation joue cependant un rôle important dans les calculs de 1664—1665; voir les p. 472, 474, 477, 508 et 551 du T. XVI, où nous avons désigné cette distance par l'expression „λ trunci" ou „λ cunei". Nous ignorons si Huygens eût pu formuler cette Proposition déjà en 1664; il ne connaissait peut-être la Prop. XIX qui suit que dans des cas particuliers (voir la note 1 de la p. 302).

Quia enim summa quadratorum, à distantiis ab axe F, applicata ad distantiam FE, multiplicem secundum partium numerum, facit longitudinem penduli simplicis isochroni*. Isti vero quadratorum summæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, si applicetur ad distantiam FE, multiplicem secundum particularum numerum; sive, omissa communi multiplicitate, si planum H applicetur ad distantiam FE; orietur quoque longitudo penduli simplicis isochroni. Quam proinde ipsam longitudinem FG esse constat. quod erat demonstrandum.

De centro oscillationis

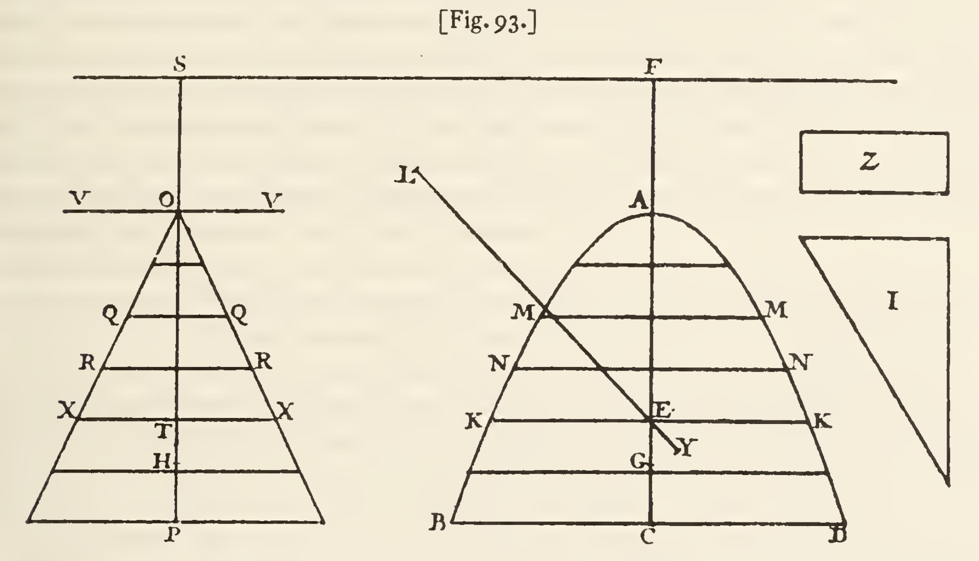
* Prop. 6. huj.

(p. 122).

PROPOSITIO XVIII.

Si spatium planum, cujus multiplex secundum numerum particularum suspensæ magnitudinis, æquetur quadratis distantiarum ab axe gravitatis, axi oscillationis parallelo; id, inquam, spatium si applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis ejusdem magnitudinis [1]).

[Fig. 93.]



Esto magnitudo ABCD [Fig. 93], cujus centrum gravitatis E; quæque suspensa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oscillationis G. Porrò axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E transiens, parallelus. Divisaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, sit quadratis distantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe secundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad distantiam FE, fiat recta quædam. Dico eam æqualem esse intervallo EG, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis magnitudinis ABCD.

Ut enim universali demonstratione quod propositum est comprehendamus: intelli-

Du centre d'oscillation.

universelle, une figure plane OQP analogue à la grandeur ABCD et placée à côté d'elle; il s'agit d'une figure qui, coupée par les mêmes plans horizontaux que la grandeur ABCD, ait ses segments, compris entre deux quelconques de ces plans, proportionnels aux segments correspondants de la dite grandeur. Supposons en outre chaque segment de la figure OQP divisé en un nombre de particules égales qui soit le même que celui du segment correspondant de la figure ABCD. Or, on peut se figurer cette construction exécutée quelle que soit la grandeur ABCD, en d'autres termes que ce soit une ligne, une surface ou un corps solide. Il est évident que toujours le centre de gravité T de la figure OQP est situé à la même hauteur que celui de la grandeur ABCD, et que par conséquent, si le plan horizontal passant par F coupe la ligne du centre [1]) de la figure OQP par exemple en S, les distances ST et FE sont égales.

Au reste il est constant que les carrés des distances de l'axe d'oscillation F, divisés par la distance FE multipliée par le nombre des particules, donnent la longueur du pendule isochrone *, que nous avons appelée FG. Or, on voit aisément que la somme de ces carrés est égale aux carrés des distances au plan horizontal passant par F plus les carrés des distances au plan vertical FE passant par l'axe F et le centre de gravité E *). Mais les carrés des distances de la grandeur ABCD au plan horizontal passant par F sont égaux aux carrés des distances de la figure OQP à la droite SF. Lesquels carrés (si O est le point le plus haut de la figure OQP et OH la subcentrique de l'onglet coupé sur lui par un plan passant par la droite OV parallèle à SF) sont égaux à la somme du rectangle OTH et du carré ST, multipliés chacun par le nombre des particules de la dite figure *, c.à.d. de la grandeur ABCD. Or, les carrés des distances de la grandeur ABCD au plan FE sont toujours les mêmes, quelle que soit la distance de l'axe d'oscillation F au centre de gravité E; posons qu'ils soient égaux au produit d'un espace Z par le nombre des particules de la grandeur ABCD.

* Prop. 6 de cette Partie.

* Prop. 47 du livre 1 d'Eucl.

* Prop. 9 de cette Partie.

Par conséquent, comme les carrés des distances de la grandeur ABCD à l'axe d'oscillation F sont égaux au carré de ST plus le rectangle OTH plus le plan Z, multipliés chacun par le nombre des particules égales, si cette expression entière est divisée par la distance FE ou ST, il en résultera la longueur FG du pendule isochrone avec la grandeur ABCD *. Mais de la division de ST^2 per son côté ST, résulte ST ou FE elle-même. Le reste EG est donc le quotient du rectangle OTH augmenté du plan Z par la même longueur ST ou FE.

* Prop. 6 de cette Partie.

C'est pourquoi il reste à prouver que le rectangle OTH augmenté du plan Z est égal au plan I. En effet, ceci étant démontré, il sera établi que la division du plan I par la distance FE donne aussi une longueur égale à EG. Or, nous le prouverons comme suit. Le rectangle OTH, multiplié par le nombre des particules de la figure OQP ou de la grandeur ABCD, est égal aux carrés des distances de la figure de la droite XT * tirée par le centre de gravité T parallèlement à SF; il est donc aussi égal aux

* Prop. 10 de cette Partie.

[1]) Voir sur cette expression la Définition VII de la p. 246. Il n'est pas nécessaire que la figure OQP

gatur plana figura, magnitudini ABCD analoga, ad latus adpoſita, OQP; quæ nempe, ſecta planis horizontalibus iisdem cum magnitudine ABCD, habeat ſegmenta inter|cepta inter bina quæque plana, in eadem inter ſe ratione cum ſegmentis dictæ magnitudinis, quæ ipſis reſpondent; ſintque ſegmenta ſingula figuræ OQP, diviſa in tot particules æquales, quot continentur ſegmentis ipſis reſpondentibus in figura ABCD. Hæc autem intelligi poſſunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo ABCD, ſive linea, ſive ſuperficies, ſive ſolidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ OQP, quod ſit T, eadem altitudine eſſe manifeſtum eſt cum centro gravitatis magnitudinis ABCD; ideoque, ſi planum horizontale, per F ductum, ſecet lineam centri [1]) figuræ OQP, velut hic in S, æquales eſſe diſtantias ST, FE.

De centro oscillationis

(p. 123).

Porrò autem conſtat quadrata diſtantiarum, ab axe oſcillationis F, applicata ad diſtantiam FE, multiplicem ſecundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli iſochroni *; quæ longitudo poſita fuit FG. Illorum vero quadratorum ſummam, æqualem eſſe perſpicuum eſt, quadratis diſtantiarum à plano horizontali per F, unà cum quadratis diſtantiarum à plano verticali FE, per axem F & centrum gravitatis E ducto *. Atqui quadrata diſtantiarum maguitudinis ABCD à plano horizontali per F, æquantur quadratis diſtantiarum figuræ OQP ab recta SF. Quæ quadrata (ſi O ſit punctum ſupremum figuræ OQP, & OH ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per rectam OV, parallelam SF) æqualia ſunt rectangulo OTH & quadrato ST, multiplicibus ſecundum numerum particularum dictæ figuræ *, ſive magnitudinis ABCD. Quadrata vero diſtantiarum magnitudinis ABCD à plano FE, quantumcunque axis oſcillationis F diſtet à centro gravitatis E, ſemper eadem ſunt: quæ proinde putemus æquari ſpatio Z, multiplici ſecundum numerum particularum magnitudinis ABCD.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 47 lib. 1. Eucl.

* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata diſtantiarum magnitudinis ABCD, ab axe oſcillationis F, æquantur iſtis, quadrato nimirum ST, rectangulo OTH, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis; ſi applicentur hæc omnia ad diſtantiam FE ſive ST, orietur longitudo FG penduli iſochroni magnitudini ABCD *. Sed ex applicatione quadrati ST ad latus ſuum ST, orietur ipſa ST, ſive FE. Ergo reliqua EG eſt ea quæ oritur ex applicatione rectanguli OTH, & plani Z, ad eandem ST vel FE.

* Prop. 6. huj.

Quare ſupereſt ut demonſtremus rectangulum OTH, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim conſtabit, etiam planum I, applicatum ad diſtantiam FE, efficere longitudinem ipſi EG æqualem. Illud autem ſic oſtendetur. Rectangulum OTH, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ OQP, ſive magnitudinis AB|CD, æquatur quadratis diſtantiarum figuræ ab recta XT *, quæ per centrum gravitatis T ducitur

(p. 124).

* Prop. 10. huj.

ait une forme symétrique; en employant l'expression „linea centri" Huygens n'indique nullement que la figure doit avoir un axe de symétrie, comme le lui reprochent Heckscher et v. Oettingen dans la note 120 de leur traduction dans „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften".

Du centre d'oscillation.

carrés des diſtances de la grandeur ABCD au plan horizontal KK mené par le centre de gravité E, puiſque les diſtances ſont les mêmes dans l'un et l'autre cas. Mais le plan Z, multiplié par le même facteur, fut poſé égal aux carrés des diſtances de la grandeur ABCD au plan vertical FE. Et il eſt évident que ces carrés des diſtances au plan FE, augmentés des dits carrés des diſtances au plan horizontal paſſant par E, ſont égaux aux carrés des diſtances à l'axe de gravité paſſant par E parallèlement à l'axe F *. Par conſéquent le rectangle OTH augmenté du plan Z, multipliés l'un et l'autre par le nombre des particules de la grandeur ABCD, ſeront égaux aux carrés des diſtances de la même grandeur au dit axe paſſant par E. Mais le plan I lui auſſi, multiplié par le même nombre des particules, fut poſé égal à ces mêmes carrés des diſtances. Par conſéquent le plan I eſt égal à la ſomme du rectangle OTH et du plan Z. C'eſt ce qu'il reſtait à démontrer.

* Prop. 47 du livre 1 d'Eucl.

Cette propoſition fait voir de nouveau ce qui a été démontré dans la Prop. XVI, ſavoir qu'une grandeur quelconque eſt iſochrone avec elle-même lorſqu'elle eſt diverſement ſuſpendue et oſcille chaque fois autour d'un axe parallèle aux autres, tous les axes étant également diſtants du centre de gravité.

En effet, qu'une grandeur ABCD ſoit ſuſpendue à l'axe F ou bien à l'axe L qui lui eſt parallèle, il eſt évident que dans les deux cas les carrés des diſtances d'un axe parallèle aux axes F et L et paſſant par E ſont les mêmes. Par conſéquent le plan I dont le produit par le nombre des particules eſt égal à la ſomme des carrés, ſera le même dans l'un et l'autre cas. Mais ce plan, diviſé par la diſtance du centre de gravité à l'axe d'oſcillation, laquelle eſt par hypothèſe la même dans les deux cas, donne la diſtance de laquelle le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité; cette diſtance ſera donc la même dans les deux cas. Par exemple, ſi dans le cas de la ſuſpenſion en L la dite diſtance eſt EY, celle-ci ſera égale à EG et la droite entière YL à GF. Pour les deux ſuſpenſions le même pendule ſimple ſera donc iſochrone avec la grandeur ABCD.

PROPOSITION XIX.

Lorſqu'une même grandeur oſcille, la ſuſpenſion étant tantôt plus courte et tantôt plus longue, les diſtances des centres d'oſcillation au centre de gravité, qui reſte le même, ſeront inverſement proportionnelles aux diſtances des axes d'oſcillation à ce centre de gravité [1]).

Suppoſons qu'une grandeur à centre de gravité A [Fig. 94] ſoit d'abord ſuſpendue et agitée autour d'un axe B, enſuite autour d'un axe C, et que le centre d'oſcillation ſoit D dans le premier cas, E dans le ſecond. Je dis qu'on a BA : CA = EA : DA.

En effet, comme dans le cas de la ſuſpenſion en B la diſtance AD, de laquelle le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité, eſt obtenue en diviſant par la diſtance BA un eſpace dont le produit par le nombre des très petites particules éga-

[1]) C'est la Proposition de la note 2 de la p. 528 du T. XVI, où elle n'est cependant formulée

ipſi SF parallela; ac proinde etiam quadratis diſtantiarum magnitudinis ABCD, à plano horizontali KK, ducto per centrum gravitatis E; cum diſtantiæ utrobique ſint eædem. At vero planum Z, ſimiliter multiplex, æquale poſitum fuit quadratis diſtantiarum magnitudinis ABCD à plano verticali FE. Ac patet quidem quadrata hæc diſtantiarum à plano FE, una cum dictis quadratis diſtantiarum à plano horizontali per E, æqualia eſſe quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis per E, qui ſit axi F parallelus *. Itaque rectangulum OTH una cum plano Z, multiplicia ſecundum numerum particularum magnitudinis ABCD, æqualia erunt quadratis diſtantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex ſecundum eundem particularum numerum, æquale poſitum fuit iisdem diſtantiarum quadratis. Ergo planum I æquale eſt rectangulo OTH & plano Z ſimul ſumptis. quod oſtendendum ſupererat.

De centro oscillationis

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

Hinc rurſus manifeſtum fit, quod propoſitione 16 demonſtratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, ſi aliter atque aliter ſuſpendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis ſuæ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochronam eſſe.

Sive enim magnitudo ABCD ſuſpendatur ab axe F, ſive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique eſſe quadrata diſtantiarum ab axe per E, qui ſit axibus F vel L parallelus. Unde & planum I, cujus multiplex, ſecundum numerum particularum, æquatur quadratorum ſummæ, utroque caſu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad diſtantiam centri gravitatis ab axe oſcillationis, quæ utroque caſu eadem ponitur, efficit diſtantiam qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis; Ergo etiam hæc diſtantia utroque caſu eadem erit. Velut ſi, facta ſuſpenſione ex L, fuerit dicta diſtantia EY, erit ipſa æqualis EG; & tota YL æqualis GF; adeoque, in ſuſpenſione utraque, idem pendulum ſimplex iſochronum ſit magnitudini ABCD.

[Fig. 94.]

PROPOSITIO XIX.

Si magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius ſuſpenſa, agitetur; erunt, ſicut diſtantiæ axium oſcillationis à centro gravitatis inter ſe, ita contraria ratione diſtantiæ centrorum oſcillationis ab eodem gravitatis centro [1]).

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, ſuſpenſa primum atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; ſitque in prima | ſuſpenſione centrum oſcillationis D, in poſteriori vero centrum oſcillationis E. Dico eſſe ut BA ad CA ita EA ad DA. (*p.* 125).

Quum enim, in ſuſpenſione ex B, efficiatur diſtantia AD, qua nempe centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis, applicando ad diſtantiam BA ſpatium quoddam, cujus multiplex ſecundum numerum

Du centre d'oscillation.

* Prop. précéd.

les dans lesquelles la grandeur est divisée par la pensée est égal aux carrés des distances à un axe passant par A parallèlement a l'axe B*, le rectangle BAD sera égal au dit espace. De même dans le cas de la suspension en C, comme la distance AE est obtenue par la division du dit espace par la distance CA, le rectangle CAE lui aussi sera égal à ce même espace. Les rectangles BAD et CAE sont donc égaux entre eux; partant le rapport BA : CA est le même que AE : AD. C.Q.F.D.

Il en résulte évidemment que lorsqu'un pendule simple isochrone avec la grandeur suspendue est donné pour une suspension déterminée, et que le centre de gravité de la grandeur est connu, la longueur du pendule isochrone est également connue pour toute autre suspension plus courte ou plus longue, pourvu que le plan de l'oscillation reste le même.

PROPOSITION XX.

Le centre d'oscillation et le point de suspension sont réciproques [1]).

Dans la figure qui précède [Fig. 94] le centre d'oscillation est D lorsque le corps est suspendu en B; mais lorsqu'on invertit toutes choses et qu'on suppose le corps suspendu en D, le centre d'oscillation sera B. C'est ce qui résulte clairement de la proposition précédente.

PROPOSITION XXI.

Comment on trouve les centres d'oscillation dans les figures planes [2]).

Lorsqu'on a compris ce qui a été démontré jusqu'ici, il sera désormais facile de définir les centres d'oscillation dans la plupart des figures qu'on a coutume de considérer en géométrie. Et pour parler d'abord des figures planes, nous avons défini plus haut pour elles deux oscillations différentes, savoir celle autour d'un axe situé dans le plan de la figure et celle autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, dont nous avons appelé la première plane et la deuxième latérale.

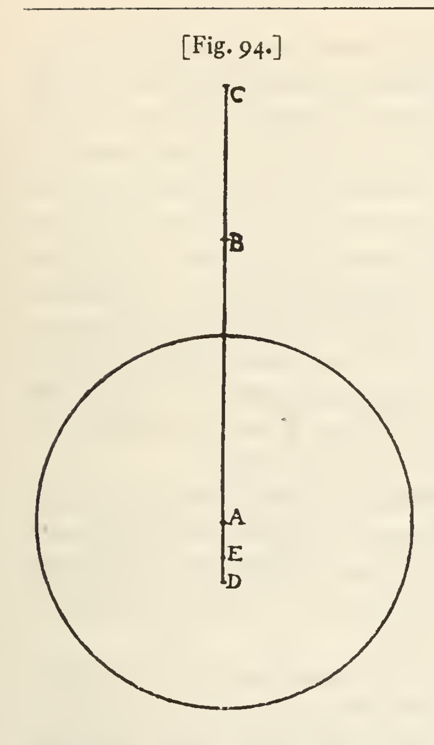
Que si la figure est mise en mouvement de la première façon, savoir autour d'un

---

que pour des figures planes oscillant dans leur plan. A la p. 509 du T. XVI on trouve implicitement (note 1) cette proposition dans le cas d'une figure plane oscillant perpendiculairement à son plan; comparez le septième alinéa de la p. 472 du T. XVI. Les anagrammes de 1669 (n°. 11 à la p. 489 du T. VI) parlent explicitement de la constance du Rectangulum distantiarum, c.à.d. du produit de la distance du centre d'oscillation au centre de gravité par la distance de ce dernier à l'axe d'oscillation. Comparez le deuxième alinéa de la p. 373 du T. XVI et la note 1 de la p. 298 qui précède.

[1]) Comme nous l'avons dit aux p. 373—374 du T. XVI, on ne trouve pas encore cette Proposition dans les travaux antérieurs à 1666. Les anagrammes de 1669 (note précédente) ne la mentionnent pas, de sorte qu'elle peut dater de plus tard.

[Fig. 94.]



particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in B *; erit proinde rectangulum BAD dicto spatio æquale. Item in suspensione ex C, quum fiat distantia AE, applicando idem dictum spatium ad distantiam CA; erit & rectangulum CAE eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula BAD, CAE; ac proinde ratio BA ad CA eadem quæ AE ad AD. quod erat demonstrandum. De centro oscillationis * Prop. præc.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

PROPOSITIO XX.

Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur [1]).

In figura superiori [Fig. 94], quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspen|sionem ex D, erit tunc centrum oscillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione præcedenti manifestum est. (*p.* 126).

PROPOSITIO XXI.

Quomodo in figuris planis centra oscillationis inveniantur [2]).

Intellectis quæ hactenus demonstrata sunt, facile jam erit in plerisque figuris, quæ in Geometria considerari consueverunt, definire oscillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oscillationis motum supra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus sit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus.

Quod si priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, sicut

---

[2]) Même si nous ne possédions pas les travaux antérieurs à 1666, on se figurerait aisément que la recherche des centres d'oscillation dans des cas particuliers a dû précéder l'établissement de la théorie générale.

Du centre d'oscillation.

axe situé dans son plan, par exemple la figure BCD autour de l'axe EF [Fig. 95], on obtiendra le centre d'oscillation K de cette figure de la manière suivante. Considérons l'onglet coupé sur la figure par un plan qui traverse celui de la figure de telle manière que l'intersection DD est parallèle à l'axe d'oscillation. Soit donnée la distance AD du centre de gravité de la figure à cette intersection, ainsi que la subcentrique DH du dit onglet par rapport à la même intersection. C'est en divisant le rectangle DAH par la distance FA qu'on trouve le centre d'oscillation K de la figure BDC, puisque cette division donne la distance AK de laquelle le centre d'oscillation est inférieur au centre de gravité. En effet, le rectangle DAH, multiplié par le nombre des particules de la figure BCD, est égal aux carrés des distances à la droite BAC parallèle à l'axe d'oscillation EF et passant par le centre de gravité A*. Par conséquent la division du même rectangle par la distance FA nous donnera la distance AK de laquelle le centre d'oscillation est inférieur au centre de gravité A*.

* Prop. 10 de cette Partie.

* Prop. 18 de cette Partie.

Il est donc manifeste que si DD est l'axe d'oscillation, le centre d'oscillation tombe en H et que conséquemment la longueur DH du pendule simple isochrone avec la figure BCD est alors précisément la subcentrique par rapport à DD de l'onglet limité par un plan passant par la même droite DD. Ceci seul avait été remarqué avant moi par d'autres, sans toutefois qu'ils l'eussent démontré [1]).

Il n'entre pas dans notre plan d'exposer comment on trouve les centres de gravité des onglets coupés sur des figures planes, et déjà ils sont connus dans beaucoup de cas. Par exemple si la figure BCD est un cercle, DH sera égale à $\frac{5}{8}$ fois le diamètre. Si c'est un rectangle, on aura DH = $\frac{2}{3}$ du diamètre. D'où paraît la raison pour laquelle une verge, ou ligne pesante, suspendue par un de ses bouts est isochrone avec un pendule d'une longueur de $\frac{2}{3}$ de la sienne; savoir en considérant cette ligne comme si c'était un rectangle de largeur extrêmement petite.

---

[1]) Voir sur ce sujet les p. 57—58 de l'Avertissement qui précède.

De centro oscillationis

[Fig. 95.]

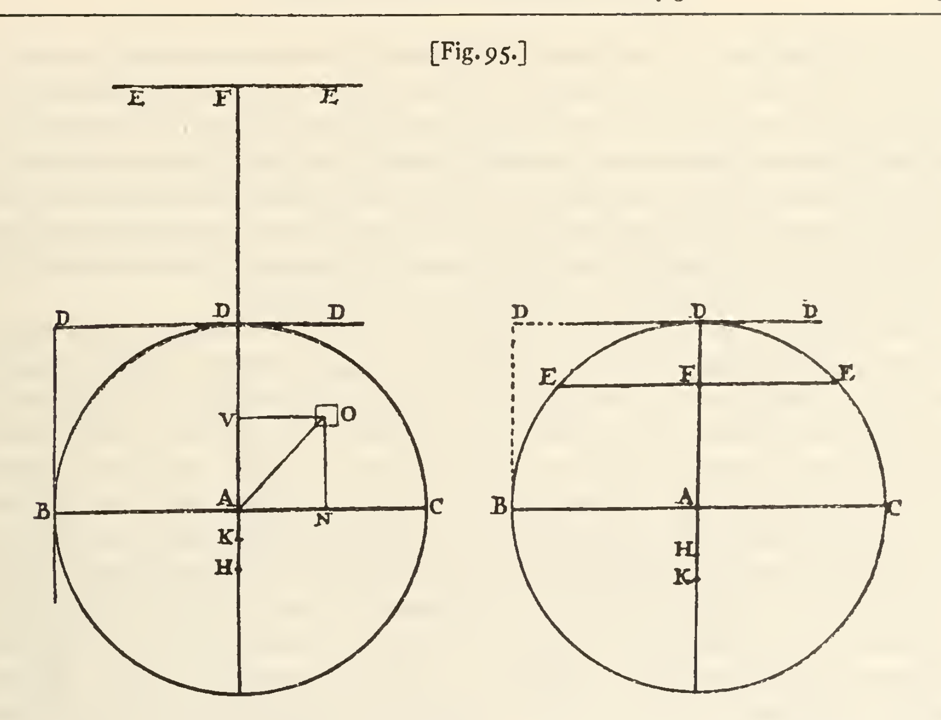


figura BCD circa axem EF [Fig. 95]; hic, ſi cuneus ſuper figura intelligatur abſciſſus, plano quod ita ſecet planum figuræ, ut interſectio, quæ hic eſt DD, ſit parallela oſcillationis axi; deturque diſtantia centri gravitatis figuræ ab hac interſectione, ut hic AD; itemque ſubcentrica cunei dicti ſuper eadem interſectione, quæ hic ſit DH. Habebitur centrum oſcillationis K, figuræ BDC, applicando rectangulum DAH ad diſtantiam FA; quoniam ex applicatione hac orietur diſtantia AK, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis. Eſt enim rectangulum DAH, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ BCD, æquale quadratis diſtantiarum ab recta BAC, quæ per centrum gravi|tatis A parallela ducitur axi oſcillationis EF *. Quare, (p. 127).
applicando idem rectangulum ad diſtantiam FA, orietur diſtantia AK, qua centrum * Prop. 10. huj.
oſcillationis inferius eſt centro gravitatis A *. * Prop. 18. huj.

Hinc manifeſtum eſt, ſi axis oſcillationis ſit DD, fieri centrum oſcillationis H punctum, adeoque longitudinem DH, penduli ſimplicis iſochroni figuræ BCD, eſſe tunc ipſam ſubcentricam cunei, abſciſſi plano per DD, ſuper ipſam DD. Quod unum ab aliis ante animadverſum fuit, non tamen demonſtratum [1]).

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum ſuper figuris planis inveniantur, perſequi non eſt inſtituti noſtri, & jam in multis nota ſunt. Velut, quod ſi figura BCD ſit circulus, erit DH æqualis $\frac{5}{8}$ diametri. Si rectangulum, erit DH ∞ $\frac{2}{3}$ diametri. Unde & ratio apparet cur virga, ſeu linea gravitate prædita, altero capite ſuſpenſa, iſochrona ſit pendulo longitudinis ſubſeſquialteræ. Conſiderando nempe lineam ejuſmodi, ac ſi eſſet rectangulum minimæ latitudinis.

Du centre d'oscillation.

Que si la figure est un triangle dont le sommet est tourné vers le haut, on trouve DH = $\frac{3}{4}$ du diamètre; s'il est tourné vers le bas, DH = la moitié du diamètre.

Il faut savoir en outre que ce qui a été démontré dans la Prop. XVI s'applique de la façon suivante au mouvement considéré de la figure plane: si nous donnons à la figure BCD toutes sortes de positions différentes, la faisant tourner autour de l'axe BAC du manière à lui donner une position horizontale ou oblique, tandis que l'axe d'oscillation FE demeure le même, la longueur FK du pendule isochrone sera également invariable. Voilà ce que cette proposition nous enseigne.

Considérons en second lieu le mouvement oscillatoire d'une figure plane autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, ce que nous avons appelé oscillation latérale; par exemple celle de la figure BCD [Fig. 96] autour d'un axe passant par le point F normalement au plan DBC. Dans ce cas il faut prendre en considération, outre l'onglet coupé sur la figure par un plan passant par DD, tangente à la figure en son plus haut point, un deuxième onglet coupé par un plan passant par BD, tangente latérale à la figure et perpendiculaire à la tangente DD [1]). Et il faut qu'outre le centre de gravité A de la figure et la subcentrique HD du premier onglet, la subcentrique LB du deuxième onglet soit également connue. En effet, de cette façon on connaîtra les rectangles DAH et BAL dont la somme, que dans la suite nous appellerons aussi le Rectangle d'oscillation, constitue l'espace qui, divisé par la distance FA, donnera la distance AK de laquelle le centre d'oscillation K est inférieur au centre de gravité A.

---

[1]) Dans son exemplaire de l'„Horol. osc." Huygens a substitué à cette phrase une explication plus ample de sa méthode de calcul; voir le texte latin qui suit. On peut en outre consulter le T. XVI sur des calculs de ce genre.

Voici le nouveau texte latin, destiné à remplacer la partie „hic jam præter cuneum..... Oportetque dari":

„hic jam habenda est summa quadratorum à distantijs particularum omnium ab recta quæ per centrum gravitatis A intelligitur axi oscillationis parallela; secundum ea quæ propos. 18 exposita fuere. Hoc est summa quadratorum à distantijs ab ipso A centro gravitatis, quoniam figura plana est. Sive etiam summa quadratorum à distantijs tam ab recta BAC, quam ab recta DA. Constat enim quadratum rectæ OA, quam pono esse distantiam unius cujusdam particulæ à centro A, æquari quadratis distantiarum ON, OV, quibus eadem particula abest a rectis BAC, DA*. Atqui summa quadratorum à distantijs ab recta BAC, æquatur rectangulo DAH, si DH sit subcentrica cunei, super figura abscissi per tangentem DD, parallelam BA*. Item summa quadratorum a distantijs ab recta DA æquatur rectangulo BAL, si BL sit subcentrica cunei, abscissi per tangentem BD, parallelam AD. Oportet itaque dari...."

* per 47. lib. 1 Elem.

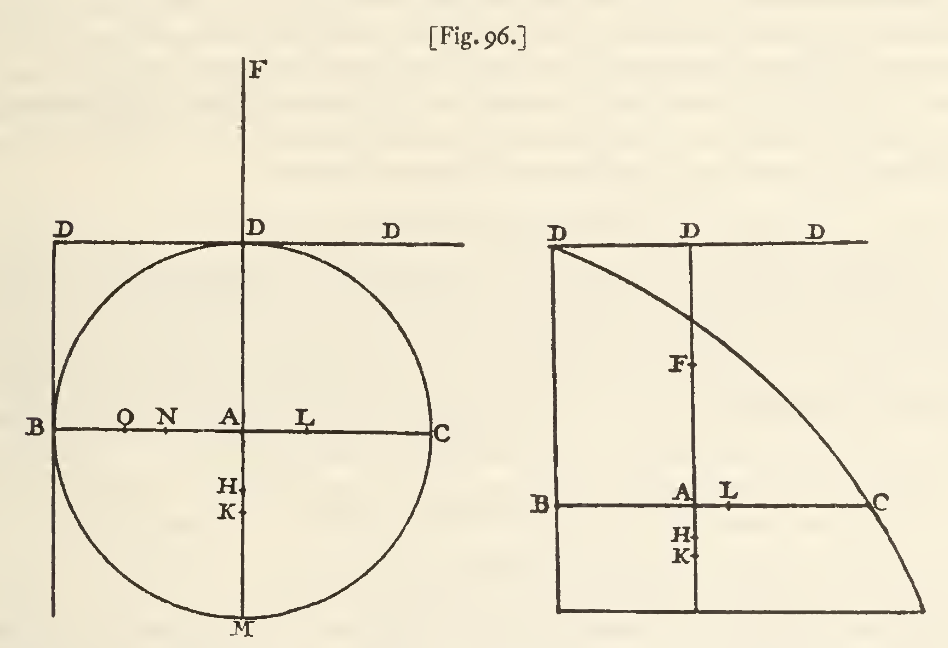
* Prop. 10. huj.

Dans son édition de 1724 's Gravesande a incorporé ce passage dans le texte conformément à l'intention de Huygens exprimée par lui („interserantur ad marginem annotata",

Quod ſi figura triangulum fuerit, vertice ſurſum converſo, ſit DH $\frac{3}{4}$ diametri. Si deorſum, $\frac{1}{2}$ diametri. De centro oscillationis

Quod autem propoſitione 16 demonſtratum fuit, id ad hujusmodi figuræ planæ motum ita pertinere ſciendum. Nempe, ſi aliam atque aliam poſitionem demus figuræ BCD, invertendo eam circa axem BAC, ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe FE, etiam longitudo penduli iſochroni FK eadem manebit. Hoc enim ex propoſitione illa manifeſtum eſt.

[Fig. 96.]



Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur; quam vocavimus agitationem in latus; velut ſi figura BCD [Fig. 96] moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum DHC erectus; hic jam [1]) præter cuneum ſuper figura, qui abſcinditur plano ducto per DD, tangentem figuram in puncto ſummo, alter quoque conſiderandus cuneus qui abſcinditur plano per BD tangentem figuram in latere, quæque tangenti DD ſit ad rectos angulos. Oportetque dari [1]), præter figuræ centrum gravitatis A, ſubcentricamque HD cunei prioris, etiam ſubcentricam LB cunei poſterioris. Ita enim nota erunt rectangula DAH, BAL, quæ ſimul ſumpta faciunt hic ſpatium applicandum, quod deinceps etiam rectangulum oſcillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad diſtantiam FA, dabit diſtantiam AK, qua centrum oſcillationis K inferius eſt centro gravitatis A.

etc.) dans une note manuscrite ajoutée aux „Corrigenda" de la dernière page de l'édition originale (comparez la note 3 de la p. 92 qui précède). Voulant conserver aussi le texte ancien nous ne suivons pas en cet endroit l'exemple de 's Gravesande.

Du centre d'oscillation.

Mais ſi FA eſt un axe de la figure BCD [Fig. 96, I] on pourra, au lieu de l'onglet coupé par BD ſur la figure entière, ſe ſervir d'un onglet coupé ſur la demi-figure DBM par un plan paſſant par DM. Car ſi OA eſt la ſubcentrique par rapport à DM de cet onglet et NA la diſtance à la même droite DM du centre de gravité de la figure plane DBM, il appert que le rectangle OAN eſt égal au rectangle BAL*. De cette façon la ſomme des rectangles OAN et DAH ſera auſſi le plan qu'il faut diviſer par la diſtance FA pour obtenir la diſtance AK.

* Prop. 11 de cette Partie.

La démonſtration de ces dernières choſes eſt manifeſte par les précédentes, puiſque les rectangles DAH et BAL ou DAH et OAN, multipliés par le nombre des particules de la figure, ſont égaux aux carrés des diſtances au centre de gravité A, ou bien, ce qui eſt ici la même choſe, aux carrés des diſtances à un axe de gravité parallèle à l'axe d'oſcillation, et que par conſéquent le quotient des rectangles ſuſdits par la diſtance FA nous donne la longueur de l'intervalle AK*.

* Prop. 18 de cette Partie.

Centre d'oſcillation du cercle.

Or, dans le cas du cercle [Fig. 96] il eſt évident que les rectangles DAH et BAL ſont égaux entre eux et que leur ſomme conſtitue la moitié du carré du rayon. Par conſéquent ſi, comme FA eſt au rayon AB, ainſi ce dernier eſt dit ſe rapporter à une autre longueur, la moitié de cette longueur-là ſera la diſtance AK du centre de gravité au centre d'oſcillation. Lorſque le cercle oſcille autour de l'axe D pris ſur la circonférence, DK ſera donc égale aux trois quarts du diamètre DM.

Suivant la même méthode [1]) nous avons auſſi trouvé les centres d'oſcillation dans le cas des figures planes ſuivantes; qu'il ſuffiſe de publier les réſultats du calcul.

Centre d'oſcillation du rectangle.

Dans tout rectangle tel que CB [Fig. 97] l'eſpace qui doit être diviſé par une longueur, en d'autres termes le rectangle d'oſcillation, eſt trouvé égal au tiers du carré de la demi-diagonale AC. Il s'enſuit que lorſque le rectangle eſt ſuſpendu à un de ſes angles et agité latéralement, le pendule qui lui eſt iſochrone eſt égal à $\frac{2}{3}$ de la diagonale entière [2]).

Centre d'oſcillation du triangle iſoſcèle.

Dans le cas du triangle iſoſcèle, tel que CBD [Fig. 98], l'eſpace qui doit être diviſé par une longueur eſt égal à la 18ième partie du carré du diamètre BE augmentée de la 24ième partie du carré de la baſe CD.

---

[1]) En réalité la longueur du pendule isochrone avec le cercle suspendu en un point de sa circon férence et oscillant dans son plan avait été trouvée tout autrement; voir la p. 455 du T. XVI. Comparez le troisième alinéa de la p. 322 qui suit.

Si vero FA ſit axis figuræ BCD [Fig. 96, I], poteſt, pro cuneo abſciſſo per | BD (*p.* 128).
ſuper figura tota, adhiberi cuneus ſuper figura dimidia DBM abſciſſus plano per DM. DE CENTRO OSCILLATIONIS
Nam, ſi cunei hujus ſubcentrica ſuper DM ſit OA, diſtantia vero centri gr. figuræ planæ DBM ab eadem DM ſit NA, æquale eſſe conſtat rectangulum OAN rectangulo BAL *. Itaque rectangulum OAN, additum rectangulo DAH, conſtituet quoque planum applicandum ad diſtantiam FA, ut fiat diſtantia AK. * Prop. 11. huj.

Et horum quidem manifeſta eſt demonſtratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula DAH, BAL, vel DAH, OAN, multiplicia ſecundum numerum particularum figuræ, æqualia ſint quadratis diſtantiarum à centro gravitatis A; ſive, quod idem hic eſt, ab axe gravitatis axi oſcillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad diſtantiam FA applicata, efficiant longitudinem intervalli AK *. * Prop. 18. huj.

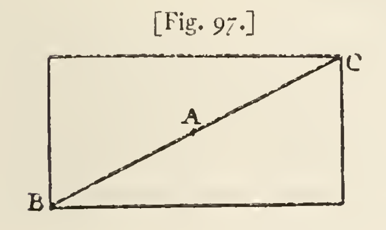
Centrum oſcillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula DAH, BAL, inter ſe æqualia eſſe liquet, ſimulque efficere ſemiſſem quadrati à ſemidiametro. Unde, ſi fiat ut FA ad ſemidiametrum AB, ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit diſtantia AK, à centro gravitatis ad centrum oſcillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia ſumpto, agitetur, erit DK æqualis tribus quartis diametri DM.

Ad hunc modum [1]) & in ſequentibus figuris planis centra oſcillationis quæſivimus, quæ ſimpliciter adſcripſiſſe ſufficiet. Nempe,

Centrum oſcillationis Rectanguli. (*p.* 129).

[Fig. 97.]



In rectangulo omni, ut CB [Fig. 97], ſpatium applicandum, ſive rectangulum oſcillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à ſemidiagonio AC. Unde ſequitur, ſi rectangulum ab aliquo angulorum ſuſpendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi iſochronum eſſe $\frac{2}{3}$ diagonii totius [2]).

Centrum oſcillationis Trianguli iſoſcelis.

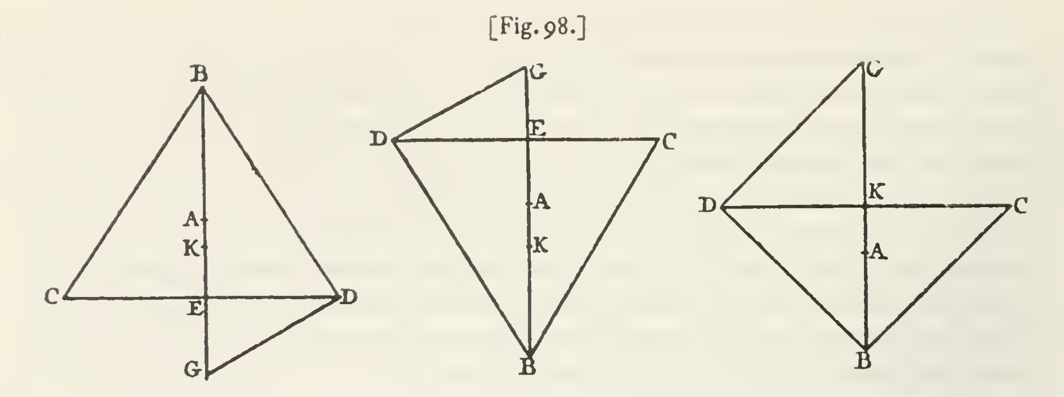
In triangulo iſoſcele, cujuſmodi CBD [Fig. 98], ſpatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro BE, & vigeſimæ quartæ quadrati baſeos CD.

---

[2]) Voir sur le rectangle oscillant latéralement les p. 456, 463—469 et 521—523 du T. XVI. Dans sa lettre du 10 octobre 1664 à Moray (T. V, p. 120) Huygens parle de „rectangles suspendus par un des angles [comme dans le présent texte] ou par le milieu des costez". Nous ne connaissons pas de calcul antérieur à 1666 sur le rectangle suspendu par un de ses angles.

Du centre d'oscillation.

[Fig. 98.]



Par conféquent, fi à partir d'un angle de la bafe l'on tire DG perpendiculaire au côté DB et coupant en G le prolongement du diamètre BE, et que A eft le centre de gravité du triangle, et fi, après avoir divifé l'intervalle GA en quatre parties égales, on en ajoute une, favoir KA, à BA; BK fera la longueur du pendule ifochrone, le triangle étant fufpendu en fon fommet B. Mais lorfqu'il eft fufpendu au point milieu E de la bafe, la longueur EK du pendule ifochrone fera égale à la moitié de BG.

Il en réfulte que lorfqu'un triangle ifofcèle rectangle eft fufpendu au point milieu de la bafe, il eft ifochrone avec un pendule ayant une longueur égale à fon diamètre. Et que pareillement, lorfqu'il eft fufpendu à fon angle droit, il eft ifochrone avec le même pendule [1]).

Centre d'ofcillation de la parabole.

Dans le cas d'un fegment de parabole limité par une droite perpendiculaire à l'axe, l'efpace qu'il faut divifer par une droite eft égal à $\frac{12}{175}$ fois le carré de l'axe plus la cinquième partie du carré de la demi-bafe. Lorfque la parabole eft fufpendue à fon fommet, on trouve pour la longueur du pendule ifochrone une longueur de $\frac{5}{7}$ fois l'axe + le tiers du latus rectum. Mais lorfqu'elle eft fufpendue au point milieu de la bafe, cette longueur fera de $\frac{4}{7}$ fois l'axe plus la moitié du latus rectum [2]).

Centre d'ofcillation du fecteur de cercle.

Si dans le fecteur de cercle BCD [Fig. 99] le rayon BC eft appelé r, le demi-arc CF p et la demi-corde CE b, l'efpace qui doit être divifé par une droite devient égal à $\frac{1}{2}r^2 - \frac{4b^2r^2}{9p^2}$, c.à.d. à $\frac{1}{2}$ BC² — BA², A étant par hypothèfe le centre de gravité du fecteur, car on a alors $BA = \frac{2br}{3p}$. Le fecteur étant fufpendu en B, centre du cercle dont il fait partie, le pendule ifochrone avec lui devient $\frac{3pr}{4b}$, c.à.d. les trois quarts de la droite dont le rapport au rayon BF eft égal à celui de l'arc CFD à la corde CD.

Unde, si ab angulo baseos ducatur DG, perpendicularis super latus DB, quæ occurrat productæ diametro BE in G; sitque A centrum gravitatis trianguli; divisoque intervallo GA in quatuor partes æquales, una earum AK apponatur ipsi BA; erit BK longitudo penduli isochroni, si triangulum suspendatur ex vertice B. Cum autem ex puncto mediæ basis E suspenditur, longitudo penduli isochroni EK æquabitur dimidiæ BG. DE CENTRO OSCILLATIONIS

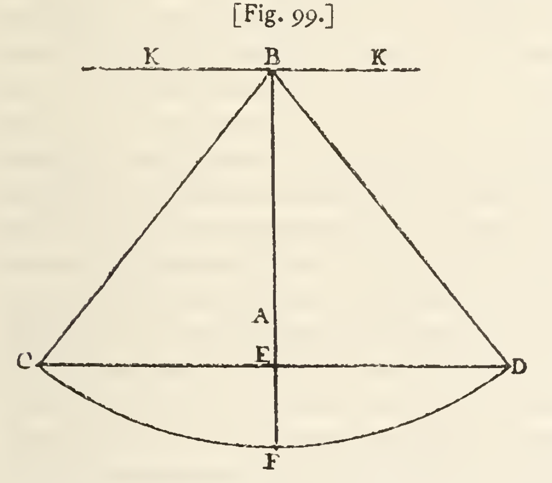
Atque hinc liquet, triangulum isosceles rectangulum, si ex puncto mediæ basis suspendatur, isochronum esse pendulo longitudinem diametro suæ æqualem habenti. Similiterque, si suspendatur ab angulo suo recto, eidem pendulo isochronum esse [1]).

Centrum oscillationis Parabolæ.

In parabolæ portione recta, spatium applicandum æquatur $\frac{12}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ basis. Cum|que parabola ex verticis puncto suspensa est, invenitur penduli isochroni longitudo $\frac{5}{7}$ axis, atque insuper $\frac{1}{3}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ basis suspenditur, erit ea longitudo $\frac{4}{7}$ axis, & insuper $\frac{1}{2}$ lateris recti [2]). (*p.* 130).

Centrum oscillationis Sectoris circuli.

[Fig. 99.]



In circuli sectore BCD [Fig. 99], si radius BC vocetur r: semiarcus CF, p: semisubtensa CE, b: fit spatium applicandum æquale $\frac{1}{2}rr - \frac{4bbrr}{9pp}$, hoc est, dimidio quadrati BC, minus quadrato BA; ponendo A esse centrum gravitatis sectoris. Tunc enim BA ∞ $\frac{2br}{3p}$. Si autem suspendatur sector ex B, centro circuli sui, fit pendulum ipsi isochronum $\frac{3pr}{4b}$, hoc est, trium quartarum rectæ, quæ sit ad radium BF ut arcus CFD ad subtensam CD. Hæc autem inveniuntur cognitis subcentricis cuneorum;

[1]) Ce résultat fut déjà obtenu en 1664; voir la p. 456 du T. XVI. Consultez aussi sur le triangle les p. 452—454, 462 et 522—525 du T. XVI.

[2]) Voir sur le centre d'oscillation d'un segment de parabole l'Appendice II à la Pars Quarta qui suit.

Du centre d'oscillation.

On obtient ces résultats lorsqu'on connaît les subcentriques des onglets, tant de celui qui est coupé sur le secteur total par un plan passant par BK parallèle à la corde CD (nous trouvons que la subcentrique par rapport à BK de cet onglet est $\frac{3r}{8} - \frac{3a}{8} + \frac{3pr}{8b}$, en appelant a le sinus versus EF), que de celui qui est coupé sur le demi-secteur BFC par un plan passant par BF (nous trouvons que la subcentrique de cet onglet-là par rapport à BF est $\frac{3b}{8} - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$) [1]).

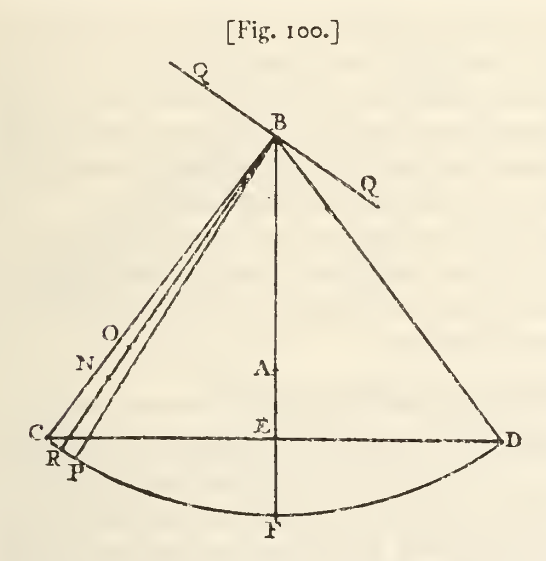
Mais on trouve aussi le centre d'oscillation du secteur d'après une autre méthode plus facile qui est la suivante. Soit le secteur BCP [Fig. 100], qui peut être considéré comme un triangle, une fort petite partie du secteur BCD. Or, les carrés des distances de ses particules au point B sont égaux aux carrés des distances à la droite BR qui divise le secteur en deux parties égales plus les carrés des distances à la droite BQ perpendiculaire à BR. Mais le rapport de ces derniers carrés aux premiers est supérieur à tout rapport donné, puisque l'angle CBP est extrêmement petit; par conséquent les premiers peuvent être considérés comme nuls. Prenons BO égale aux deux tiers de BR, ce qui revient à prendre O comme centre de gravité du triangle BCP, et BN égale aux trois quarts de BR, de sorte que N est le centre de gravité de l'onglet coupé sur le triangle BCP par un plan passant par BQ. Ceci étant posé, il apparaît que les carrés des distances des particules du triangle BCP à la droite BQ sont égaux au rectangle NBO multiplié par le nombre des particules du même triangle. Par conséquent le rectangle NBO multiplié par ce nombre doit être estimé égal aux carrés des distances au point B des particules du triangle BCP. Or, les carrés de ces distances sont aux carrés des distances du secteur entier BCD, comme le secteur BCP est au secteur BCD, en d'autres termes, comme le nombre des particules du secteur BCP est à celui des particules du secteur BCD: c'est ce qu'on comprend facilement en songeant que le secteur BCD peut être divisé en secteurs tels que BCP. Par conséquent le rectangle NBO, multiplié par le nombre des particules du secteur BCD, sera égal aux carrés des distances au point B de ces particules. Le rectangle NBO, divisé par BA qui est la distance du point de suspension au centre de gravité du secteur, donnera donc la longueur du pendule isochrone lorsque le secteur est suspendu en B*. Or, le rectangle NBO est égal à $\frac{1}{2}r^2$ et la distance BA, comme nous l'avons déjà dit auparavant, à $\frac{2br}{3p}$. Par la division on obtient donc $\frac{3pr}{4b}$ pour la longueur du pendule isochrone, comme nous l'avions aussi trouvé plus haut.

* Prop. 17 de cette Partie.

---

[1]) Comparez le calcul des p. 487—489 et 524—529 du T. XVI. On trouve un autre calcul sur le secteur de cercle aux p. 489—490 du T. XVI.

tum illius qui ſuper ſectore toto abſcinditur, plano ducto per BK parallelam ſubtenſæ CD, cujus cunei ſubcentricam ſuper BK invenimus eſſe $\frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3pr}{8b}$, vocando a ſinum verſum EF; tum illius qui ſuper dimidio ſectore BFC abſcinditur plano per BF, cujus nempe cunei ſubcentricam ſuper BF invenimus $\frac{3}{8}b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$ [1]). De centro oscillationis



[Fig. 100.]

Sed & alia via, ſectoris centrum oſcillationis, facilius invenitur, quæ eſt hujuſmodi. Intelligatur ſectoris BCD [Fig. 100] pars minima ſector BCP, qui trianguli loco haberi poteſt. Quadrata autem, à diſtantiis particularum ejus à puncto B, æqualia ſunt quadratis diſtantiarum ab recta BR, bifariam ſectorem dividente, una cum quadratis diſtantiarum ab recta BQ, quæ ipſi BR eſt ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data eſt major, quoniam angulus CBP minimus; ideoque illa pro nullis habenda ſunt.

Poſitâ vero BO duarum tertiarum BR, hoc eſt, poſito O centro gravitatis trianguli BCP; & BN trium quartarum BR: ut nempe N ſit centrum gravitatis cunei, ſuper trianguli BCP abſciſſi plano per BQ. His poſitis, conſtat quadrata, à diſtantiis particularum trianguli BCP ab recta BQ, æquari rectangulo NBO multiplici ſecundum particularum ejuſdem trianguli numerum. Itaque rectangulum NBO, ita multiplex, æquale cenſendum quadratis diſtantiarum à puncto B particularum trianguli BCP. Sunt autem quadrata diſtantiarum harum, ad quadrata diſtantiarum totius ſectoris BCD, ſicut ſector BCP ad ſectorem BCD, hoc eſt, ſicut numerus particularum ſectoris BCP, ad numerum particularum ſectoris BCD; hoc enim facile intelligitur, eo quod ſector BCD dividatur in ſectores qualis BCP. Ergo rectangulum NBO, multiplex ſecundum numerum particularum ſectoris BCD, æquale erit quadratis diſtantiarum particularum ejus à puncto B. Ideoque rectangulum NBO, applicatum ad BA, diſtantiam inter ſuſpenſionem & centrum gravitatis ſectoris, dabit longitudinem penduli iſochroni, cum ſector ex B ſuſpenditur *. Eſt autem rectangulum NBO ∞ $\frac{1}{2}rr$: diſtantia autem BA, ut jam ante diximus, ∞ $\frac{2br}{3p}$. Unde, facta applicatione, oritur $\frac{3pr}{4b}$, longitudo penduli iſochroni, ut ante quoque inventa fuit.

(p. 131)

* Prop. 17. huj.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Le Centre d'ofcillation du cercle, autrement que ci-deſſus.

De la même manière on peut auſſi trouver fort ſimplement le centre d'oſcillation du cercle. Conſidérons en effet le cercle GCF à centre B [Fig. 101], et dans ce cercle le ſecteur extrêmement petit BCP, comme nous l'avons fait plus haut dans le cas du ſecteur BCD.

Comme alors, ſuivant ce que nous venons d'expoſer, les carrés des diſtances des particules du ſecteur BCP au centre B ſont égaux au rectangle NBO, c.à.d. à la moitié du carré du rayon multiplié par le nombre des particules du ſecteur, et que le cercle eſt entièrement compoſé de ſecteurs de ce genre, il en réſulte que les carrés des diſtances des particules du cercle entier au centre B ſeront égaux à la moitié du carré du rayon multiplié par le même nombre, celui des particules du cercle.

Or, B eſt le centre de gravité du cercle. Par conſéquent la dite moitié du carré du rayon ſera ici l'eſpace qui doit être diviſé par la diſtance du point de ſuſpenſion au centre B pour obtenir l'intervalle dont le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre B*, ce qui s'accorde avec le réſultat trouvé plus haut.

* Prop. 18 de cette Partie.

Le Centre d'ofcillation de la circonférence du cercle.

Le centre d'oſcillation de la circonférence de cercle eſt trouvé encore plus facilement par cette méthode. Conſidérons une circonférence décrite du centre B avec le rayon BR [Fig. 102]. Le carré de BR, multiplié par le nombre des particules dans leſquelles la circonférence peut être diviſée par la penſée, eſt donc égal aux carrés des diſtances de toutes ces particules au centre B. BR^2 ſera par conſéquent ici l'eſpace qu'il faut diviſer par une droite*. Et il reſſort de là que lorſque la circonférence eſt ſuſpendue au point G ſitué ſur elle la longueur du pendule iſochrone eſt égale au diamètre GF [1]).

* Prop. 18 de cette Partie.

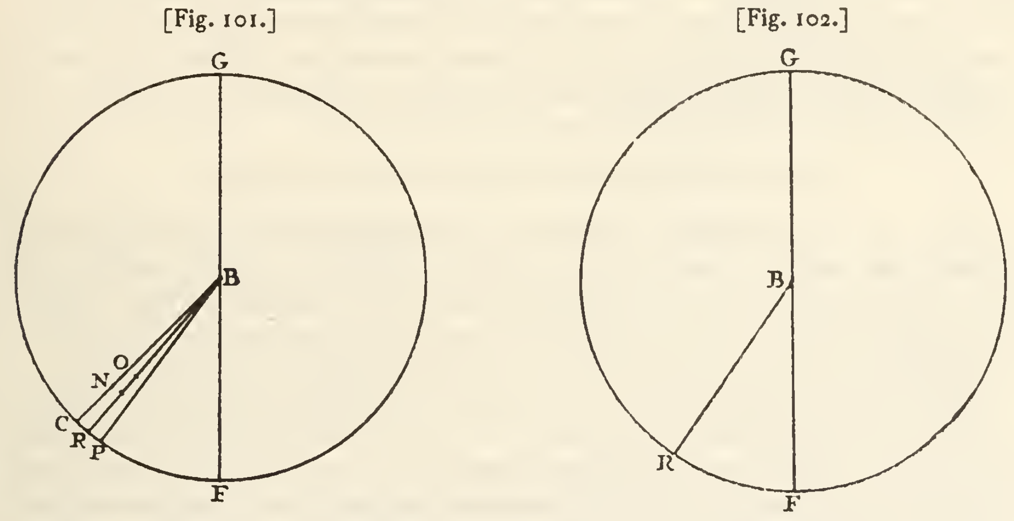
Le Centre d'ofcillation des polygones réguliers.

On trouve ſemblablement le pendule iſochrone correſpondant à un polygone ré-

---

[1]) Voir sur la méthode de calcul qui avait fait connaître en 1664 la longueur du pendule isochrone avec la circonférence de cercle suspendue en un de ses points et oscillant dans son plan les p. 455 du T. XVI et 152 du T. XVII. Cette méthode est d'ailleurs mentionnée dans le dernier alinéa de p. 318.

Centrum oſcillationis Circuli, aliter quam ſupra. DE CENTRO OSCILLATIONIS



Eodem modo etiam ſimpliciſſime, in circulo, centrum oſcillationis invenire licet. Sit enim circulus GCF, cujus centrum B [Fig. 101]; ſectorque in eo minimus intelligatur BCP, ſicut ante in ſectore BCD.

Cum igitur, ſecundum modo expoſita, quadrata, à diſtantiis particularum ſectoris BCP ad centrum B, æquentur rectangulo NBO, hoc eſt, dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum ſectoris ipſius particularum numerum; circulus autem ex ejusmodi ſectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à diſtantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum numerum earundem circuli particularum. (p. 132).

Eſt autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit ſpatium applicandum diſtantiæ inter ſuſpenſionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oſcillationis inferius eſt ipſo centro B*. quod & ſupra ita ſe habere oſtendimus. * Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Peripheriæ circuli.

Facilius etiam, centrum oſcillationis circumferentiæ circuli, hoc | pacto reperitur. Eſto enim circumferentia deſcripta centro B, radio BR [Fig. 102]. Quadratum igitur BR, multiplex ſecundum numerum particularum in quas circumferentia diviſa intelligitur, æquatur quadratis à diſtantiis omnium earum particularum ad centrum B. Quare quadratum BR erit hic ſpatium applicandum *. Patetque hinc, ſi ſuſpenſio ſit ex G, puncto circumferentiæ, penduli iſochroni longitudinem æquari diametro GF [1]). (p. 133). * Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Polygonorum ordinatorum.

Haud abſimiliter & polygono cuivis ordinato, ut ABC [Fig. 103], pendulum iſo-

Du centre d'oscillation.

gulier quelconque tel que ABC [Fig. 103]. En effet, l'efpace qu'il faut divifer par une droite devient égal à la moitié du carré de la perpendiculaire abaiffée du centre fur le côté du polygone plus la vingt-quatrième partie du carré du côté. Mais fi l'on cherche le pendule ifochrone avec le périmètre du polygone, l'efpace qu'il faut divifer par une droite devient égal au carré de la perpendiculaire du centre fur le côté augmenté de la douzième partie du carré du côté [1]).

Ufage du lieu plan et du lieu folide dans cette théorie.

Outre cela la contemplation des lieux n'eft pas défagréable en ces chofes. Qu'on demande par exemple, étant donné le point de fufpenfion A et la longueur AB [Fig. 104], de trouver le lieu de deux poids égaux C, D, également diftants de A et de la perpendiculaire AB, qui foient ifochrones, en ofcillant autour de l'axe A perpendiculaire au plan paffant par ACD, avec le pendule fimple de longueur AB.

Pofons $AB = a$, et après que nous avons tiré CD coupant AB en E à angles droits, foit AE, grandeur indéterminée, $= x$ et EC ou $ED = y$. Par conféquent $AC^2 = x^2 + y^2$. Or, cette expreffion, multipliée par le nombre des particules des poids C et D, qui font confidérés ici comme extrêmement petits, eft égale aux carrés des diftances de ces mêmes particules de l'axe de fufpenfion A. La divifion de AC^2 ou $x^2 + y^2$ par la diftance AE de l'axe de fufpenfion au centre de gravité des poids C, D, donnera donc la longueur $\frac{x^2 + y^2}{x}$ du pendule ifochrone *, qui par hypothèfe doit être égale à AB ou a. Donc $\frac{x^2 + y^2}{x} = a$, et $y^2 = ax - x^2$. D'où il apparaît que le lieu des points C et D eft une circonférence de cercle dont le centre F eft fitué au milieu de AB et dont le rayon eft $\frac{1}{2} a$ ou FA. Par conféquent, en quelques points de la circonférence ACBD que deux poids égaux également diftants de A foient placés, ils feront ifochrones, en ofcillant autour de A, avec un pendule ayant une longueur égale au diamètre AB [2]).

* Prop. 17 de cette Partie.

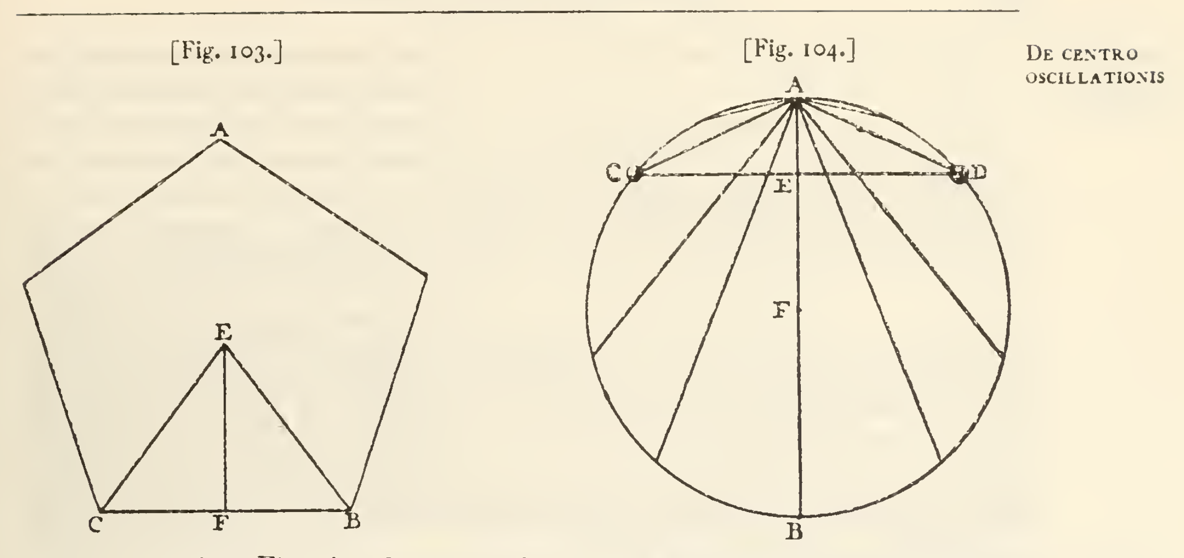
Il eft encore manifefte par là que la circonférence ACBD, fuppofée pefante, et

---

[1]) Voir sur la méthode bien plus laborieuse qui servit en 1664 à calculer la longueur du pendule isochrone avec un hexagone régulier oscillant dans son plan les p. 495—496 du T. XVI. Nous y avons déjà remarqué que le 12[ième] anagramme de 1669 donne la formule correspondante pour un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés.

[2]) Comparez les p. 447 du T. XVI et 152 du T. XVII.

De centro oscillationis



chronum invenitur. Fit enim, ſpatium applicandum, æquale ſemiſſi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una cum vigeſima quarta parte quadrati lateris. At, ſi perimetro polygoni pendulum iſochronum quæratur, fit ſpatium applicandum æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris[1]).

Loci plani & ſolidi uſus in hac Theoria.

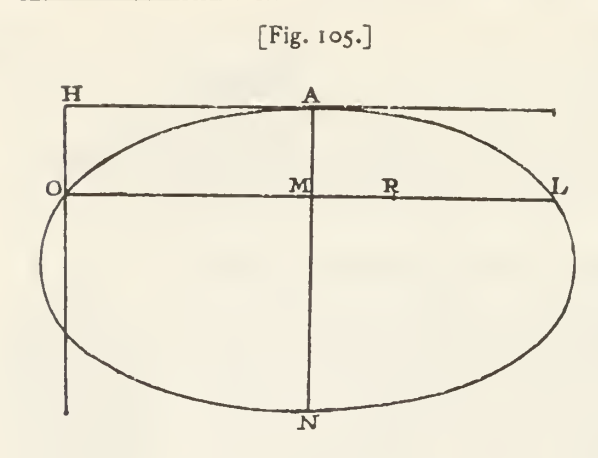
Eſt præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Ut ſi propoſitum ſit, dato puncto ſuſpenſionis A, & longitudine AB [Fig. 104], invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari AB diſtantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per ACD, iſochrona ſint pendulo ſimplici longitudinis AB.

Ponatur AB ∞ a, ductâque CD, quæ ſecet AB ad angulos rectos in E, ſit AE indeterminata ∞ x : EC vel ED ∞ y. Ergo quadratum AC ∞ $xx + yy$. Hoc vero multiplex ſecundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis diſtantiarum earundem particularum ab axe | ſuſpenſionis (p. 134).
A. Ergo quadratum AC, ſive $xx + yy$, applicatum ad diſtantiam AE, quæ nempe eſt inter axem ſuſpenſionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx + yy}{x}$, longitudinem penduli iſochroni *; quam propterea oportet æqualem eſſe AB ſive a. * Prop. 17. hu .
Itaque $\frac{xx + yy}{x}$ ∞ a. Et yy ∞ $ax - xx$. Unde patet, locum punctorum C & D, eſſe circumferentiam circuli, cujus centrum F, ubi AB bifariam dividitur, radius autem ∞ $\frac{1}{2}a$, ſive FA. Ergo, ubicunque in circumferentia ACBD duo pondera æqualia, æqualiter ab A diſtantia, ponentur, ea, ex A agitata, iſochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro AB[2]).

Atque hinc manifeſtum quoque, & circumferentiam ACBD, ſi gravitas ei tribuatur,

Du centre d'oscillation.

[Fig. 105.]



une portion quelconque d'elle divisée en deux parties égales par le point A ou B, eſt iſochrone avec le même pendule AB lorſqu'elle eſt ſuſpendue à l'axe paſſant par A [1]).

Donnons maintenant un exemple d'un lieu ſolide. Soit AN [Fig. 105] une ligne inflexible et impondérable et qu'on demande d'attacher à elle à angles droits en un point pris ſur elle tel que M une ligne ou verge pondérable OML diviſée en deux parties égales par le point M, dont les oſcillations latérales, A étant le point de ſuſpenſion, ſoient iſochrones avec un pendule ſimple de longueur AN.

Tirons OH parallèlement à AN, et AH parallèlement à OM; et ſoit OR = $\frac{2}{3}$ OL. OR ſera par conſéquent la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur la droite OL par un plan paſſant par OH. Mais la ſubcentrique du ſecond onglet coupé ſur la même droite OL par un plan paſſant par la droite AH (onglet qui n'eſt autre choſe qu'un rectangle) ſera la droite AN. Par conſéquent le rectangle que nous avons appelé plus haut rectangle d'oſcillation, ſera ſeulement le rectangle OMR. Celui-ci, diviſé par la longueur AM, donnera la diſtance de laquelle le centre d'oſcillation de la ligne OL ſuſpendue en A eſt inférieur au point M.

Soit maintenant AN = a, AM = x, MO ou ML = y. Le rectangle OMR eſt donc égal à $\frac{1}{3}\,y^2$. La diviſion de cette expreſſion par AM donne $\frac{1}{3}\,\frac{y^2}{x}$. Cette longueur devra donc être égale à MN, puiſque nous voulons que le centre d'oſcillation de la verge OL ſoit en N. L'équation devient donc égale à $\frac{1}{3}\,\frac{y^2}{x} + x = a$. D'où l'on tire $y = \sqrt{3ax - 3x^2}$. Ce qui ſignifie que les points O et L ſe trouvent ſur une ellipſe dont AN eſt le petit axe, tandis que le latus rectum par rapport aux ordonnées perpendiculaires à l'axe eſt le triple de AN.

Il en réſulte manifeſtement, puiſque toute verge parallèle à OL et ayant ſes extrémités ſur cette ellipſe exécute des oſcillations iſochrones avec le pendule ſimple AN, que le plan entier de l'ellipſe ſuſpendu en A et oſcillant latéralement ſera également iſochrone avec le pendule AN. Et il en ſera de même pour une partie de l'ellipſe limitée par une ou deux perpendiculaires à AN [2]).

Nous ajouterons encore un deuxième exemple d'un lieu plan dans lequel ſe rencontrent quelques choſes dignes d'être remarquées.

[1]) Voir la note 1 de la p. 316.

& quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo AB isochronam esse [1]). DE CENTRO OSCILLATIONIS

Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit AN [Fig. 105] linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam OML, ad M bifariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis AN.

Ducatur OH parallela AN, & AH parallela OM, & sit OR æqualis $\frac{2}{3}$ OL. Itaque cunei super recta OL, abscissi plano per OH ducto, subcentrica erit OR. Sed cunei alterius super eadem OL, abscissi plano per rectam AH, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa AM. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit solum rectangulum OMR. quod nempe, applicatum ad longitudinem AM, dabit distantiam centri oscillationis lineæ OL, ex A suspensæ, infra punctum M.

Sit jam AN ∞ a: AM ∞ x: MO vel ML ∞ y. Est ergo rectangulum OMR ∞ (*p.* 135). $\frac{1}{3}yy$. quo applicato ad AM, fit $\frac{1yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipsi MN æqualis esse debebit, cum velimus centrum oscillationis virgæ OL esse in N. Fit ergo æquatio $\frac{1yy}{3x} + x \infty a$. Unde $y \infty \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin, cujus axis minor AN; latus rectum vero, secundum quod possunt ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipsius AN triplum.

Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi OL parallela, & ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas habeat pendulo simplici AN, etiam totum Ellipseos planum, ex A suspensum & in latus agitatum, ipsi AN pendulo isochronum fore. Sed & partem Ellipseos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad AN perpendicularibus, abscindetur [2]).

[Fig. 106.]

Cæterum adscribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.

[2]) Comparez les p. 444—446 et 540—541 du T. XVI.

Du centre d'oscillation.

Soit ſuſpendue en A la verge impondérable AB [Fig. 106] et qu'on demande d'attacher à un point B donné ſur elle deux triangles égaux et écartés d'un même angle de l'axe AB, tels que leurs angles auprès de B étant conſidérés comme extrêmement ou plutôt infiniment petits ils exécutent des oſcillations iſochrones avec un pendule ſimple de longueur donnée AL [1]).

On trouve dans ce cas, après avoir tiré CG perpendiculairement à BG et poſé $AB = a$, $AL = b$, $BG = x$, $CG = y$, l'équation

$$y = \sqrt{2ab - 2a^2 - \tfrac{8}{3}ax + \tfrac{4}{3}bx - x^2},$$

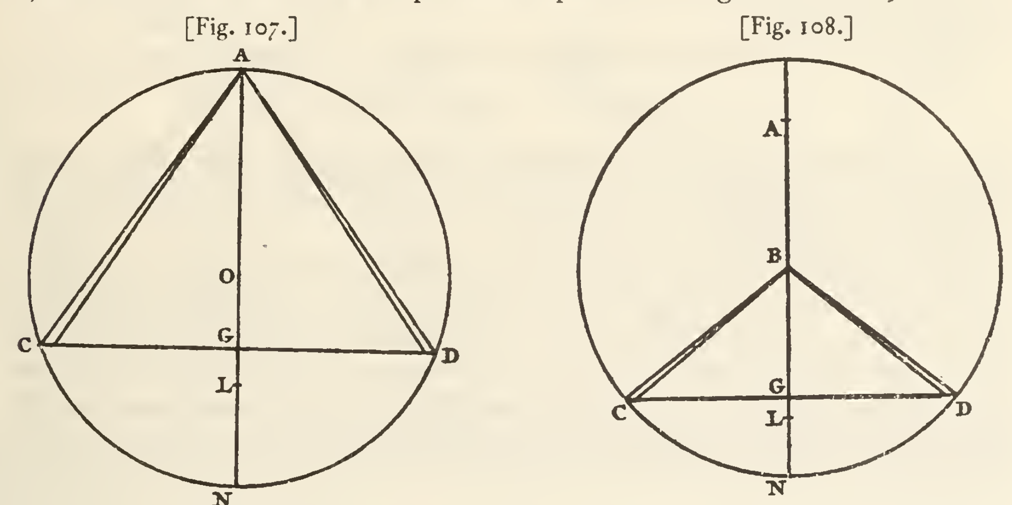
d'où il reſſort que les baſes C et D des triangles conſidérées ici comme punctiformes ſe trouvent ſur une circonférence de cercle [Fig. 107], puiſque la formule contient le terme ſans facteur $-xx$.

Or, on peut obſerver dans ce cas que ſi $a = 0$, c.à.d. ſi le point où les triangles BC et BD ſont attachés eſt le point A lui-même, l'équation ſera $y = \sqrt{\tfrac{4}{3}bx - x^2}$. Par conſéquent, ſi l'on prend alors $AO = \tfrac{2}{3}b$, c.à.d. $\tfrac{2}{3}$ AL, et qu'on décrit du centre O par A le cercle ADN, les baſes des triangles AC et AD ſeront ſituées ſur ſa circonférence. Comme une paire de triangles ſort aigus ayant leur ſommet commun au point A de la circonférence ACND, égaux et ſymétriquement placés, a donc ſon centre d'oſcillation au point L, en prenant $AL = \tfrac{3}{4}$ du diamètre AN, et comme le cercle entier eſt compoſé de pareilles paires de triangles, et qu'il en eſt de même pour une portion quelconque ACND du cercle, ayant ſes côtés AC et AD égaux, il eſt manifeſte que L ſera le centre d'oſcillation tant du cercle entier que d'une portion de ce genre.

Derechef, ſi dans l'équation trouvée on poſe $\tfrac{8}{3}a = \tfrac{4}{3}b$ ou $2a = b$, c.à.d. ſi l'on ſuppoſe les triangles ſuſpendus en B qui diviſe la longueur AL en deux parties égales [Fig. 108] en aura $y = \sqrt{2a^2 - x^2}$, équation qui fait voir que ſi du centre B avec un rayon dont le carré eſt égal à $2BA^2$ on décrit une circonférence, celle-ci ſera le lieu des baſes des triangles infiniment aigus BC et BD, deſquels, lorſqu'ils ſont ſuſpendus en A, L ſera donc le centre d'oſcillation. Et comme le cercle entier ainſi qu'un quelconque de ſes ſecteurs ayant ſon axe ſur la droite AL eſt compoſé de pareilles paires de triangles, il eſt manifeſte que toutes ces figures, ſuſpendues en A, auront auſſi leur centre d'oſcillation au point L.

[1]) Comparez ſur ce problème et tout ce qui s'y rattache les p. 448, 491—493 et 532—541 du T. XVI.

Sit virga AB ponderis expers, ſuſpenſa ex A [Fig. 106]; oporteatque, ad da|tum in (*p.* 136).
ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe AB recedentia, DE CENTRO
quorum anguli ad B minimi, ſive infinite parvi exiſtimandi, quæque, ita ſuſpenſa ab OSCILLATIONIS
A, oſcillationes iſochronas faciant pendulo ſimplici datæ longitudinis AL [1]).



[Fig. 107.] [Fig. 108.]

Hic, ducta CG perpendiculari in BG, & ponendo AB ∞ a; AL ∞ b; BG ∞ x; CG ∞ y: invenitur æquatio $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$. ex qua patet, baſes triangulorum C, & D, quæ baſes hic ut puncta conſiderantur, eſſe ad circuli circumferentiam [Fig. 107]; quia nempe habetur terminus ſimplex $- xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod ſi a ſit nihilo æqualis, hoc eſt, ſi punctum, ubi affiguntur trianguli BC, BD, ſit idem cum puncto A; tum futura ſit æquatio $y \infty \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc caſu, ſi ſumatur AO ∞ $\frac{2}{3}b$, hoc eſt, ∞ $\frac{2}{3}$AL, centroque O per A circulus deſcribatur ADN; erunt baſes triangulorum AC, AD, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutiſſima, quæ ex A ad circumferentiam ACND conſtituuntur, magnitudine & ſitu ſibi reſpondentia, centrum oſcillationis habeant punctum L, poſitâ AL ∞ $\frac{3}{4}$ diametri AN; cumque circulus totus ex cujusmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut ACND, latera AC, AD æqualia habens; manifeſtum eſt, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oſcillationis eſſe in L.

Rurſus, ſi in æquatione inventa ponatur $\frac{8}{3}a \infty \frac{4}{3}b$, ſeu $2a \infty b$; hoc eſt, ſi triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem AL ſecet bifariam [Fig. 108], erit $y \infty \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod ſi centro B, radio qui poſſit duplum BA, circumferentia deſcribatur, ea erit locus baſium triangulorum acutiſſimorum BC,
BD, | quorum nempe, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L punctum. (*p.* 137).
Cumque & circulus totus, & ſector ejus quilibet, axem habens in recta AL, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifeſtum eſt & horum, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis eſſe punctum L.

Du centre d'oscillation.

Conféquemment un fecteur de cercle quelconque, fufpendu en un point diftant du centre de fon cercle d'une longueur égale à la moitié du côté du carré infcrit à ce cercle, aura un pendule ifochrone égal en longueur à ce côté entier. Et ainfi, dans ce feul cas, en trouve un pendule ifochrone avec le fecteur indépendamment de la dimenfion de fon arc.

Enfin, lorfqu'il s'agit de la conftruction univerfelle de la première équation

$$y = \sqrt{2ab - 2a^2 - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - x^2},$$

il faut divifer AL [Fig. 109] en deux parties égales en E, et ajouter à BE fa tierce partie EF; alors F fera le centre du cercle que l'on doit décrire en prenant un rayon FO, dont le carré eft égal à $2(AE^2 - EF^2)$.

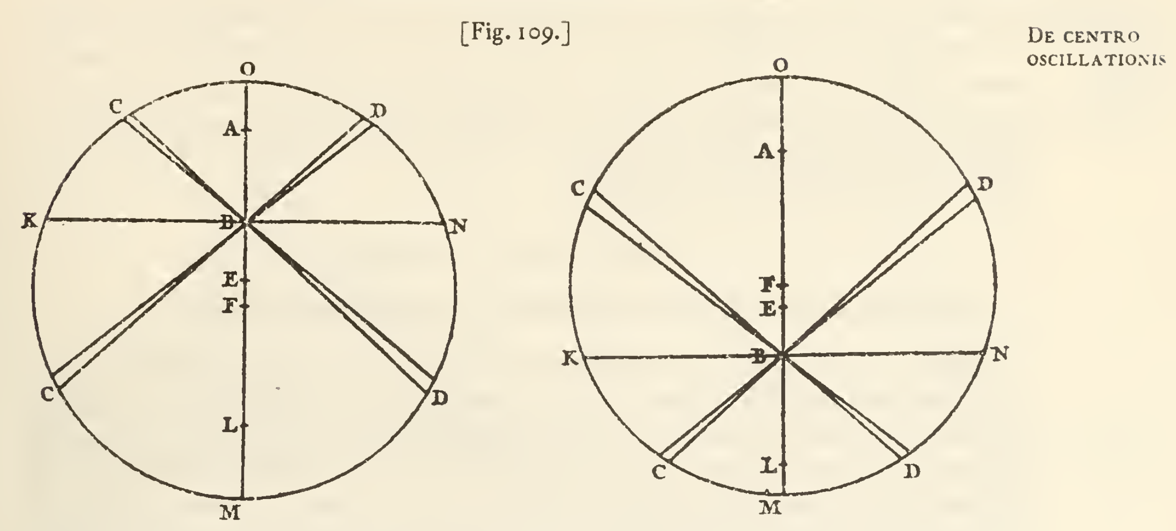
Si l'on prend alors une paire de triangles infiniment aigus, tels que BC et BD, ayant leur fommet commun en B, leur centre d'ofcillation, lorfqu'ils font fufpendus en A, fera L. Et il eft manifefte que L fera également centre d'ofcillation d'une portion quelconque du cercle décrit ayant fon fommet en B et fon axe fur la droite AL, telle que l'enfemble des deux figures CBD, la fufpenfion étant toujours en A. Ceci s'applique auffi aux fegments de cercle KON et KMN limités par la droite KBN perpendiculaire à AB.

Qu'il fuffife d'avoir remarqué ces chofes du mouvement latéral des plans et des lignes. Nous y ajoutons feulement encore ceci que lorfqu'on a trouvé les centres d'ofcillation des figures droites, c.à.d. fymétriques par rapport à l'axe, comme du triangle ifofcèle ou du fegment droit de parabole, on connaît également ceux des figures obliques provenant des figures droites pour ainfi dire par luxation, comme il en eft du triangle fcalène et du fegment oblique de la parabole. Comme par exemple, lorfqu'on fuppofe le triangle ifofcèle BAC à axe AD fufpendu au point E [Fig. 110], et qu'on confidère en outre le triangle fcalène FAG ayant le même axe AD et une bafe FG égale à la bafe BC, je dis que ce triangle-là, fufpendu en E, eft ifochrone avec le premier BAC.

En effet, comme une verge ou ligne pefante FG, attachée en D à une verge im-

[Fig. 109.]

De centro oscillationis



Adeoque quilibet circuli ſector, ſuſpenſus à puncto quod diſtet, à centro circuli ſui, ſemiſſe lateris quadrati circulo inſcripti, pendulum iſochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno caſu, abſque poſita dimenſione arcus, pendulum ſectori iſochronum invenitur.

Porro, ad univerſalem conſtructionem æquationis primæ,

$$y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \tfrac{8}{3}ax + \tfrac{4}{3}bx - xx},$$

dividatur AL [Fig. 109] bifariam in E, & adponatur ad BE pars ſui tertia EF; eritque F centrum deſcribendi circuli; radius autem FO æqualis ſumendus ei, quæ poteſt duplum differentiæ quadratorum AE, EF.

Si itaque, ex puncto B, ad deſcriptam circumferentiam triangula duo paria acutiſſima conſtituantur, ut BC, BD; illorum, ex A | ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L. Quare & portionis cujuſlibet deſcripti circuli, cujus portionis vertex ſit in B, (*p.* 138). axis vero in recta AL, quales ſunt utraque CBD; poſita ſuſpenſione ex A; centrum oſcillationis idem punctum L eſſe conſtat. Atque adeo etiam circuli ſegmentorum KON, KMN, quæ facit recta KBN perpendicularis ad AB.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertiſſe ſufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oſcillationis figuram rectarum, ſeu quæ æqualiter ad axem utrinque conſtitutæ ſunt; ut trianguli iſoſcelis, vel parabolicæ ſectionis rectæ; etiam obliquarum, quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli ſcaleni, & parabolæ non rectæ, centra oſcillationis haberi. Ut ſi, exempli gratia, triangulum BAC iſoſceles [Fig. 110], cujus axis AD, à puncto E ſuſpenſum intelligatur; ſit vero & aliud triangulum ſcalenum FAG, axem eundem habens AD, & baſin FG æqualem baſi BC; etiam hoc triangulum, ex E ſuſpenſum, priori BAC iſochronum eſſe dico.

Quia enim virga, ſeu linea gravis, FG, affixa virgæ ſine pondere ED in D, ſitu

Du centre d'oscillation.
* Prop. 16 de cette Partie.

pondérable ED et ſuſpendue obliquement au point E, eſt iſochrone avec la verge BC attachée de la même manière en D*, et que la même choſe eſt vraie pour les autres verges de chaque triangle qui coupent l'axe AD aux mêmes points et ſont égales entre elles, il eſt néceſſaire que les triangles entiers, leſquels peuvent être conſidérés comme compoſés de ces lignes ou verges, ſoient iſochrones [1]). Pour les autres figures la démonſtration eſt ſemblable.

PROPOSITION XXII.

Comment on trouve les centres d'oſcillation dans les figures ſolides.

Daus les corps ſolides auſſi on trouvera facilement le centre d'oſcillation à l'aide des théorèmes démontrés plus haut. En effet, ſi un corps ABC [Fig. 111] eſt ſuſpendu à l'axe paſſant par le point E perpendiculairement à cette page et que le centre de gravité eſt F, qu'on mène par F les plans EFD, GFH dont le dernier eſt parallèle à l'horizon et dont l'autre paſſe par l'axe E et qu'on cherche d'après la Prop. XIV les ſommes des carrés des diſtances des particules du corps ABC au plan GFH, et de même au plan EFD, c.à.d. deux rectangles qui, multipliés par le nombre des dites particules, ſont égaux aux dites ſommes. Ces rectangles diviſés par la diſtance EF entre l'axe de ſuſpenſion et le centre de gravité donneront l'intervalle FK duquel le centre d'agitation K eſt inférieur au centre de gravité F. Ceci eſt clair d'après la Prop. XVIII. Nous en donnerons auſſi quelques exemples.

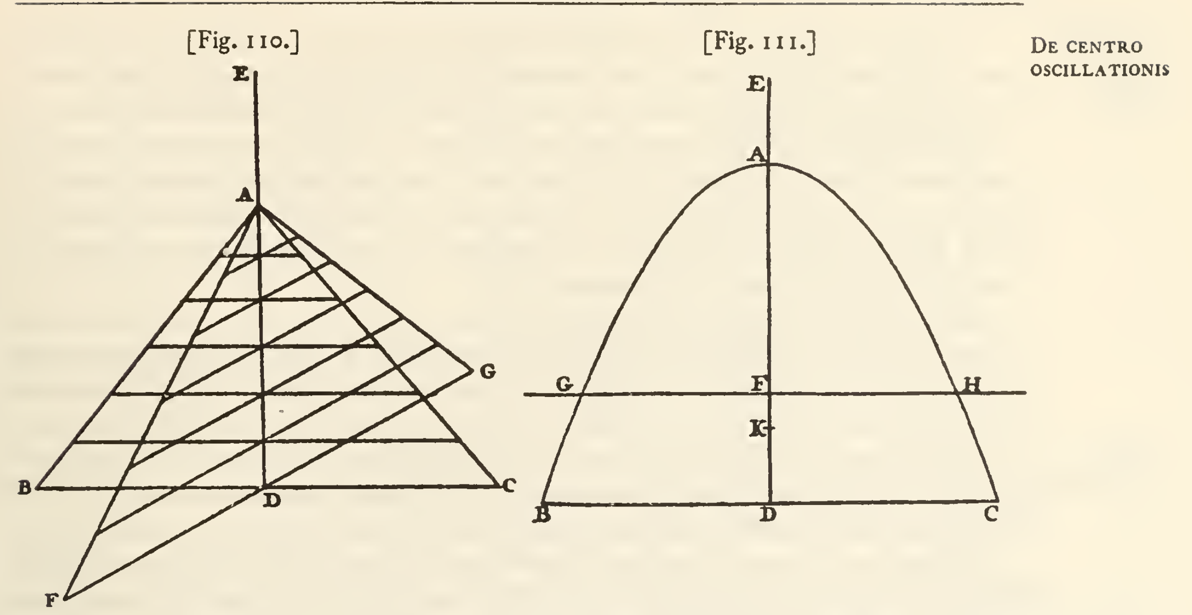
Le centre d'oſcillation de la pyramide.

Soit d'abord [Fig. 112] une pyramide ABC à ſommet A et axe AD, dont la baſe ſoit un carré de côté BC. Et ſuppoſons que ce corps oſcille autour d'un axe paſſant par le ſommet A perpendiculairement au plan de cette page.

---

[1]) Ce raisonnement est fort plausible; toutefois ce n'est pas une véritable démonstration. On peut prouver rigoureusement que, puisque d'après la Prop. XVI citée la ligne basale du triangle AFG oscille avec la même période que celle du triangle ABC, les deux triangles eux-mêmes seront isochrones: d'après la „méthode des trois quarts" (T. XVI, p. 362—367) le pendule isochrone avec l'un et l'autre sera égal au produit de ¾ par la longueur du pendule isochrone avec l'une ou l'autre ligne basale. Toutefois cette démonstration ne s'applique pas au cas du segment droit de parabole. Voir aussi sur ce sujet la p. 50 de l'Avertissement.

De centro oscillationis



obliquo, suspensaque ex E, isochrona est virgæ BC, similiter in D affixæ *; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriusque, quæ axem AD secant in iisdem punctis, atque inter se æquales sunt: necesse est tota triangula, quæ ex lineis, seu virgis iisdem composita intelligi possunt, isochrona esse [1]). In aliis figuris similis est demonstratio. * Prop. 16. huj.

PROPOSITIO XXII.

(p. 139).

Quomodo, in solidis figuris, oscillationis centra inveniantur.

In solidis porro figuris facile quoque, per ante demonstrata, centrum oscillationis invenire licebit. Si enim sit solidum ABC [Fig. 111], suspensum ab axe, qui, per punctum E, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis sit F: ductis jam per F planis EFD, GFH, quorum posterius sit horizonti parallelum, alterum vero per axem E transeat; inventisque, per propositionem 14, summis quadratorum à distantiis particularum solidi ABC à plano GFH, itemque à plano EFD; hoc est, inventis rectangulis utrisque, quæ, multiplicia secundum numerum dictarum particularum, æqualia sint dictis quadratorum summis; rectangula hæc applicata ad distantiam EF, qua nempe axis suspensionis distat à centro gravitatis, dabunt intervallum FK, quo centrum agitationis K inferius est centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propositione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot.

Centrum oscillationis in Pyramide.

Sit primum ABC [Fig. 112] pyramis, verticem habens A, axem AD, basin vero quadratum, cujus latus BC. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, sit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

Du centre d'oscillation.

Ici la figure plane proportionnelle OVV qu'il faut placer à côté du corps d'après la Prop. XIV consistera en des résidus paraboliques OPV, c.à.d. en ce qui reste des rectangles ΩP lorsqu'on en ôte les demiparaboles OVΩ ayant leur sommet commun en O.

En effet, comme sont entre elles les sections BC, NN de la pyramide, ainsi sont aussi entre elles les droites VV, RR qui leur correspondent dans la figure plane; et attendu que le centre de gravité E est situé du sommet de la pyramide à la distance de $\frac{3}{4}$ AD, le centre de gravité F de la figure OVV sera donc également distant du sommet O de trois quarts du diamètre OP.

Considérons ensuite le plan horizontal NE passant par le centre de gravité de la pyramide ABC et coupant la figure OVV suivant RF, et cherchons la subcentrique OG de l'onglet coupé sur la figure OVV par un plan passant par OΩ (on trouve OG = $\frac{4}{5}$ du diamètre OP); le rectangle OFG, multiplié par le nombre des particules de la figure OVV, sera égal aux carrés des distances à la droite RF* et par conséquent aussi aux carrés des distances au plan NE, des particules du corps ABC. Or, le rectangle OFG devient égal à $\frac{3}{80}$ fois le carré OP ou AD.

* Prop. 10 de cette Partie.

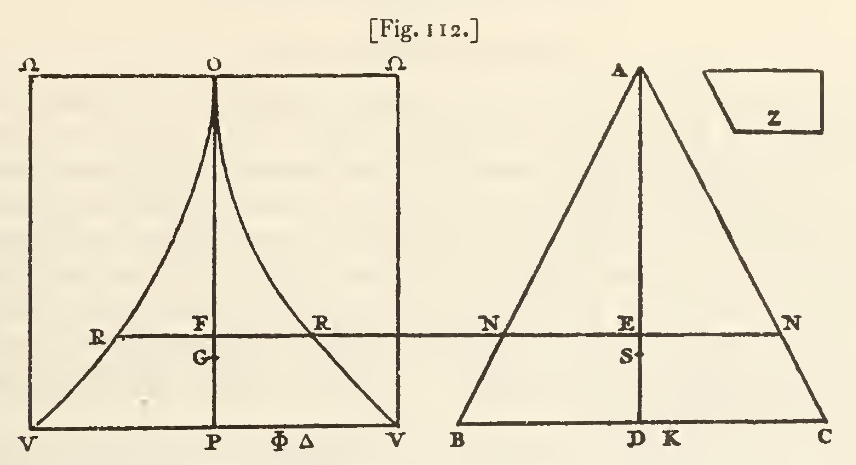
Ensuite, pour trouver la somme des distances au plan AD, il faut connaître d'abord la subcentrique de l'onglet coupé sur la base carrée de la pyramide BC par un plan passant par la droite en B parallèle à l'axe A. Soit BK cette subcentrique laquelle est égale à $\frac{2}{3}$BC. Il faut connaître de même la distance à OP du centre de gravité de la demi-figure OPV; soit cette distance ΦP laquelle est égale à $\frac{3}{10}$PV. Après cela, si l'on divise PV en deux parties égales en Δ et que, comme ΔP est à PΦ, c.à.d. comme 5 est à 3, on prend le rectangle BDK, qui vaut $\frac{1}{12}BC^2$, à un autre espace Z, ce dernier, multiplié par le nombre des particules du corps ABC, sera égal aux carrés des distances au plan AD *. Or, il apparaît que l'espace Z devient égal à $\frac{1}{20}BC^2$.

* Prop. 15 de cette Partie.

Il s'ensuit que l'espace entier qu'il faut diviser par une droite est égal ici à $\frac{3}{80}AD^2 + \frac{1}{20}BC^2$. Par conséquent, si la suspension est en A, sommet de la pyramide, comme nous l'avons supposé, et que la droite dont nous parlions est donc AE ou $\frac{3}{4}$AD, il en résultera que ES, intervalle dont le centre d'agitation est situé au-dessous du centre de gravité, est égal à $\frac{1}{20}$AD augmenté de $\frac{1}{15}$ de la troisième proportionnelle à AD et BC. En d'autres termes la longueur AS entière sera égale à $\frac{4}{5}$AD plus la dite quinzième partie de la troisième proportionnelle.

[Fig. 112.]

De centro oscillationis



Hic figura plana proportionalis OVV, à latere adponenda, secundum propositionem 14, constabit ex residuis parabolicis OPV, quæ nempe supersunt, cum, à rectangulis ΩP, auferuntur semiparabolæ OVΩ, verticem habentes O.

Sicut enim inter se sectiones pyramidis BC, NN, ita quoque rectæ VV, RR, ipsis (p. 140). in figura plana respondentes. & sicut centrum gravitatis E distat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis AD, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ OVV, distabit tribus quartis diametri OP à vertice O.

Intellecto porro horizontali plano NE, per centrum gravitatis pyramidis ABC, quod idem figuram OVV secet secundum RF; inventâque subcentricâ cunei, super figura OVV abscissi plano per OΩ, quæ subcentrica sit OG (est autem $\frac{4}{5}$ diametri OP) erit rectangulum OFG, multiplex per numerum particularum figuræ OVV, æquale quadratis distantiarum ab recta RF *, ac proinde quoque quadratis distantiarum à plano NE, particularum solidi ABC. Fit autem rectangulum OFG æquale $\frac{3}{80}$ quadrati OP, vel quadrati AD. * Prop. 10. huj.

Deinde, ad inveniendam summam quadratorum à distantiis à plano AD, noscenda primo subcentrica cunei, super quadratâ basi pyramidis BC abscissi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ subcentrica sit BK; estque $\frac{2}{3}$BC. Noscenda item distantia centr. gr. dimidiæ figuræ OPV ab OP; quæ sit ΦP; estque $\frac{3}{10}$PV. Inde, divisâ bifariam PV in Δ, si fiat ut ΔP ad PΦ, hoc est, ut 5 ad 3, ita rectangulum BDK, quod est $\frac{1}{12}$ quadrati BC, ad aliud spatium Z; erit hoc, multiplex secundum numerum particularum solidi ABC, æquale quadratis distantiarum à plano AD *. Apparet autem fieri spatium Z æquale $\frac{1}{20}$ quadrati BC. * Prop. 15. huj.

Itaque, totum spatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{80}$ quadrati AD, cum $\frac{1}{20}$ quadrati BC. Unde, si suspensio, ut hic, posita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque distantia, ad quam applicatio facienda, | AE æqualis $\frac{3}{4}$ AD; fiet hinc ES, intervallum (p. 141). quo centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æquale $\frac{1}{20}$AD, atque insuper $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis duabus AD, BC. sive tota AS æqualis $\frac{4}{5}$ AD, præter dictam $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis.

Du centre d'oscil-lation.

Le centre d'oscillation du cône.

Que si ABC [Fig. 112] est un cône, toutes choses seront les mêmes à cela près qu'ici l'espace Z devient égal au rectangle ΔPΦ *, c.à.d. à $\frac{3}{20}$PV² ou $\frac{3}{20}$BD², ou $\frac{3}{80}$BC². C'est pourquoi l'espace entier qu'il faut diviser par une droite sera dans le cas du cône $\frac{3}{80}$AD² + $\frac{3}{80}$BC². Par conséquent, le sommet A étant par hypothèse le point de suspension, la longueur ES de laquelle le centre d'agitation est inférieur au centre de gravité, deviendra égale à $\frac{1}{20}$AD plus $\frac{1}{20}$ de la troisième proportionnelle aux deux grandeurs AD et BC. En d'autres termes, la longueur AS entière deviendra égale à $\frac{4}{5}$AD plus $\frac{1}{5}$ de la troisième proportionnelle aux deux grandeurs AD et DB [1]). Par là il est manifeste que si AD et DB sont égales, c.à.d. si le cône ABC est rectangle, AS devient égale à l'axe AD.

* Prop. 15 de cette Partie.

Il résulte aussi de la Prop. XX que ce cône rectangle, si on le suspend au point D, centre de sa base, sera isochrone avec lui-même suspendu au sommet A, propriété analogue à celle du triangle rectangle, dont nous avons donné la démonstration ci-dessus.

Le centre d'oscillation de la sphère.

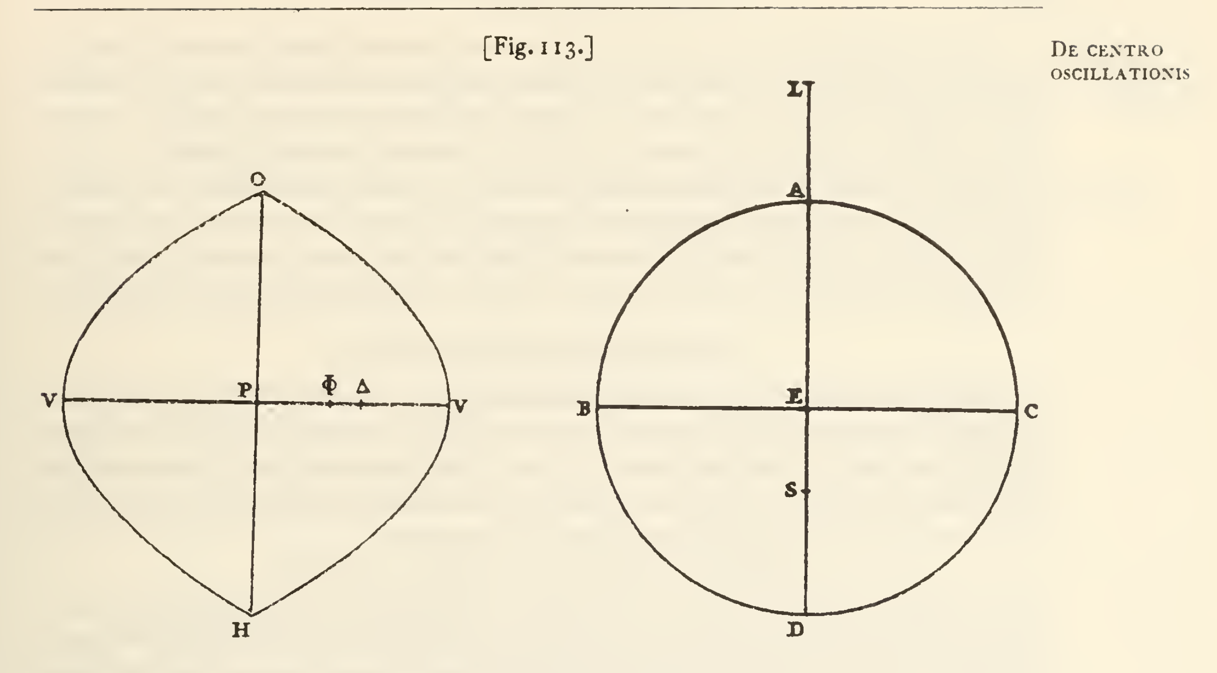
Si ABC [Fig. 113] est une sphère, la figure plane proportionnelle OVH qu'il faut placer à côté d'elle sera composée de paraboles dont la base commune OH est égale au diamètre AD de la sphère. La sphère étant coupée par des plans passant par le centre E, dont BC est un plan horizontal et AD un plan vertical, il faut connaître, pour qu'on puisse trouver la somme des carrés des distances au plan AD, la distance à OH du centre de gravité de la parabole OVH, laquelle soit ΦP. Sa longueur est de $\frac{2}{5}$VP. Ensuite, PV étant divisée en deux parties égales en Δ, on fait que le rectangle ΔPΦ, multiplié par le nombre des particules de la sphère ABC, devient égal aux carrés des distances du plan AD *. Or, le rectangle ΔPΦ est égal à $\frac{1}{5}$PV² ou $\frac{1}{5}$BE².

* Prop. 15 de cette Partie.

[1]) Comparez sur ce résultat la p. 368 du T. XVI.

De centro oscillationis

[Fig. 113.]



Centrum oſcillationis Coni.

Quod ſi ABC [Fig. 112] conus fuerit, omnia eodem modo ſe habebunt, niſi quod ſpatium Z hic ſit æquale rectangulo ΔPΦ *, hoc eſt $\frac{3}{20}$ quadrati PV vel BD, ſive $\frac{3}{80}$ quadrati BC. * Prop. 15. huj. Quare, totum ſpatium applicandum, in cono erit $\frac{3}{80}$ quadrati AD, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati BC. Ac proinde, poſita ſuſpenſione ex vertice A, fiet ES, qua centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{20}$AD, & $\frac{1}{20}$ tertiæ proportionalis duabus AD, BC. ſive tota AS æqualis $\frac{4}{5}$AD, una cum $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis duabus AD, DB [1]). Atque hinc manifeſtum eſt, ſi AD, DB æquales ſint, hoc eſt, ſi conus ABC ſit rectangulus, fieri AS æqualem axi AD.

Sequitur quoque porro, ex propoſitione 20, conum hunc rectangulum, ſi ex D centro baſeos ſuſpendatur, iſochronum fore ſibi ipſi ex vertice A ſuſpenſo, quemadmodum & de triangulo rectangulo ſupra oſtenſum fuit.

Centrum oſcillationis Sphæræ.

Sit ABC [Fig. 113] ſit ſphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, OVH, ex parabolis compoſita, quarum baſis communis OH, æqualis ſphæræ diametro AD. Sectâ vero ſphærâ planis per centrum E, quorum BC ſit horizonti parallelum, AD vero verticale: ut inveniatur ſumma quadratorum à diſtantiis à plano AD, noſcenda eſt diſtantia centri gr. parabolæ OVH ab OH, quæ ſit ΦP, eſtque $\frac{2}{5}$VP. Deinde, diviſâ PV bifariam in Δ, conſtat rectangulum ΔPΦ, multiplex per numerum particularum ſphæræ ABC, æquari quadratis diſtantiarum à plano AD *. Eſt autem rectangulum ΔPΦ æquale $\frac{1}{5}$ quadrati PV, vel quadrati BE. * Prop. 15. huj.

Du centre d'oscillation.

Or, il apparaît que les carrés des diſtances au plan BC ſont égaux aux carrés des distances au plan AD, partant au même rectangle ΔPΦ multiplié par le dit nombre de particules. L'eſpace qu'il faut diviſer par une droite ſera donc, dans le cas de la ſphère ABC, le double du rectangle ΔPΦ et par conſéquent égal à $\frac{2}{5}EB^2$.

Par conſéquent, ſi la ſphère eſt ſuſpendue en un point A de ſa ſurface, ES, diſtance de ſon centre E au centre d'agitation S, ſera égale à $\frac{2}{5}$ fois le rayon AE, et AS entière ſera égale à $\frac{7}{10}$ AD. Mais ſi la ſphère eſt ſuſpendue à un autre point tel que L, ES ſera égale aux $\frac{2}{5}$ d'une troiſième proportionnelle aux deux grandeurs LE et EB [1]).

Le centre d'oſcillation du cylindre.

Nous avons trouvé que dans le cylindre l'eſpace qu'il faut diviſer par une droite eſt égale à $\frac{1}{12}$ du carré de la hauteur augmenté d'un quart de la baſe. Il en réſulte que lorſque le cylindre eſt ſuſpendu au centre de ſa baſe ſupérieure, la longueur du pendule iſochrone devient égale aux $\frac{2}{3}$ de ſon hauteur plus la moitié de la grandeur qui eſt au rayon de la baſe comme celui-ci eſt à la hauteur.

Le centre d'oſcillation du conoïde parabolique.

Dans le conoïde parabolique le rectangle d'oſcillation eſt $\frac{1}{18}$ du carré de la hauteur augmenté de $\frac{1}{6}$ du carré du rayon de la baſe. Par conſéquent, ſi le conoïde eſt ſuſpendu à ſon ſommet, la longueur du pendule iſochrone devient égal aux $\frac{3}{4}$ de l'axe, plus un quart d'une ligne qui eſt au rayon de la baſe comme celui-ci eſt à l'axe, c.à.d. plus $\frac{1}{4}$ du latus rectum de la parabole engendrante [2]).

Le centre d'oſcillation du conoïde hyperbolique.

On peut auſſi trouver le centre d'oſcillation dans le conoïde hyperbolique. Si nous conſidérons par exemple le conoïde [Fig. 114] dont la ſection par l'axe eſt l'hyperbole BAB et qui a l'axe AD et le latus transverſum AF, la figure plane qui lui eſt proportionnelle ſera BKAKB, compriſe entre la baſe BB et les arcs paraboliques ſymétriques AKB paſſant l'un et l'autre par le ſommet A et ayant pour axe commun la ligne GE parallèle à la baſe BB et diviſant en deux parties égales le latus transverſum AF. Le centre de gravité L de cette figure BKAKB eſt donc à la même diſtance du ſommet A que celui du conoïde ABB, et l'axe AD eſt à AL dans le rapport 3 FA + 2 AD : 2 FA + $\frac{3}{2}$ AD. Enſuite on peut auſſi trouver la diſtance à AD du centre de gravité de la demi-figure ADBK ainſi que la ſubcentrique par rapport à AP de l'onglet coupé ſur la figure BKAKB par un plan paſſant per AP parallèle à BB; et de ces données on peut conclure à la ſituation du centre d'agitation du conoïde pour une ſuſpenſion quelconque, pourvu que l'axe autour duquel le conoïde oſcille ſoit paral-

---

[1]) Voir sur d'autres méthodes pour calculer la place du centre d'oscillation de la sphère les p. 470–472 et 473—475 du T. XVI.

Atqui, quadrata diſtantiarum à plano BC, æqualia eſſe liquet quadratis diſtantiarum à plano AD, ac proinde eidem rectangulo ΔPΦ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo ſpatium applicandum, in ſphæra ABC, erit duplum rectanguli ΔPΦ; ideoque æquale $\frac{2}{5}$ quadrati à radio EB. De centro oscillationis

Itaque, ſi ſphæra ſuſpenſa ſit ex puncto in ſuperficie ſua A, erit | ES, à centro ſphæræ (p. 142). E ad centrum agitationis S, æqualis $\frac{2}{5}$ ſemidiametri AE. Totaque AS æqualis $\frac{7}{10}$ diametri AD. Si vero ex puncto alio, ut L, ſphæra ſuſpenſa ſit; erit ES æqualis $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis duabus LE, EB [1]).

Centrum oſcillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus ſpatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à ſemidiametro baſis. Unde, ſi cylindrus à centro baſis ſuperioris ſuſpendatur, ſit longitudo penduli iſochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum ſemiſſe ejus, quæ ſit ad ſemidiametrum baſis ut hæc ad altitudinem.

Centrum oſcillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oſcillationis eſt $\frac{1}{18}$ quadrati altitudinis, cum $\frac{1}{6}$ quadrati à ſemidiametro baſis. Unde, ſi à puncto verticis fuerit ſuſpenſum, ſit longigitudo penduli iſochroni $\frac{2}{3}$ axis, cum $\frac{1}{2}$ ejus quæ ſit ad ſemidiametrum baſis, ſicut hæc ad axem, id eſt, una cum $\frac{1}{4}$ lateris recti parabolæ genitricis [2]).

Centrum oſcillationis Conoidis Hyperbolici.

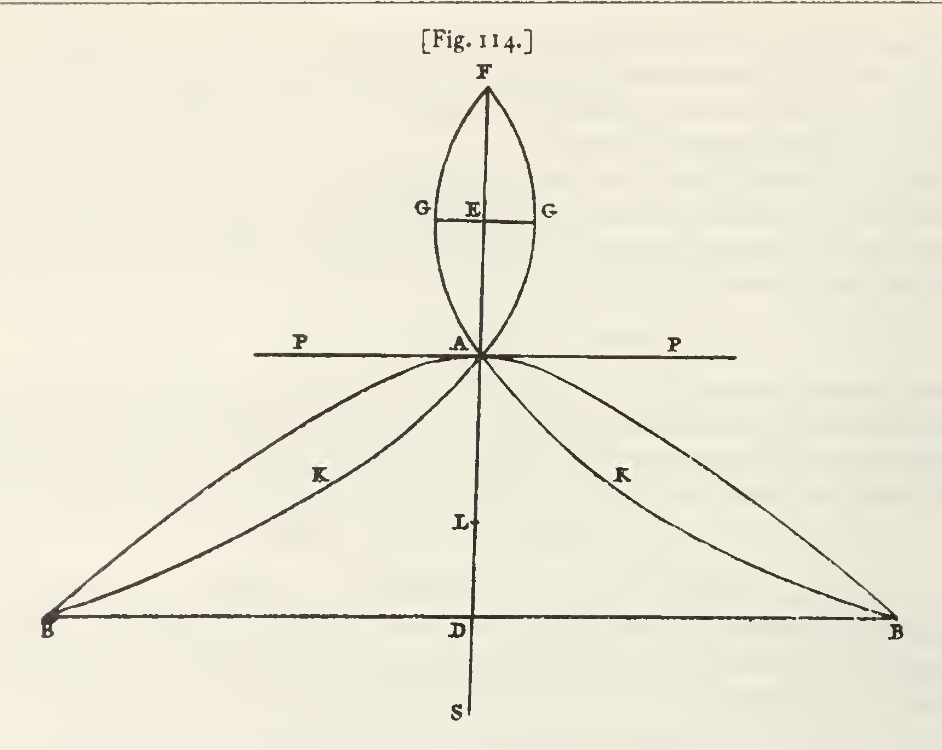
In conoide quoque hyperbolico centrum oſcillationis inveniri poteſt. Si enim, exempli gratia, ſit conoides [Fig. 114] cujus ſectio per axem, hyperbola BAB; axem habens AD, latus tranſverſum AF: erit figura plana ipſi proportionalis BKAKB, contenta baſi BB, | & parabolicæ lineæ portionibus ſimilibus AKB, quæ parabolæ per (p. 143). verticem A tranſeunt, axemque habent GE, dividentem bifariam latus tranſverſum AF, ac parallelum baſi BB. Et hujus quidem figuræ BKAKB, centrum gravitatis L, tantum diſtat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis ABB; eſtque axis AD ad AL, ſicut tripla FA cum dupla AD, ad duplam FA cum ſeſquialtera AD. Deinde & diſtantia centri gr. figuræ dimidiæ ADBK, ab AD, inveniri poteſt, atque etiam ſubcentrica cunei ſuper figura BKAKB, abſciſſi plano per AP, parallelam BB; hujus inquam cunei ſubcentrica, ſuper ipſa AP, inveniri quoque poteſt; atque ex his conſequenter centrum agitationis conoidis, in quavis ſuſpenſione; dummodo axis, circa

---

[2]) Comparez les p. 483—486 du T. XVI.

Du centre d'oscillation.

[Fig. 114.]



lèle à sa base. Je trouve que si l'on prend l'axe AD égal au latus transversum AF, l'espace qu'il faut diviser par une droite devient égal à $\frac{1}{20}$ AD² + $\frac{31}{200}$ DB²; et on a alors AL = $\frac{7}{10}$ AD.

Par conséquent, lorsque le conoïde considéré est suspendu au sommet A, la longueur AS du pendule isochrone est trouvée égale à $\frac{27}{35}$ AD, plus $\frac{31}{140}$ de la troisième proportionnelle aux deux grandeurs AD et DB [1]).

Le centre d'oscillation du demi-cône.

On pourra enfin trouver le centre d'oscillation aussi dans certaines moitiés de solides divisés par une section par l'axe. Par exemple dans le cas du demi-cône ABC [Fig. 115] ayant son sommet en A et BC pour rayon de la base. Le centre de gravité de ce corps est connu puisque AD = $\frac{3}{4}$ AE, où AE divise BC en E de telle manière que le rapport $\frac{2}{3}$ CB : BE est égal à celui d'un quart de circonférence de cercle à son rayon.

En effet, E est alors le centre de gravité du demi-cercle qui constitue la base et sur AE se trouvent donc les centres de gravité de tous les segments parallèles à la base du demi-cône ABD.

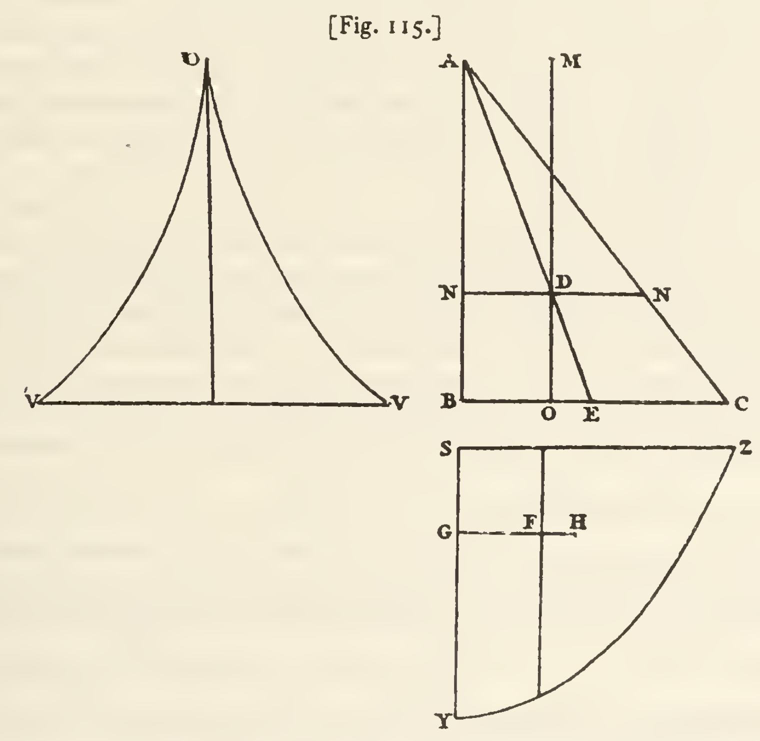
Or, la figure proportionnelle OVV qu'il faut placer à côté de la figure est la même que celle décrite dans le cas du cône entier: cette figure sert, comme l'on sait, à trouver la somme des carrés des distances des particules du demi-cône au plan horizontal

quem movetur, ſit baſi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, ſi axis AD lateri transverſo AF æqualis ponatur, ſpatium applicandum æquari $\frac{1}{20}$ quadrati AB, cum $\frac{31}{200}$ quadrati DB. Tunc autem AL eſt $\frac{7}{10}$AD. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Unde, ſi conoides hujuſmodi ex vertice A ſuſpendatur, invenitur longitudo penduli iſochroni, AS, æqualis $\frac{27}{35}$AD, cum $\frac{31}{140}$ tertiæ proportionalis duabus AD, DB [1]).

Centrum oſcillationis dimidii Coni.

[Fig. 115.]



Denique & in ſolidis dimidiatis quibuſdam, quæ fiunt ſectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Ut ſi ſit conus dimidiatus ABC [Fig. 115], verticem habens A, diametrum ſemicirculi baſeos BC: ejus quidem centrum gravitatis D notum eſt, quoniam AD eſt $\frac{3}{4}$ rectæ AE, ita dividentis BC in E, ut, ſicut quadrans circumferentiæ circuli ad radium, ita ſint $\frac{2}{3}$CB ad BE. Tunc enim E eſt centrum gravitatis ſemicirculi baſeos, ideoque in AE centra gravitatis omnium ſegmentorum ſemiconi ABD, baſi parallelorum. (p. 144).

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, OVV, eadem eſt quæ in cono toto ſupra deſcripta fuit: per quam nempe invenietur ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſemiconi à plano horizontali ND, per centrum gravitatis ducto.

[1]) Comparez les p. 550—555 du T. XVI.

Du centre d'oscillation.

ND mené par le centre de gravité. Mais pour apprendre à connaître les carrés des diſtances au plan vertical MDO il ſaut encore faire uſage d'une autre figure proportionnelle SYZ, telle qu'elle eſt mentionnée dans la Prop. XIV, ſavoir une figure dont les ſections verticales préſentent des lignes proportionnelles aux ſections correſpondantes du demi-cône ABC; et de cette figure il faut connaître la diſtance à SY du centre de gravité F, diſtance apparemment égale à celle, DN, du centre de gravité du demi-cône au plan du triangle AB. Si nous appelons HG la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur la figure SZY par un plan paſſant par SY, il faut connaître le rectangle GFH qui, multiplié par le nombre des particules du demi-cône ABC, ſera égal aux carrés des diſtances du demi-cône au plan MDO. Or, il ſera poſſible d'apprendre à connaître de la manière ſuivante ce rectangle GFH, même lorſqu'on ignore la longueur de la ſubcentrique HG.

Nous avons dit plus haut, en parlant du cône, que les carrés des diſtances à un plan paſſant par ſon axe ſont égaux à $\frac{3}{80}$ fois le carré du diamètre de ſa baſe ou bien à $\frac{3}{20}$ du carré de ſon rayon multiplié par le nombre des particules du cône entier. Il s'enſuit qu'ici auſſi, dans le demi-cône ABC, les carrés des diſtances au plan AB ſeront égaux au produit de $\frac{3}{20}$ BC^2 par le nombre des particules du demi-cône. Mais le rectangle HGF, multiplié par le nombre des particules du demi-cône ABC, eſt auſſi égal aux carrés des diſtances au plan AB, comme cela réſulte de la Prop. IX. Par conſéquent le rectangle HGF eſt égal à $\frac{3}{20}$ BC^2. Or, ſi l'on poſe $AB = a$, $BC = b$ et le quart de la circonférence décrite avec le rayon $BC = q$, on aura $EB = \frac{2b^2}{3q}$. Et comme ND eſt égale aux trois quarts de cette dernière longueur, il en réſultera que ND ou GF eſt égale à $\frac{1}{2}\frac{b^2}{q}$. En retranchant le carré de cette expreſſion du rectangle HGF qui était égal à $\frac{3}{20}$ BC^2, on en conclura que le rectangle GFH eſt égal à $\frac{3}{20}b^2 - \frac{1}{4}\frac{b^4}{q^2}$. Et ce rectangle, multiplié par le nombre des particules du demi-cône ABC, eſt égal aux carrés des diſtances au plan MDO. Mais aux carrés des diſtances au plan ND eſt égal, comme dans le cas du cône, le produit de $\frac{3}{80}$ AB^2 ou $\frac{3}{80}a^2$ par le nombre des particules du demi-cône ABC. Par conſéquent l'eſpace total qu'il faut diviſer par une droite ſera égal ici à $\frac{3}{80}a^2 + \frac{3}{20}b^2 - \frac{1}{4}\frac{b^4}{q^2}$.

Ce réſultat permet de trouver le centre d'agitation pour toute ſuſpenſion du demi-cône, du moins s'il eſt ſuſpendu à un axe parallèle à la baſe du triangle AB réſultant de la ſection du cône. On peut encore remarquer que, malgré le fait que la figure SZY eſt d'une nature abſolument inconnue, la ſubcentrique GH correſpondant à un onglet coupé ſur elle par un plan paſſant par SY, eſt trouvée par les conſidérations qui précèdent. Car, comme le rectangle HGF s'eſt montré égal à $\frac{3}{20}b^2$ ou $\frac{3}{20}$ BC^2, et $GF = \frac{1}{2}\frac{b^2}{q}$, il en réſulte que $GH = \frac{3}{10}q$.

Verum quadrata diſtantiarum, à plano verticali MDO, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis SYZ, ſicut ſupra prop. 14. adhibenda eſt, cujus nempe ſectiones verticales, exhibeant lineas proportionales ſectionibus ſibi reſpondentibus in ſemicono ABC. & hujus figuræ cognoſcenda eſt diſtantia centri gr. F ab SY, quam æqualem eſſe conſtat diſtantiæ DN, centri gr. ſemiconi à plano trianguli AB. poſitâque HG ſubcentricâ cunei abſciſſi ſuper figura SZY, ducto plano per SY, noſcendum eſt rectangulum GFH, cujus nempe multiplex, ſecundum numerum particularum ſemiconi ABC, æquabitur quadratis diſtantiarum ſemiconi in planum MDO. Licebit vero cognoſcere rectangulum illud GFH, etiamſi ſubcentricæ HG longitudo ignoretur, hoc modo. De centro oscillationis

Diximus ſupra, cum de cono ageremus, quadrata diſtantiarum | à plano per axem ejus, æquari $\frac{3}{80}$ quadrati à diametro baſis, ſive $\frac{3}{20}$ quadrati à ſemidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Unde & hic, in ſemicono ABC, quadrata diſtantiarum à plano AB æqualia erunt $\frac{3}{20}$ quadrati BC, multiplicis per numerum particularum ipſius ſemiconi. Sed & rectangulum HGF, muliiplex per numerum particularum ſemiconi ABC, æquatur quadratis diſtantiarum à plano AB, ut patet ex propoſitione 9. Ergo rectangulum HGF æquale $\frac{3}{20}$ quadrati BC. Ponendo autem AB ∞ a; BC ∞ b; & quadrantem circumferentiæ, radio BC deſcriptæ, ∞ q; ſit EB ∞ $\frac{2bb}{3q}$. Cujus cum ND tribus quartis æquetur, fiet proinde ND, ſive GF ∞ $\frac{1bb}{2q}$. Cujus quadratum auferendo à rectangulo HGF, quod erat $\frac{3}{20}$ quadrati BC, fiet rectangulum GFH ∞ $\frac{3}{20}$ BB — $\frac{1b^4}{4qq}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum ſemiconi ABC, æquatur quadratis diſtantiarum à plano MDO. At quadratis diſtantiarum à plano ND æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati AB, ſive $\frac{3}{80}aa$, multiplices per numerum particularum ſemiconi ABC. Itaque, totum ſpatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80}aa + \frac{3}{20}bb - \frac{1b^4}{4qq}$. (p. 145).

Unde quidem centrum agitationis invenitur in omni ſuſpenſione ſemiconi, dummodo ab axe qui ſit parallelus baſi trianguli à ſectione AB. Notandum vero, cum figura SZY ſit ignotæ prorſus naturæ, ſubcentricam tamen GH, cunei ſuper ipſa abſciſſi plano per SY, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum HGF æquale erat $\frac{3}{20}bb$, ſive quadrati BC, & GF æqualis $\frac{1bb}{2q}$, fit inde GH æqualis $\frac{3}{10}q$.

Du centre d'oscillation.

On pourra trouver en outre les centres d'agitation du demi-cylindre, du demi-conoïde parabolique [1]), et encore d'autres moitiés de ſolides, ce dont nous laiſſons la recherche à d'autres.

Ce que nous avons dit du centre d'agitation dans le cas de figures planes obliques, qui s'obtiennent pour ainſi dire par une luxation des figures droites, s'applique auſſi au cas des figures ſolides: les centres d'oſcillation des figures obliques ne diffèrent pas de ceux des figures droites. Par exemple, ſi ABC et AFG [Fig. 110] ſont deux cônes, l'un droit, l'autre ſcalène, ayant le même diamètre et des baſes égales, et ſi l'un et l'autre ſont ſuſpendus au ſommet ou à des axes quelconques également diſtants de leurs centres de gravité, ils feront iſochrones, pourvu que l'axe d'oſcillation du cône ſcalène ſoit perpendiculaire au plan du triangle diamétral qui eſt normal au plan de la baſe [2]).

PROPOSITION XXIII.

Régler le mouvement des horloges par l'addition d'un petit poids ſupplémentaire pouvant être mu vers le haut ou vers le bas ſur la verge d'un pendule diviſée en certaine manière [3]).

Pour arriver à ce réſultat, il faut d'abord trouver le centre d'oſcillation du pendule lui-même compoſé de ſa verge pondérable et du poids qui y eſt ſuſpendu à l'extrémité inférieure.

Soit AC ou a la longueur de la verge portant le poids [Fig. 116]. Repréſentons-nous la verge et le poids C qui y eſt ſuſpendu diviſés en particules égales extrêmement petites; que la verge ait b et le poids C c de ces particules, le rapport $b : c$ étant évidemment celui de la gravité de la verge à celle du poids qui y eſt attaché. La longueur d'un pendule ſimple iſochrone avec le pendule donné s'obtiendra donc en diviſant la ſomme des carrés des diſtances de toutes les particules au point de ſuſpenſion A par

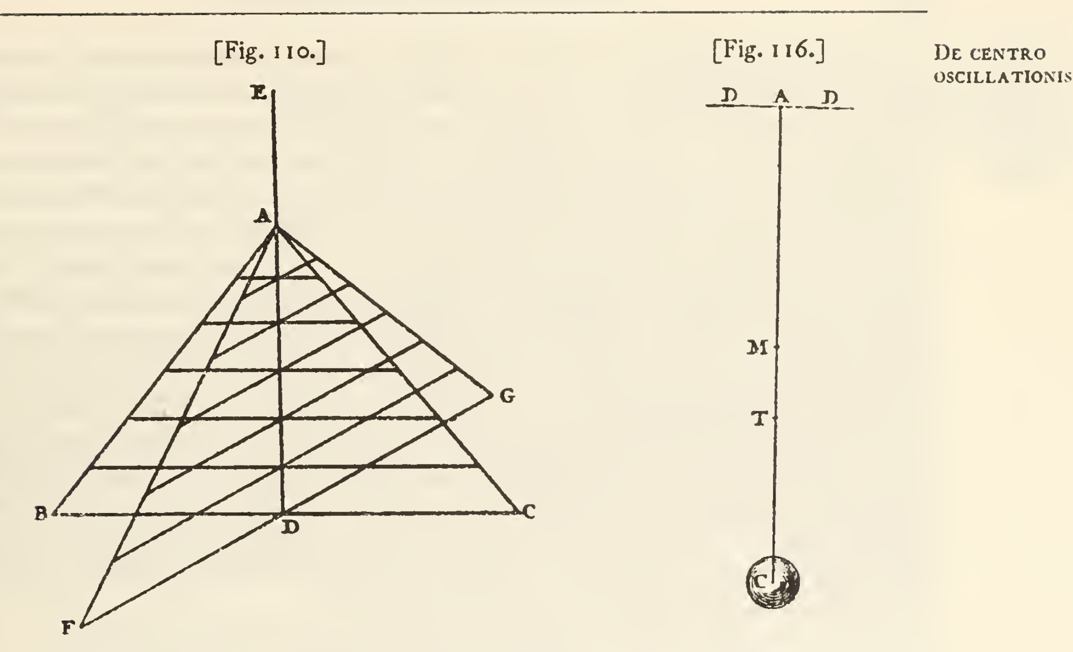
---

[1]) Voir la partie C de l'Appendice II à la Pars Quarta.

[2]) Comparez la note 1 de la p. 326 qui précède et les p. 367—368 („méthode des quatre cinquièmes") du T. XVI.

[3]) Voir les p. 353—354 et 425—433 du T. XVI, ainsi que les p. 28 (note 2), 105—111 et 150—151 du T. XVII.

De centro oscillationis



Porro, etiam femicylindri, & femiconoidis parabolici [1]), centra agitationis inveniri poffunt, atque aliorum infuper femifolidorum; quæ aliis inveftiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in folidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum conftituuntur, quarum centra ofcillationis non differunt à centris ofcillationis rectarum. Sic, fi coni duo fuerunt ABC, AFG [Fig. 110], alter rectus, alter fcalenus; quorum & diametri & bafes æquales; hi ex vertice fufpenfi, vel à quibufcunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis diftantibus, ifochroni erunt; dummodo axis, unde conus fcalenus fufpenfus eft, rectus fit ad planum trianguli per diametrum, quod planum bafi eft ad angulos rectos [2]).

PROPOSITIO XXIII.

(p. 146).

Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo fecundario, quod fuper virga penduli, certa ratione divifa, furfum deorfumque moveri poffit [3]).

Ut hoc expediamus, primo penduli ipfius, ex virga gravitate prædita, & appenfo parte ima pondere, compofiti, centrum ofcillationis inveniendum eft.

Sit virga, cum appenfo pondere, AC, cujus longitudo dicatur a [Fig. 116]. Intelliganrur autem, tum virga ipfa, tum pondus appenfum C, in particulas minimas æquales divifa, earumque particularum virga habeat numerum b, pondus vero C numerum c, ponendo nempe b ad c, ficut gravitas virgæ ad gravitatem appenfi ponderis. Longitudo igitur penduli fimplicis, dato ifochroni, habebitur, fi fumma quadratorum à diftantiis particularum omnium à puncto fufpenfionis A, dividatur per fummam

* Prop. 6 de cette Partie vers la fin.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

la ſomme de ces diſtances *. Soit AC diviſée en deux parties égales au point M et auſſi en T de ſorte que AT = 2 TC. Puiſque M eſt alors le centre de gravité de la ligne AC et AT la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur elle par un plan paſſant par AD perpendiculaire à AC, lequel onglet eſt ici en réalité un triangle, la ſomme des carrés des diſtances au point A des particules de la verge ſera égale à celle du rectangle AMT et du carré de AM, c.à.d. au rectangle TAM multiplié par le nombre b des particules, c.à.d. à $\frac{1}{3}a^2b$, parce que MA $= \frac{1}{2}a$ et TA $= \frac{2}{3}a$ et que le rectangle TAM eſt par conſéquent égal à $\frac{1}{3}a^2$. Mais la ſomme des carrés au même point A des diſtances des particules du poids C ſera égale à AC^2 multiplié par le nombre des particules du poids, c.à.d. à a^2c. Par conſéquent la ſomme de tous les carrés, tant ceux des diſtances des particules de la verge que ceux du poids C, ſera $\frac{1}{3}a^2b + a^2c$.

Or, la ſomme des diſtances des particules de la verge AC au point A eſt égale à $\frac{1}{2}ba$, c.à.d. au produit de la longueur a de la verge par la moitié du nombre de ſes particules. Et la ſomme des diſtances de toutes les particules du poids C au même point A eſt ac. De ſorte que la ſomme des deux groupes de diſtances eſt $\frac{1}{2}ab + ac$. En diviſant par cette expreſſion la ſomme des carrés trouvée plus haut, $\frac{1}{3}a^2b + a^2c$, on obtient pour la longueur du pendule iſochrone:

$$\frac{\frac{1}{3}a^2b + a^2c}{\frac{1}{2}ab + ac} \text{ ou } \frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}.$$

Cette longueur peut donc être conſtruite en faiſant que comme la demi-gravité de la verge augmentée de la gravité du poids qui y eſt attaché eſt au tiers de la gravité de la verge augmenté de celle du poids, ainſi la longueur AC ſe rapporte à une autre. Il faut prendre ici la longueur AC depuis le point de ſuſpenſion A juſqu'au centre de gravité du poids C, puiſque nous ne tenons pas compte dans ce calcul de la grandeur du poids: nous le conſidérons comme occupant un eſpace extrêmement petit.

Suppoſons maintenant qu'outre le poids C, un deuxième D ſoit attaché à la verge [Fig. 117] et que la gravité de D ou le nombre de ſes particules ſoit d, tandis que la diſtance AD $= f$. Pour trouver le pendule ſimple iſochrone avec notre pendule ainſi compoſé, il faut ajouter à la ſomme des carrés conſidérée plus haut les carrés des diſtances au point A des particules du poids D, c.à.d. dff. De ſorte que la ſomme de tous les carrés devient maintenant $\frac{1}{3}a^2b + a^2c + f^2d$. Pareillement il faut ajouter à la ſomme des diſtances celles des particules du poids D, ſavoir df. La ſomme de toutes les diſtances ſera donc $\frac{1}{2}ba + ca + df$. C'eſt par cette expreſſion qu'il faut diviſer la ſomme des carrés dont il eſt queſtion plus haut. On obtient ainſi pour la longueur du pendule iſochrone

$$\frac{\frac{1}{3}a^2b + a^2c + f^2d}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}.$$

Que ſi l'on exige que cette longueur du pendule iſochrone ſoit égale à une longueur donnée p, tout le reſte étant donné comme auparavant à l'exception de la diſtance f

earundem diſtantiarum *. Secetur AC bifariam in M; tum vero in T, ut AT ſit dupla TC. Quia ergo M eſt centrum gravitatis lineæ AC, & AT ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi plano per AD, perpendicularem ad AC; qui cuneus hîc revera triangulum eſt; erit ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum virgæ à puncto A, | æqualis rectangulo AMT, una cum quadrato AM; hoc eſt, rectangulo TAM, multiplici ſecundum numerum particularum b; hoc eſt, $\frac{1}{3}aab$; quia MA eſt $\frac{1}{2}a$, & TA $\frac{2}{3}a$, ac proinde rectangulum TAM ∞ $\frac{1}{3}aa$. Summa vero quadratorum, à diſtantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato AC, multiplici ſecundum numerum particularum ipſius ponderis; hoc eſt, aac. Adeoque ſumma quadratorum omnium, tam à diſtantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $\frac{1}{3}aab + aac$.

* Prop. 6. huj. in fine.

De centro oscillationis (p. 147).

Porro, diſtantiæ omnes particularum virgæ AC à puncto A, æquantur $\frac{1}{2}ba$; longitudini ſcilicet virgæ ipſius, quæ eſt a, multiplici ſecundum ſemiſſem numeri particularum quas continet. Et diſtantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, ſunt ac. Ita ut ſumma utrarumque diſtantiarum ſit $\frac{1}{2}ab + ac$. Per quam dividendo ſummam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{3}aab + aac$, fit $\dfrac{\frac{1}{3}aab + aac}{\frac{1}{2}ab + ac}$ ſive $\dfrac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, longitudo penduli iſochroni. Quæ itaque habebitur, ſi fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appenſi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejuſdem appenſi ponderis, ita longitudo AC ad aliam. Oportet autem ſumere longitudinem AC, à puncto ſuſpenſionis A ad centrum gravitatis ponderis C; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum conſideretur.

[Fig. 117.]

Quod ſi jam, præter pondus C, alterum inſuper D virgæ inhærere intelligatur [Fig. 117], cujus gravitas, ſeu particularum numerus ſit d: diſtantia vero AD ſit f. Ut pendulum ſimplex huic ita compoſito iſochronum inveniatur, addenda ſunt ad ſummam ſuperiorem quadratorum, quadrata diſtantiarum particularum ponderis D à puncto A, quæ quadrata apparet eſſe dff. Adeo ut ſumma omnium jam ſit futura $\frac{1}{3}aab + aac + ffd$. Item, ad ſummam diſtantiarum, addendæ diſtantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt df. Ac ſumma proinde diſtantiarum omnium erit $\frac{1}{2}ba +$ $+ ca + df$; per quam dividenda eſt iſta quadratorum ſumma, & fit $\dfrac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$, longitudo penduli iſochroni.

Quod ſi vero, hæc longitudo penduli iſochroni, datæ æqualis poſtuletur, quæ ſit p, & reliqua omnia quæ prius data ſint, præter | diſtantiam AD ſeu f, quæ determinat (p. 148).

Du centre d'oscillation.

qui détermine la place du poids D, et qu'il faille trouver cette diſtance, le calcul ſera le ſuivant: on demande que

$$\frac{\frac{1}{3}a^2b + a^2c + f^2d}{\frac{1}{2}ab + ac + fd} = p;$$

de cette équation réſulteront les ſuivantes:

$$f^2 = pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}a^2b - a^2c}{d}$$

$$f = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}a^2b - a^2c}{d}}.$$

Où il faut remarquer qu'il y a deux racines vraies lorſque $\frac{1}{2}abp + cap$ eſt inférieur à $\frac{1}{3}a^2b + a^2c$, c.à.d. lorſque la longueur p eſt inférieure à $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, ce qui eſt la longueur auparavant trouvée du pendule iſochrone, ou la diſtance du centre d'oſcillation au point de ſuſpenſion, dans le pendule compoſé de la verge AC et du poids C.

D'où il appert que ſi nous voulons faire en ſorte que par l'application du poids D le mouvement du pendule ſoit accéléré, ce poids peut être placé en deux endroits, tels que D ou E, entre A et C; dans l'un et l'autre cas la même viteſſe du pendule en réſultera. Ces endroits ſeront ſitués à égale diſtance du point N qui ſe trouve à la diſtance $\frac{1}{2}p$ du point A, c.à.d. à une diſtance égale à la moitié du pendule ſimple avec lequel on exigeait que notre pendule compoſé ſerait iſochrone. Or, il eſt clair que lorſque cette longueur p eſt conſidérée comme fort peu inférieure à AC, le point N lui auſſi ne ſera ſitué que fort peu au-deſſus du point milieu de la verge AC [1]).

De l'équation précédente $f = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}a^2b - a^2c}{d}}$

on tire la détermination de la longueur p. En effet, il apparaît que l'expreſſion $\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ doit ne pas être inférieure à $\frac{\frac{1}{3}a^2b + a^2c}{d}$. Par conſéquent p ne devra pas être plus petite que

$$\frac{a}{d}\sqrt{\tfrac{4}{3}bd + 4cd + b^2 + 4bc + 4c^2 - \frac{ab + {}^{2)}2ac}{d}}.$$

Que ſi p eſt égale à cette quantité, c.à.d. ſi

$$\tfrac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d} = \frac{\frac{1}{3}a^2b + {}^{2)}a^2c}{d},$$

on aura dans l'équation précédente $f = \frac{1}{2}p$,

c.à.d. $$f = \frac{a}{2d}\sqrt{\tfrac{4}{3}bd + 4cd + b^2 + 4bc + 4c^2 - \frac{ab + {}^{2)}2ac}{2d}}.$$

locum ponderis D: sitque invenienda hæc distantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum postuletur $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$ æquale p, orietur ex hac æquatione De centro oscillationis

$$ff \infty pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}.$$

$$\text{Et } f \infty \tfrac{1}{2}p + \text{vel} -- \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}.$$

Ubi animadvertendum, duas esse veras radices, si $\frac{1}{2}abp + cap$ minus sit quam $\frac{1}{3}aab + aac$; hoc est, si longitudo p minor sit quam $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli isochroni, sive distantia centri oscillationis à suspensione, in pendulo composito ex virga AC & pondere C.

Unde patet, si velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus, posse duobus locis, inter A & C, illud disponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter distabunt à puncto N, quod abest ab A, semisse longitudinis p, hoc est, semisse penduli simplicis, cui compositum hoc isochronum postulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam AC, etiam punctum N exiguo superius esse puncto medio virgæ AC [1]).

Porro, ex æquatione superiori,

$$f \infty \tfrac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$$

habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ non minus esse debere quam $\frac{\frac{1}{3}aab +^{2)} aac}{d}$. Unde non debebit esse minor quam

$$\frac{a}{d}\sqrt{\tfrac{4}{3}bd + 4\,cd + bb + 4bc + 4cc - \frac{ab +^{2)} 2ac}{d}}.$$

Quod si p æquetur huic quantitati, hoc est, si $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ fuerit æquale $\frac{\frac{1}{3}aab +^{2)} aac}{d}$, erit jam, in eadem superiori æquatione,

$$f \infty \tfrac{1}{2}p, \text{ hoc est, } \frac{a}{2d}\sqrt{\tfrac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc - \frac{ab +^{2)} 2ac}{2d}}.$$

[1]) Comparez la note 9 de la p. 109 du T. XVII.

[2]) L'édition originale et celle de 's Gravesande ont par erreur le signe —.

Du centre d'oscil-lation.

Cette formule détermine une diſtance du poids D au poids A telle que le poids D accélère le mouvement du pendule autant que poſſible.

Pour le réglage des horloges on fait uſage comme ſuit des réſultats obtenus. Conſidérons par exemple un pendule d'horloge qui marque les ſecondes par chacune de ſes oſcillations ſimples. Que la gravité de la verge ſoit $\frac{1}{50}$ de celle du poids ſuſpendu au bas du pendule; qu'il y ait outre ce poids-là un autre petit poids mobile le long de la verge et dont nous ſuppoſons la gravité préciſément égale à celle de la verge. On demande où il faut placer ce poids ſur la verge pour que le mouvement de l'horloge ſoit accéléré d'une minute dans un eſpace de 24 heures. De même où il faut le placer pour obtenir une accélération de deux, de trois, de quatre ou d'un plus grand nombre de minutes.

En multipliant le nombre vingt-quatre des heures par ſoixante, on obtient 1440, nombre des minutes compriſes en un jour. Retranchez-en une, lorſqu'il s'agit d'une accélération d'une miuute: il en reſte 1439. Or, le rapport des carrés de 1440 et de 1439 eſt à peu près le même que celui des nombres 1440 et 1438. Par conſéquent, ſi la longueur du pendule ſimple qui marque les ſecondes eſt diviſée par la penſée en 1440 parties égales et qu'on attribue 1438 de ces parties à un autre pendule, ce dernier avancera par rapport au premier d'une minute en 24 heures. De ſorte que p eſt ici de 1438 parties.

Puiſque le pendule de l'horloge, compoſé de la verge métallique et du poids qui y eſt ſuſpendu, eſt ſuppoſé iſochrone avec un pendule ſimple de 1440 parties [1]), il faut d'abord trouver la longueur de cette verge d'après l'équation ſus-énoncée. C'eſt l'expreſſion $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ qui à été trouvée egale à la longueur du pendule ſimple iſochrone avec celui compoſé d'une verge de longueur a et de gravité b et d'un poids y attaché de gravité c. Par conſéquent, ſi la longueur du pendule ſimple iſochrone eſt appelée s, on aura $\frac{\frac{1}{2}bs + cs}{\frac{1}{3}b + c} = a$; et en poſant, dans le cas conſidéré, $c = 50$, $b = 1$, $f = 1440$, on aura pour la longueur de la verge $a = 1444\frac{4}{5}$.

Enſuite, puiſque nous avions $f = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}a^2b - a^2c}{d}}$,

on aura $f = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + 72962\,p - 105061210}$; et, p étant de 1438 parties comme nous l'avons dit, on trouvera $f = 1331\frac{1}{2}$. Il eſt queſtion de parties telles que s, longueur du pendule ſimple qui marque les ſecondes par ſes oſcillations, en contient 1440. Si nous déſignons cette dernière longueur per trois pieds horaires, comme nous l'avons déjà fait, f aura 33 pouces et 3 douzièmes de pouce, qu'on appelle lignes. En d'autres termes, pour connaître le lieu du poids D qui donne une accélération d'une minute en 24 heures, il faut retrancher cette dernière longueur f de

Quo determinatur diſtantia ponderis D à puncto A, ex qua maxime omnium acceleret motum penduli. DE CENTRO OSCILLATIONIS

Atque hæc ad horologiorum uſum ſic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod ſingulis oſcillationibus ſcrupula ſecunda notet. Virgæ autem gravitas ſit $\frac{1}{50}$ gravitatis appenſi ponderis in imo pendulo: &, præter hoc, ſit aliud exiguum pondus mobile ſecundum virgæ longitudinem, cujus gravitas eaſdem pona-|tur quæ ipſius virgæ. (p. 149). Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno ſcrupulo primo acceleretur horologii motus, ſpatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum ſcrupulorum primorum ſit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro.

Ductis viginti quatuor horis ſexagies, fiunt 1440, quot nempe ſcrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius ſcrupuli acceleratio quæritur: ſuperſunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime eſt ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, ſi penduli ſimplicis, ſecunda ſcrupula notantis, longitudo diviſa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno ſcrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenſo compoſitum, iſochronum ponitur pendulo ſimplici partium 1440 [1]); invenienda primum eſt virgæ illius longitudo, ex æquatione ſuperius poſita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ æquale longitudini penduli ſimplicis, quod iſochronum compoſito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo ſi longitudo penduli ſimplicis iſochroni dicatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf + cf}{\frac{1}{3}b + c} \infty a$, poſitoque, ut hic, $c \infty 50$; $b \infty 1$; $f \infty 1440$; fiet, $a \infty 1444\frac{4}{5}$, longitudo virgæ.

$$\text{Jam, quia erat } f \infty \tfrac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}},$$

fiet $f \infty \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Unde porro, ſi p ſit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f \infty 1331\frac{1}{2}$, qualium nempe f, ſeu pendulum ſimplex, ſecunda ſcrupula oſcillationibus deſignans, continet 1440. Cujus longitudo ſi pedum trium ſtatuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, ſupererunt unciæ duæ, lineæ 9, à centro oſcillationis penduli compoſiti ſurſum ſumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius ſcrupuli primi acce-

[1]) Comparez la note 7 de la p. 111 du T. XVII.

Du centre d'oscil-lation.

la longueur totale de trois pieds: il reſte alors 2 pouces et 9 lignes qu'il faut prendre vers le haut à partir du centre d'oſcillation du pendule composé. Nous avons examiné de la même manière les autres diſtances qu'il faut marquer ſur la verge, en attribuant diverſes valeurs à la longueur p, et nous les indiquons dans la table ſuivante. C'eſt ſuivant les nombres de cette table qu'a été diviſée la verge du pendule repréſentée plus haut dans la Deſcription de l'Horloge. Les accélérations par jour, comme nous l'avons déjà dit en cet endroit, augmentent chaque fois de 15 ſecondes, ou d'un quart de minute. Par exemple ſi l'on trouve que l'horloge, lorſque le poids mobile eſt fixé à la marque 73,4, retarde en 24 heures de 15 ſecondes, il faudra pouſſer le poids D vers le haut juſqu'au nombre 85,6 pour corriger ce retard.

Accélération de l'horloge dans un eſpace de 24 heures.	*Parties à prendre vers le haut à partir du centre d'oſcillation.*
Min. Sec.	Lignes et dixièmes, parties de ligne du pied horaire.
0,15	7,0
0,30	15,2
0,45	23,7
1,0	32,6
1,15	41,9
1,30	51,7
1,45	62,2
2,0	73,4
2,15	85,6
2,30	99,0
2,45	114,1
3,0	131,8
3,15	154,3
3,30	192,6

Le centre d'oſcillation eſt ſitué au-deſſus du centre de gravité C de 1,4 parties.

PROPOSITION XXIV.

Qu'il eſt impoſſible de tenir compte du centre d'oſcillation dans le cas de pendules ſuſpendus entre des cycloïdes [1]); *et comment on ſurmonte la difficulté qui en réſulte.*

Si quelqu'un compare par un examen ſubtil ce que nous avons démontré plus haut à propos du pendule ſuſpendu entre des cycloïdes avec nos conſidérations ſur le centre d'oſcillation, il lui ſemblera qu'il manque quelque choſe à la parfaite égalité des oſcillations dont nous nous louons. Et premièrement il doutera ſi, pour trouver le cercle générateur de la cycloïde, il faut prendre la longueur du pendule depuis le point de

lerationem præſtans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas diſtantias, quibus virga dividenda eſt, calculo inveſtigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem *p*: ejasque ſubjecta tabella exhibe|mus, ſecundum cujus numeros etiam virga penduli divisa eſt, quæ ſuperius in deſcriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 ſcrupula ſecunda, ſeu primorum ſcrupulorum quadrantes. Ex. gr. ſi, pondere mobili D hærente in parte 73,4, inveniatur horologium tardius juſto incedere, in 24 horis, differentiâ 15 ſecundorum ſcrupulorum; oportebit ſurſum adducere pondus D, usque ad numerum 85,6 ut corrigatur.

De centro oscillationis (*p.* 150).

Acceleratio horologii ſpatio 24 *horarum.*	*Partes, à centro oſc. ſurſum accipiendæ.*
Scrup. pr. Sec.	Lineæ & decima linearum pedis horarii.
0,15	7,0
0,30	15,2
0,45	23,7
1,0	32,6
1,15	41,9
1,30	51,7
1,45	62,2
2,0	73,4
2,15	85,6
2,30	99,0
2,45	114,1
3,0	131,8
3,15	154,3
3,30	192,6

Centrum oſcillationis altius eſt centro gravitatis C partibus 1,4.

PROPOSITIO XXIV.

Centri oſcillationis rationem haberi non poſſe, in pendulis inter Cycloides ſuſpenſis[1]*; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.*

Si quis, ſubtili examine, contulerit ea quæ in ſuperioribus, de pendulo inter cycloides ſuſpenſo, demonſtravimus, cum his quæ ad centrum oſcillationis pertinent; videbitur ei deeſſe aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oſcillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda ſit à puncto ſuſpenſionis ad | centrum gravitatis appenſi plumbi, (*p.* 151).

[1]) Comparez le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 101 du T. XVII.

Du centre d'oscillation.

ſuſpenſion juſqu'au centre de gravité du poids qui y eſt attaché, ou bien juſqu'au centre d'oſcillation qui diffère ſouvent de l'autre d'un intervalle ſenſible et d'autant plus grand que la ſphère ou la lentille de plomb eſt plus volumineuſe. Comment en ſera-t-il par exemple lorſque le diamètre de la ſphère eſt égal au quart ou au tiers de la longueur du pendule? Et ſi nous diſons que cette longueur doit être comptée juſqu'au centre d'oſcillation, il ne ſera pourtant pas clair comment ce que nous avons démontré au ſujet du centre d'oſcillation s'applique à un pendule qui change continuellement de longueur, comme le fait celui qui ſe meut entre des cycloïdes. Car il pourrait ſembler que le centre d'oſcillation change auſſi de place lorſque la longueur prend une valeur après une autre, ce qu'il ne faut pourtant pas entendre de cette façon. La choſe eſt certes fort difficile à expliquer ſi nous recherchons une exactitude parfaite; en effet, dans la démonſtration de l'égalité des temps dans la cycloïde nous avons conſidéré le mobile qui ſe mouvait ſuivant elle comme ſi c'était un point peſant. Mais ſi nous nous en tenons à la pratique, cette difficulté ne doit pas être conſidérée comme fort importante, puiſque dans les horloges il ne faut pas que le poids qui conſtitue le corps oſcillant ſoit ſi grand (toutefois, plus ce poids eſt grand, mieux cela vaut) que la différence des centres de gravité et d'oſcillation puiſſe cauſer des troubles. Si cependant nous déſirons abſolument éviter cette difficulté, nous y arriverons en rendant la ſphère ou lentille du pendule mobile autour de ſon axe horizontal: il faudra inſérer les extrémités de ces axes de part et d'autre au bas de la verge du pendule, laquelle doit donc à cet effet être fendue en deux de ce côté. En effet, de cette manière il arrive, d'après la nature du mouvement, que la ſphère du pendule garde perpétuellement la même poſition par rapport à un plan horizontal et qu'ainſi tous ſes points parcourent les mêmes cycloïdes, tout auſſi bien que le centre. Par conſéquent la conſidération des centres d'oſcillation ne s'applique plus à ce mouvement, et un pendule de ce genre préſente un iſochroniſme auſſi parfait que ſi toute ſa gravité était réunie en un ſeul point.

PROPOSITION XXV.

De la manière d'établir une meſure univerſelle et perpétuelle [1]).

Une meſure certaine et permanente des grandeurs que ne ſoit ſujette à aucunes rencontres et ne puiſſe être abolie ou corrumpue par l'injure ou la longueur des temps, eſt une choſe fort utile et recherchée depuis longtemps par beaucoup de gens. Si l'on en avait trouvé une aux temps anciens, les diſputes actuelles ſur la meſure du pied antique romain, grec ou hébraïque ne feraient pas pleines de tant de perplexités. Or, cette meſure eſt aiſément établie au moyen de notre horloge, tandis que ſans celle-ci elle ne peut pas ou fort difficilement être obtenue. Il eſt vrai que ceci a été tenté par quelques perſonnes par la ſimple oſcillation de pendules, ſavoir en comptant le nombre d'oſcillations correſpondant à une révolution entière du ciel, ou à celle d'une partie du ciel connue par les diſtances de certaines étoiles fixes entre elles ſuivant leur

an vero ad centrum oſcillationis; quod, ab altero illo, ſæpe ſenſibili intervallo diſtat, De centro oscillationis atque eo majore, quo major fuerit ſphæra aut lens plumbea. Quid enim, ſi ſphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod ſi ad centrum oſcillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oſcillationis oſtenſa ſunt, conveniant pendulo continue longitudinem ſuam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Poſſet enim videri, etiam centrum oſcillationis mutari, ad ſingulas diverſas longitudines; quod tamen hoc modo intelligendum non eſt. Res ſane explicatu difficillima, ſi omnimodam ἀκρίβειαν ſectemur. Nam in demonſtratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum conſideravimus. Sed, ſi ad effectum ſpectemus, non magni facienda eſt difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum conſtat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etſi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oſcillationis, aliquid hic turbare poſſit. Quod ſi tamen effugere prorſus has tricas velimus, id ita conſequemur, ſi ſphæram lentemve penduli, circa axem ſuum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ penduli imæ, inferendo: quæ idcirco ut bifida hac parte ſit neceſſe eſt. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo poſitionem, reſpectu horizontalis plani, ſphæra penduli ſervet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipſum, cycloides eaſdem percurrant. Unde ceſſat hic jam centrorum oſcillationis conſideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum conſequitur, quam ſi puncto unico omnis ejus gravitas contineretur.

PROPOSITIO XXV.

De menſuræ univerſalis, & perpetuæ, conſtituendæ ratione [1]).

Certa, ac permanens magnitudinum menſura, quæ nullis caſibus obnoxia ſit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi poſſit, res eſt & utiliſſima, & à multis pridem quæſita. Quæ ſi priſcis temporibus reperta fuiſſet, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Hebræique veteris modulo, diſceptationes. Hæc vero menſura, Horologii noſtri opera, facile conſtituitur; cum ſine illo nequaquam, aut ægre admodum, ha|beri poſſit. Etſi enim, ſimplici pendulorum oſcillatione, (p. 152). hoc à quibuſdam tentatum fuerit, numerando recurſus qui tota cæli converſione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum ſtellarum diſtantias, ſecundum aſcenſio-

[1]) Voir sur ce sujet les p. 120 et 121 (note 8) du T. XVII. Remarquons que dans la première ligne de la p. 121 nommée il faut lire „demonſtraturi" au lieu de „demonstrari".

Du centre d'oscillation.

ascension droite; mais d'une part on n'arrive pas de cette manière à une certitude égale à celle qu'on atteint par l'emploi des horloges, et d'autre part ce labeur est extrêmement pénible et ennuyeux à cause de l'exactitude avec laquelle il faut compter les oscillations [1]). Or, parce qu'il n'y faut pas seulement les horloges, mais que la théorie des centres d'oscillation contribue aussi quelque chose à la recherche fort exacte de cette mesure, nous ne traitons de ce sujet qu'ici à la fin, après avoir établi cette théorie.

Les horloges les plus propres à cela sont celles dont les oscillations marquent les secondes ou demi-secondes et qui sont aussi pourvues d'indices ou d'aiguilles pour les indiquer. En effet, après qu'une horloge de ce genre a été réglée par l'observation d'étoiles fixes sur la durée moyenne des jours, suivant la méthode que nous avons enseignée dans la Description de l'Horloge, il faut suspendre à côté d'elle un autre pendule simple, c'à.d. une sphère de plomb ou d'une autre matière pesante attachée à un fil mince, et mettre ce pendule en mouvement par une légère impulsion; il faut ensuite allonger ou raccourcir le fil jusqu'à ce que ses oscillations s'accordent parfaitement durant un quart d'heure ou une demi-heure avec celles du pendule qui fait partie de l'horloge. J'ai dit qu'il faut mettre le pendule en mouvement par une légère impulsion, parce que de petites oscillations, p. e. de 5 ou 6 degrés, ont des périodes passablement égales, mais qu'il n'en est plus ainsi des grandes. Si l'on prend alors la mesure de la distance du point de suspension au centre d'oscillation du pendule simple et qu'on divise cette distance, dans le cas où les oscillations simples correspondent à des secondes, en trois parties égales, chacune de celles-ci donnera la longueur du pied que nous avons appelé ci-dessus Pied Horaire [2]), et qui peut de sorte non seulement être déterminé par toutes les nations, mais aussi être reconstitué dans les siècles à venir. D'où il suit que les longueurs de tous les autres pieds étant une fois exprimées par leurs rapports à ce pied-ci, elles pourront désormais être connues elles aussi avec certitude. Nous avons déjà dit plus haut que le pied parisien est au pied horaire tel que nous l'avons défini ici comme 864 est à 881, ce qui revient à dire que, le pied parisien étant donné, le pendule simple dont les oscillations correspondent aux secondes a une longueur de trois de ces pieds augmentés de huit lignes et demie. Et le pied parisien est au pied rhénan dont on se sert dans notre patrie comme 144 est à 139, c. à. d. le premier surpasse le second de 5 lignes parisiennes. Le pied rhénan lui aussi, et d'autres pieds quelconques, acquièrent ainsi une longueur fixée pour toujours.

Nous avons fait voir plus haut comment le centre d'oscillation est trouvé pour une sphère suspendue à un fil de longueur quelconque; savoir que si, comme la distance du point de suspension au centre de la sphère est à son rayon, ainsi ce dernier est à une autre longueur, les deux cinquièmes de cette longueur-là portées vers le bas à partir du centre aboutissent au centre d'oscillation cherché. Or, il apparaît facilement pourquoi la considération de ce centre est nécessaire à la détermination exacte du pied horaire. Car si la distance est prise depuis le point de suspension jusqu'au centre de la sphère, mais qu'on ne définit pas la grandeur de la sphère par rapport à la longueur

nem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe est molestissimus ac tædiosissimus, propter numerandi solicitudinem [1]). Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactissimam hujus mensuræ inquisitionem, etiam centrorum oscillationis notitia confert; ideo hic demum, post eorum tractationem, hanc determinationem subjicimus. De centro oscillationis

Aptissima huic rei sunt horologia, quorum oscillationes singulæ secunda scrupula, vel eorum semisses, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonstranda, instructa sunt. Postquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejusmodi horologium, fixarum stellarum observationibus, compositum fuerit, methodo illa quam in horologii descriptione ostendimus: aliud pendulum simplex, hoc est, sphæra plumbea, aut alia materia gravi constans, ex tenui filo religata, juxta suspendenda est, motuque exiguo impellenda; ac tantisper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recursus ejus, per quadrantem horæ, aut semissem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oscillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, satis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ mensurâ distantiæ, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis penduli simplicis; eâque, si recursus singuli scrupula secunda valeant, in tres partes divisâ; facient hæ singulæ longitudinem pedis, quem Horarium in superioribus vocavimus [2]): quique, hoc pacto, non solum ubique gentium constitui possit, sed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, semel ad hunc proportionibus suis expressi, certò quoque in posterum cognosci possint. Sicut jam supra, pedem Parisiensem ad hunc horarium esse diximus, ut 864 ad 881; quod idem est ac si, posito prius pede Parisiensi, dicamus tribus hujusmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, constitui pendulum simplex, cujus oscillationes scrupulis secundis horariis responsuræ sint. Pes autem Parisiensis ad Rhenanum, quo in Patria nostra utuntur, se habet ut 144 ad 139; hoc est, quinque lineis suis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas mensuras accipiunt.

Quomodo autem centrum oscillationis in sphæra, ex qualibet | longitudine suspensa, (p. 153). inveniatur, in superioribus demonstratum est. Nempe, si fiat ut distantia inter punctum suspensionis & sphæræ centrum, ad semidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorsum acceptas, terminari in quæsito oscillationis centro. Facile autem apparet cur necessaria sit hujus centri consideratio, ad accuratam pedis Horarii constitutionem. Nam, si à puncto suspensionis ad sphæræ centrum distantia accipiatur, sphæræ autem magnitudo non definiatur proportione ad fili longitudinem, non erit

[1]) Comparez les p. 4 et 54—55 du T. XVII.
[2]) Voir la p. 96 qui précède.

Du centre d'oscillation.

du fil, la meſure du pendule dont les oſcillations correſpondent aux ſecondes ne ſera pas abſolument certaine: plus la ſphère eſt grande, plus la diſtance du centre de la ſphère au point de ſuſpenſion ſera trouvée petite. En effet, dans les pendules iſochrones les diſtances des centres d'oſcillation aux points de ſuſpenſion ſont toujours les mêmes, mais dans le cas d'une plus grande ſphère le centre d'oſcillation deſcend plus bas au-deſſous du centre que dans celui d'une ſphère plus petite.

C'eſt pourquoi ceux qui avant cette détermination du centre d'oſcillation ont entrepris de nous donner une méthode pour trouver la meſure univerſelle — ce que la noble Société Royale anglaiſe s'eſt propoſé depuis le moment où fut inventée notre horloge [1]), et après elle le très ſavant aſtronome de Lyon, Gabriel Mouton [2]) — ceux-ci, dis-je, ont été obligés de définir le diamètre du globule ſuſpendu ſoit par rapport à la longueur du fil, diſant qu'il en aurait par exemple la trentième partie, ſoit d'après une meſure connue, tel que le doigt ou le pouce. Mais de cette dernière façon on prend déjà comme connu ce qu'il fallait chercher; je n'ignore pas cependant que l'erreur ſera à peine ſenſible pourvu que les dimenſions des ſphères ne ſurpaſſent pas beaucoup celle dont j'ai parlé. De la première façon la choſe réuſſirait aſſez bien, mais dans ce cas il faudrait prendre la peine de compter les oſcillations et ſe ſervir du calcul. Il eſt donc préférable de faire uſage des centres d'oſcillation et de ſuivre ainſi une voie certaine en ne tenant compte que des lois qui s'y appliquent. En agiſſant ainſi il vaut mieux employer de grandes que de petites ſphères parce que les premières ſont moins influencées par la réſiſtance de l'air.

D'ailleurs ce ne ſont pas ſeulement les ſphères ſuſpendues à un fil, mais auſſi les cônes, les cylindres et tous les autres corps, y compris les plans, dont nous avons fait connaître plus haut les centres d'oſcillation, qui ſont propres à la recherche de cette meſure, puiſque pour tous les pendules iſochrones il y a un intervalle déterminé et égal entre le point de ſuſpenſion et le centre d'oſcillation. Et nous ne ſommes pas obligés de nous ſervir des horloges qui indiquent par les oſcillations ſimples de leurs pendules les ſecondes ou demi-ſecondes: nous pouvons encore atteindre notre but à l'aide d'horloges munies de pendules d'autres longueurs quelconques, pourvu qu'on connaiſſe par les proportions des roues, en d'autres termes par les nombres de leurs dents, le nombre des oſcillations qui ſont exécutées en un certain temps. En effet, le pendule ſimple ayant été trouvé dont les oſcillations correſpondent chacune à une, deux ou trois oſcillations du pendule de l'horloge, on en conclura le nombre des oſcillations que le pendule ſimple exécute en une heure. Et en portant ce nombre au carré, on aura ceci: le carré de 3600, nombre des ſecondes qui ſont l'heure, ſera au carré prénommé comme la longueur du pendule ſimple trouvé (longueur qu'il faut toujours compter depuis le point de ſuſpenſion juſqu'au centre d'oſcillation) eſt à la longueur du pendule horaire de trois pieds dont nous avons parlé. Ceci réſulte en effet du fait que les longueurs de deux pendules quelconques ſont entre elles comme les carrés des temps dans leſquels ſe font leurs oſcillations; par conſéquent ces longueurs ſont inverſement proportionnelles aux carrés des nombres des oſcillations

certa menſura penduli cujus recurſus ſecunda ſcrupula metiantur; ſed quo major erit ejus ſphæra, hoc minor invenietur menſura illa, inter centrum ſphæræ & punctum ſuſpenſionis intercepta. Quia in iſochronis pendulis, centra quidem oſcillationis à punctis ſuſpenſionum æqualiter diſtant; amplius autem deſcendit centrum oſcillationis infra centrum ſphæræ majoris, quam minoris. De centro oscillationis

Hinc neceſſe fuit illis, qui, ante hanc centri oſcillatorii determinationem, menſuræ univerſalis conſtituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii noſtri inventione, nobilis illa Societas Regia Anglicana ſibi negotium ſumpſit [1]), & recentius doctiſſimus Aſtronomus Lugdunenſis, Gabriel Moutonus [2]); his, inquam, neceſſe fuit deſignare globuli ſuſpenſi diametrum, vel proportione certa ad fili longitudinem, cujus nempe triceſimam vel aliam partem æquaret; vel menſura quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc poſteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipſum eſt quod quærendum eſt: etſi ſcio vix ſenſibilem errorem fore, dummodo ſphæræ iſtam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem poſſet quidem aliquo pacto res explicari; ſed ita, ut numerandarum oſcillationum labor ſubeundus ſit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præſtat, centra oſcillationis adhibendo, certam rationem ſequi, nulliſque præter neceſſitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus ſphæris quam exiguis potius utendum, quod illæ occurſu aëris minus impedianrur.

Cæterum, non ſphæræ tantum ex filo ſuſpenſæ, ſed & coni, cylindri, aliaque omnia ſolida, planaque, quorum centra oſcillationis ſuperius exhibuimus, ad hanc menſuram inveſtigandam, apta ſunt; quoniam, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis, certum idemque omnibus iſochronis pendulis eſt intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ ſecunda ſcrupula aut eorum ſemiſſes ſingulis penduli recurſibus indicant, ad hæc uſur|pare poſſumus; ſed & aliâ quâcunque penduli longitudine in- (p. 154). ſtructis propoſitum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, ſeu dentium numero, cognoſcatur numerus oſcillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo ſimplici, cujus librationes ſingulæ conveniant vel ſingulis, vel binis terniſve recurſibus horologii, conſtabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ ſpatio tranſigantur. Quarum numerus ſi quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero ſcrupulorum ſecundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli ſimplicis inventi, (quæ longitudo ſemper à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis accipienda eſt) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde conſtat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines ſunt inter ſe, ſicut quadrata temporum quibus ſingulæ oſcillationes tranſeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oſcillatio-

[1]) Voir sur ce sujet les p. 354—356 du T. XVI et 120—121 du T. XVII.
[2]) Dans son ouvrage de 1670 „Observationes diametrorum Solis et Lunae apparentium, etc.", que nous avons aussi mentionné à la p. 59 de l'Avertissement qui précède.

Du centre d'oscillation.

exécutées en des temps égaux. Obſervons que tandis que juſqu'ici ce théorème ſur les longueurs des pendules, ſavoir le théorème de la proportionnalité des longueurs aux carrés des périodes, n'avait été prouvé que par l'expérience, ſa démonſtration eſt maintenant manifeſte d'après ce que nous avons expoſé plus haut. En effet, comme nous avons prouvé que le temps d'une oſcillation d'un pendule ſuſpendu entre des cycloïdes a un rapport déterminé à celui d'une chute verticale d'une hauteur égale à la moitié de la longueur du pendule, ſavoir celui de la circonférence du cercle à ſon diamètre, on en conclut aiſément que les périodes de deux pendules ſont entre elles comme les temps des chutes verticales de hauteurs égales à leurs demi-longueurs. Mais comme ces demi-hauteurs, ou les hauteurs entières, ont entre elles un rapport égal à celui des carrés des temps dans leſquels elles ſont parcourues dans une chute verticale *, elles auront auſſi entre elles un rapport égal à celui des carrés des périodes. Or, les oſcillations extrêmement petites d'un pendule ſimple ne diffèrent pas ſenſiblement de celles d'un pendule ſuſpendu entre des cycloïdes, les longueurs étant les mêmes. Par conſéquent les longueurs des pendules ſimples ſeront auſſi entre elles comme les carrés des périodes d'oſcillations fort petites [1]).

* Prop. 3 de la 2ième Partie.

Que ſi quelqu'un ne fuit pas le travail de meſurer les oſcillations qui ſont exécutées en une heure ou en une demi-heure, et qu'il a à ſa diſpoſition une horloge dont un indice ou une aiguille fait voir les ſecondes, il connaîtra de cette manière le nombre d'oſcillations correſpondant à une heure quelle que ſoit la longueur du pendule ſimple conſidéré; et de là il tirera par le calcul, comme auparavant, la longueur du pendule de trois pieds qui correſpond aux ſecondes.

PROPOSITION XXVI [2]).

Déterminer l'eſpace que les corps graves parcourent en tombant durant un certain temps.

Tous ceux qui ont cherché juſqu'ici à meſurer cet eſpace ont jugé néceſſaire d'en venir aux expériences, par leſquelles, de la manière qu'elles ont été inſtituées juſqu'à ce jour, on n'arrive pas aiſément, à cauſe de la grande viteſſe finale des corps tombants, à une détermination exacte. Mais d'après notre Prop. XXV de la Deſcente des Corps graves, nous pouvons, lorſque la longueur du pendule correſpondant aux ſecondes eſt connue atteindre le but propoſé ſans expérience par une conſéquence certaine. Nous rechercherons premièrement l'eſpace qu'un corps grave parcourt en une ſeconde, duquel on pourra enſuite tirer tous les autres. Comme la longueur du pendule à ſecondes eſt, comme nous l'avons dit, de trois pieds horaires et que le temps d'une fort petite oſcillation eſt au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale à la moitié du pendule comme la circonférence du cercle eſt à ſon diamètre, c.à.d. comme 355 eſt à 113; ſi l'on fait que comme le premier de ces nombres eſt au ſecond, ainſi le temps d'une ſeconde ou de ſoixante tierces eſt à un autre temps, ce dernier ſera de $19\frac{1}{10}'''$: c'eſt là le temps d'une chute de la hauteur du demi-pendule

nes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur; nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostenderimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi, ad casum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam scilicet quam circumferentia circuli ad diametrum suam; facile hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur *; eædem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem sit longitudo. Itaque & pendulorum simplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oscillationes minimæ transiguntur [1]).

De centro oscillationis

* Prop. 3. Part. 2.

Quod si quis oscillationum numerandarum, quæ horæ aut semihoræ tempore transeunt, laborem non defugiat; horologiumque adsit, cujus index secunda scrupula demonstret; quæcunque accipiatur penduli simplicis longitudo, ejus numerus oscillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoscetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad secunda scrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXVI [2]).

(p. 155).

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

Hanc mensuram quicunque hactenus investigarunt, experimenta consulere necesse habuerunt; quibus, prout hactenus instituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, sub finem motus acquisitam. Ex nostra autem prop. 25, de Descensu gravium, cognitaque longitudine penduli ad secunda scrupula, absque experimento, per certam consequentiam, rem expedire possumus. Ac primo quidem spatium illud inquiremus, quod unius scrupuli secundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad secunda scrupula, longitudinem diximus esse pedum Horariorum 3: tempus autem unius oscillationis minimæ, est ad tempus descensus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc est, ut 355 ad 113: si fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius secundi surupuli, sive sexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19'''\frac{1}{10}$, tempus descensus per dimidiam penduli altitudinem,

[1]) La proportionnalité des longueurs aux carrés des périodes, lorsque les amplitudes sont les mêmes (condition superflue dans le seul cas d'oscillations entre des arcs cycloïdaux) peut d'ailleurs être démontrée plus généralement; voir la note 5 de la p. 18 du T. XVII.

[2]) L'édition originale a par erreur Prop. XXV.

Du centre d'oscillation.

laquelle eſt de 18 pouces du pied. Mais comme les carrés des temps ſont entre eux, ainſi le ſont auſſi les eſpaces parcourus en ces temps, comme cela a été démontré dans la propoſition précédente. Prenons donc une longueur telle que le carré de $19\frac{1}{10}'''$ ſoit au carré de 60''', c.à.d. que 36481 ſoit à 360000, comme 18 pouces ſont à elle: on trouvera ainſi la longueur de 14 pieds, 9 pouces, 6 lignes pour l'eſpace parcouru en tombant en une ſeconde. Mais attendu que le pied horaire eſt au pied pariſien comme 881 eſt à 864, la même hauteur, réduite à cette meſure, ſera à peu près de 15 pieds et un pouce [1]). Et ceci s'accorde fort bien avec nos expériences très exactes, dans leſquelles le moment final de la chute n'eſt pas diſcerné par le jugement des oreilles ou des yeux, dont ni l'un ni l'autre eſt ici aſſez ſûr, mais où l'eſpace parcouru pendant la chute eſt trouvé ſans erreur ſuivant une autre méthode que nous tâcherons d'expoſer ici.

La demi-oſcillation d'un pendule ſuſpendu à une paroi ou à une table dreſſée indique le temps de la chute. Pour que ſon globule ſoit lâché au même inſtant où on lâche le plomb qui doit exécuter la chute, les deux corps ſont tenus reliés par un mince fil qui eſt rompu à l'aide d'une flamme. Mais avant cela on attache au plomb qui doit tomber un autre fil de longueur telle que lorſqu'il eſt tendu par la force du plomb tombant le pendule n'a pas encore atteint la paroi. L'autre extrémité de ce fil eſt attachée à une règle de papier, ou une mince membrane, gliſſant ſur la paroi ou la table de telle manière qu'elle peut facilement ſuivre le poids tirant et deſcendre en ligne droite ſuivant ſa longueur, en paſſant par l'endroit où le globe du pendule doit choquer la table. Toute la petite corde étant tendue, une partie de la règle eſt donc tirée en bas elle auſſi par le plomb tombant, avant que le pendule a atteint la table. La grandeur de cette partie eſt indiquée par le globe qui eſt induit d'une légère couche de ſuie et met donc une marque ſur la règle qui paſſe. En y ajoutant la longueur de la petite corde on a une meſure certaine de l'eſpace parcouru par le corps tombant.

Dans ces conſidérations nous négligeons la réſiſtance de l'air pour que la meſure qui convient aux corps tombants s'accorde entièrement avec les expériences. Et, certes, cette réſiſtance n'eſt pas aſſez grande pour qu'elle puiſſe altérer ſenſiblement les réſultats dans les hauteurs où l'on peut monter, pourvu que les corps ſoient ſuppoſés de métal ou bien de grandes dimenſions s'ils conſiſtent en une matière plus légère. En effet, la légèreté de la matière dans les corps qui traverſent l'air en tombant eſt compenſée de telle manière par la grandeur des corps qu'une ſphère en bois ou

[1]) 15 pieds et un pouce, mesure de Paris, correspondent à 15 pieds et $7\frac{1}{2}$ pouces rhénans. Comme nous l'avons dit ailleurs (T. XVII, p. 100, note 1 et p. 246) Huygens connaissait cette valeur depuis la fin de 1659. Citons encore le passage suivant de la p. 88 du Manuscrit C écrit en 1666 peu avant le départ pour Paris: „AC [longueur du pendule supposé simple] eſt 38

quæ nempe eſt pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita ſunt ſpatia illis temporibus peracta, quemadmodum ſuperiori propoſitione fuit oſtenſum. Ergo, ſi fiat ut quadratum ex $19'''\frac{1}{10}$ ad quadratum ex $60'''$, hoc eſt, ut 36481 ad 360000, ita 18 unciæ ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo deſcenſus perpendicularis, tempore unius ſecundi. Cum autem pes Horarius ſit ad Pariſienſem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc menſuram reducta, proxime pedum 15 & unciæ unius [1]). Atque hæc cum accuratiſſimis experimentis noſtris prorſus conveniunt. in quibus punctum illud temporis, quo caſus finitur, non aurium aut oculi judicio diſcernitur; quorum neutrum hic ſatis tutum eſt; ſed ſpatium deſcendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, abſque ullo errore cognoſcitur. DE CENTRO OSCILLATIONIS

Penduli, ad parietem tabulamve erectam, ſuſpenſi dimidia oſcillatio moram temporis, cadendo adſumpti, indicat. Cujus ſphærula, ut eodem momento ac plumbum caſui deſtinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, caſuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad pa|rietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile ſequi poſſit, rectáque ſecundum longitudinem ſuam deſcendere; eo loci tranſiens, quo penduli ſphæra ad tabulam accidet. Abſumpto igitur funiculo toto, pars inſuper regulæ deorſum trahitur à cadente plumbo, priuſquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quanta ſit pars, ſphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem ſignans, indicat. Huic autem addita funiculi longitudine, ſpatium cadendo emenſum certò definitum habetur. (p. 156).

Aëris autem occurſum, quaſi nullus eſſet in his intelligimus, ut menſura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte conſentiat. Nec ſane tantus eſt ille, ut in altitudinibus his, quò aſcendere datur, ſenſibile diſcrimen inducere poſſit; dummodo ſolida corpora è metallo, aut, ſi leviore materia conſtent, mole grandiuſcula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem ſecant, ita magnitudine corporis penſatur, ut ſphæra lignea, vel etiam è ſubere formata, paria faciat cum plumbea:

---

poll. Rhenolandiæ. Descensus DC seu semivibratio penduli AC fit $30'''$ sive semisecundo, tempus autem hujus semivibrationis est ad tempus casus perpendicularis per BC sive $\frac{1}{2}$AC ut semicircumferentia BCE ad diam. BC. Hinc fit spatium descensus perpendicularis tempore unius secundi pedum 15 poll. $7\frac{1}{2}$''. À la p. 160 du Manuscrit D (février ou mars 1669) Huygens trouve 15 pd. 1 poll. en se servant directement du pied français: la longueur du pendule à secondes est évaluée à 36 pouces 8 lignes. À la p. 369 du même Manuscrit cette dernière longueur est corrigée en 36 pouces $8\frac{1}{2}$ lignes, et le „spatium descensus" correspondant devient 15 pd. 1 poll. 1 lin.; pour la valeur en pieds rhénans Huygens trouve ensuite de nouveau 15 pd. $7\frac{1}{2}$ poll.

Du centre d'oscillation.

même en liége va auſſi vite qu'une ſphère de plomb, lorſque les diamètres de ces ſphères ont à ceux de la ſphère de plomb le même rapport que la gravité ſpécifique du plomb à celle du bois ou du liége. En effet alors les gravités des ſphères ſeront entre elles comme leurs ſurfaces [1]). Toutefois, pour que les corps qui diffèrent beaucoup l'un de l'autre en gravité ſpecifique tombent ſenſiblement avec une même viteſſe, il n'eſt nullement néceſſaire que cette proportion des diàmetres ſoit obſervée: les corps peuvent être égaux entre eux pourvu qu'ils ſoient l'un et l'autre aſſez grands ou qu'ils tombent d'une hauteur aſſez faible. Cependant il faut encore remarquer à ce propos que la hauteur peut être ſi grande ou bien (la hauteur étant faible) que la légèreté du corps projeté peut être telle qu'à cauſe de la réſiſtance de l'air l'accélération du mouvement diffère énormément de celle que nous avons calculée plus haut. Car en général à chaque corps qui tombe à travers l'air ou un autre liquide correſpond une viteſſe déterminée, dépendant de ſon poids et de ſa ſurface, qu'il ne peut jamais dépaſſer ou plutôt qu'il n'atteint jamais. C'eſt la viteſſe que l'air, ou le liquide, devrait avoir vers le haut pour pouvoir ſoutenir le corps nageant dans lui. Mais nous aurons peut-être l'occaſion de traiter ce ſujet plus amplement en un autre endroit [2]).

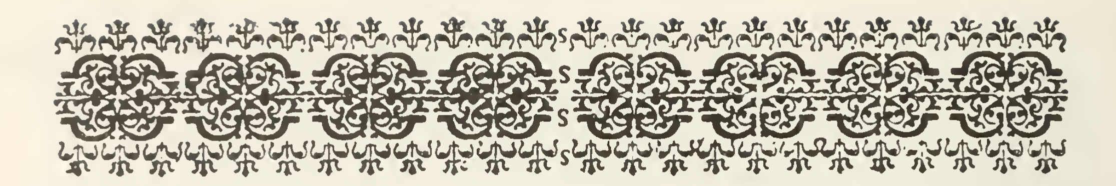
---

[1]) Voir les p. 384—385 du T. XVI.

[2]) Il existe des calculs de Huygens sur l'influence de la résistance des fluides sur le mouvement, qu'il n'a pas publiés. Nous réservons ces calculs pour un des Tomes suivants.

quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni ſuberisve gravitatem. Tunc enim gravitates ſphærarum erunt inter ſe ſicut earum ſuperficies [1]). Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum ſenſu percipi poteſt, decidant corpora, quæ multum intrinſeca gravitate differunt, nequaquam opus eſt ut proportio illa dimetrorum ſervetur. Poſſunt enim inter ſe æqualia eſſe, dummodo utraque ſatis magna ſint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum eſt, tantam vel altitudinem eſſe poſſe; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in ſuperioribus demonſtravimus, proportione plurimum receſſura ſit. Namque in univerſum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac ſuperficiei ſuæ, conſtitutus eſt; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam poſſit. Quæ nempe celeritas ea eſt, quam ſi aër, aut liquor ille ſurſum tendens, haberet, ſuſpenſum corpus idem ſibi innatans ſuſtinere poſſet. Verum de his, alias fortaſſe, pluribus agendi occaſio erit [2]).

De centro oscillationi



CINQUIÈME PARTIE
DE L'HORLOGE À PENDULE.

Contenant une autre construction basée sur le mouvement circulaire des pendules, et des théorèmes sur la force centrifuge.

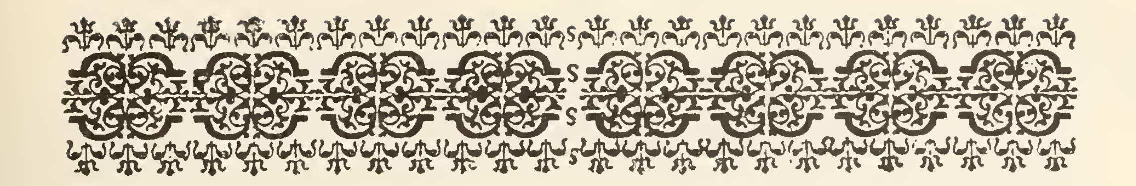
Il y a encore un autre genre de mouvement oscillatoire outre celui que nous avons traité jusqu'ici: c'est le mouvement d'un poids suspendu qui tourne en rond suivant une circonférence de cercle. Nous en avons déduit une autre construction d'horloge presque simultanément avec celle traitée ci-dessus: elle est basée de même que la première sur un principe d'isochronisme bien établi; mais l'usage de cette horloge ne s'est pas fort répandu à cause de la plus grande simplicité et commodité de la construction de l'autre [1]). Toutefois plusieurs horloges de ce genre ont aussi été fabriquées, non sans succès [2]), et il y a en elles ceci de remarquable que l'on y voit tourner la dernière aiguille, celle des secondes, d'un mouvement continu et uniforme, tandis que dans notre première horloge et dans toutes les autres elle avance par bonds. Il faut encore noter cette autre particularité que les automates ainsi construits se meuvent sans aucun bruit. Il est vrai que pour les usages astronomiques le son qui se répète toutes les secondes n'est pas sans utilité. Et j'avais d'abord l'intention de publier la description de ces horloges avec la théorie du mouvement circulaire et de la Force Centrifuge — c'est ainsi que je veux l'appeler — sujet dont j'ai à dire plus que je n'en ai en ce moment le temps; mais pour que ceux qui s'intéressent à ces choses jouissent déjà plus tôt de cette spéculation nouvelle et nullement inutile et que la publication ne soit pas empêchée par quelqu'accident, j'ai ajouté encore, contre mon dessein, aux autres parties celle-ci par laquelle l'arrangement de l'appareil est brièvement exposé et où j'énonce en même temps les théorèmes relatifs à la Force Centrifuge en réservant leur démonstration pour plus tard [3]).

Construction de la deuxième horloge.

Je n'ai pas jugé nécessaire d'exhiber ici la disposition des roues qui composent la partie intérieure de l'horloge, puisque celles-ci peuvent aisément être arrangées com-

---

[1]) Voir les p. 242—243 du T. XVI, ainsi que les p. 88—91, 153 et 353 (note 2) du T. XVII.



HOROLOGII OSCILLATORII (*p.* 157).

Pars Quinta.

Constructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

Est & aliud Oscillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejusmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Unde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; sed cujus usus minus percrebuit, propter alterius illius constructionem, quodammodo simpliciorem facilioremque [1]). Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec sine successu, constructa fuere [2]): estque in his singulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat; cum in priore nostro horologio, omnibusque aliis, subsultim quasi feratur. Item hoc quoque, quod absque strepitu, sonoque omni, moveantur hac ratione constructa automata. quanquam, ad observationes astronomicas, sonus ad singula secunda scrupula repetitus, utilitate non careat. Et constitueram quidem, descriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumento plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili speculatione maturius fruantur harum rerum studiosi, neve casu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter destinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, simulque Theoremata traduntur, ad Vim Centrifugam pertinentia; demonstratione ipsorum in aliud tempus dilata *.

*Vide Auctoris Opera posthuma p. 401. & seq. [3]).

Horologii secundi constructio.

Non necessarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii constant, dispositionem hic exhiberem, cum ea ab artificibus fa|cile ordinari, variisque modis mutari (*p.* 158).

---

[2]) Comparez l'Appendice II à la Pars Quinta qui suit.

[3]) Voir outre la note 2 de la p. 353 du T. XVII, les p. 237—328 du T. XVI. La note marginale (comparez les p. 238—239 du T. XVI) a été ajoutée au texte latin par 's Gravesande.

Description d'une deuxième horloge.

me il convient par les artiſans et que la diſpoſition peut être modifiée en diverſes manières: il ſuffit d'expliquer la partie qui règle le mouvement d'une façon bien déterminée. On trouve ici une figure [Fig. 118] qui repréſente cette partie [1]).

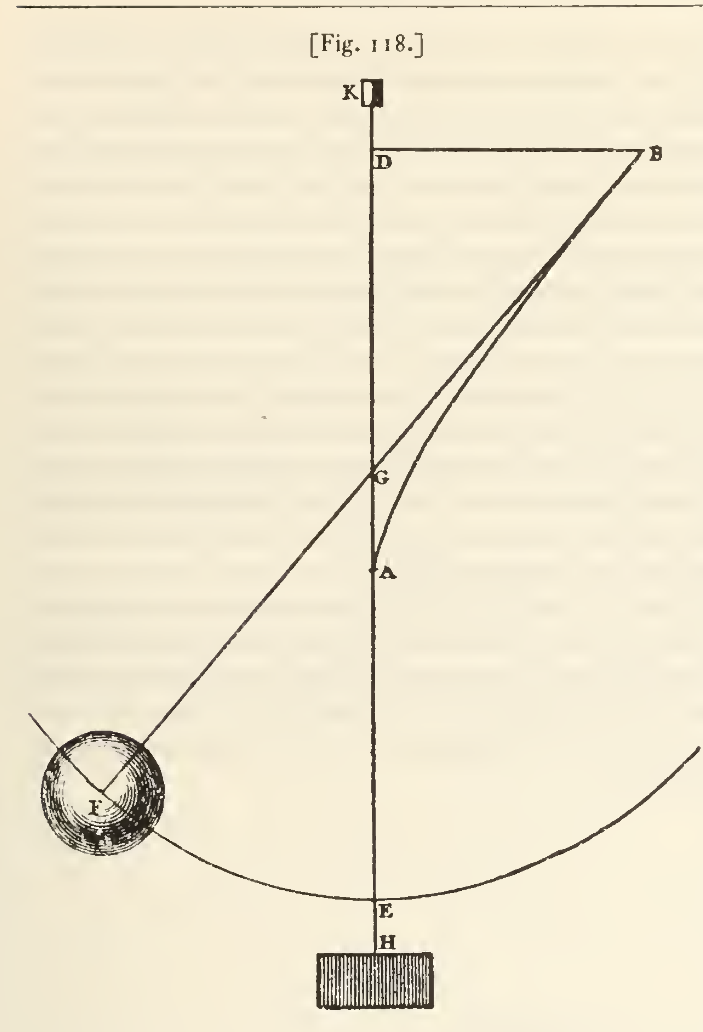
L'axe DH doit être ſuppoſé vertical et mobile ſur deux pôles. En A une lame courbée aſſez large y eſt attachée; elle eſt courbée ſuivant la ligne AB qui eſt la paraboloïde de laquelle nous avons démontré dans la Prop. VIII de la 3ième Partie que par ſon évolution, après qu'une certaine droite y a été ajoutée, une parabole eſt décrite. Cette droite eſt ici AE; et la ligne EF repréſente la parabole décrite par l'évolution de la ligne entière BAE. Le fil appliqué à la courbe BA par l'extrémité duquel la parabole eſt décrite eſt BGF. Le poids attaché au fil eſt F. Or, tandis que l'axe DH tourne ſur lui-même, le fil tendu BGF fait mouvoir le globule F avec lui de manière à lui faire parcourir des circonférences de cercle horizontales qui ſeront plus grandes ou plus petites ſelon que l'axe DH ſera mu avec plus ou moins de force par les roues de l'horloge qui agiſſent ſur le petit tympan K; mais toutes ces circonférences ſeront ſituées ſur la ſurface d'un conoïde parabolique. Et par ce moyen les temps des révolutions ſeront toujours égaux comme il paraîtra par ce que nous dirons plus loin de ce mouvement.

Que ſi nous voulons que l'horloge indique les demi-ſecondes, il faut que le latus rectum de la parabole EF ſoit de $4\frac{1}{2}$ pouces de notre pied horaire, c.à.d. qu'il ſoit égal à la moitié de la longueur du pendule dont les oſcillations ſimples ſe feraient en une demi-ſeconde. Or, la grandeur du latus rectum de la paraboloïde AB dépend de celui de la parabole: le premier eſt égal à $\frac{27}{16}$ fois le ſecond; il en eſt de même de la longueur AE qui eſt la moitié du latus rectum de la parabole. Mais ſi nous voulons que chaque révolution ſe faſſe en une ſeconde, les latera recta ainſi que la ligne AE devront être quatre fois plus grands que précédemment.

---

1) Comparez les figures de la p. 153 du T. XVII.

[Fig. 118.]



poſſit; ſed eam partem explicari ſatis eſſe, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura [Fig. 118] expreſſa eſt [1]). SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Axis DH ad horizontem erectus intelligendus eſt, ac ſuper polis duobus mobilis. Huic ad A affixa eſt lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque ſecundum lineam AB; quæ eſt paraboloides illa de qua oſtendimus, Propoſ. 8. partis 3, evolutione ejus, poſtquam ipſi recta quædam juncta fuerit, deſcribi parabolam. Ea recta hic eſt AE; parabolam vero, ex evolutione totius BAE deſcriptam, refert linea EF. Filum curvæ BA applicatum, cujus extremo puncto parabola deſcribitur, eſt BGF. Pondus illi affixum F. Dum autem axis DH in ſeſe vertitur, filum BGF, in rectam lineam extenſum, ſphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoreſve erunt, prout majori aut minori vi axis DH, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: ſed ita, ut omnes in ſuperficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipſo æqualia ſemper circuitus tempo|ra evadent, ut ex iis, quæ de hoc motu poſtea dicemus, apparebit. (p. 159).

Quod ſi circuitus ſingulos, ſecundorum ſcrupulorum ſemiſſes notare velimus, oportet latus rectum parabolæ EF eſſe $4\frac{1}{2}$ unciarum pedis Horarii noſtri, hoc eſt dimidium longitudinis penduli, cujus ſingulæ oſcillationes ſemiſcrupulum ſecundum impenderent. Ex parabolæ autem latere recto, pendet magnitudo lateris recti paraboloidis AB; quippe quod illius $\frac{27}{16}$ continet: atque item longitudo AE, quæ lateris recti parabolæ dimidium eſt. Si vero ſecunda ſcrupula unoquoque circuitu expleri deſideremus, quadrupla priorum accipienda ſunt, tum latera recta, tum linea AE.

Description d'une deuxième horloge.

Il faut favoir en outre que, quoique nous ayons confidéré jufqu'ici le fil BGF comme unique et fimple, il vaut cependant beaucoup mieux qu'il foit double à fa partie fupérieure et du côté de F fes deux parties fe joignent fous un angle de 20 ou 30 degrés. A cet effet la largeur de la lame AB doit être telle du côté B qu'elle eft néceffaire pour cet écartement des fils, ou bien elle doit, elle auffi, être fourchue. Car de cette manière le mouvement circulaire du poids F continue fans aucune autre aide et tend les deux fils attachés à lui, ce qu'il ne ferait pas s'il n'était retenu que par un feul fil. Il faut pourtant favoir que la force requife pour la continuation de ce mouvement circulaire provient des roues de l'horloge mifes en mouvement par un poids ou une autre puiffance: cette force parvient à l'axe KH par le moyen du petit pignon K et entretient par une très legère preffion le mouvement une fois commencé du globe F. Or, pour qu'elle puiffe le faire d'autant plus facilement, il faut que la révolution de l'axe KH foit fort libre. L'expérience a montré que la meilleure façon d'obtenir cette liberté eft de conftruire en acier durci la partie inférieure de l'axe et de placer fous elle une furface plane de diamant, dont une très petite particule eft ici fuffifante, laquelle il faut mettre fous une lame perforée.

On pourra d'ailleurs employer au lieu du fil BGF, là où celui-ci doit s'appliquer fur la courbe AB, une fine chaînette d'or ou d'un autre métal, pour que la longueur refte d'autant mieux conftante. C'eft ce que nous avons effayé auffi dans la première horloge où le fil eft fufpendu entre les cycloïdes. Mais dans ce cas l'inflexion continuelle de la chaînette nuit beaucoup à la libre agitation du pendule par la friction des mailles quelque petite qu'elle foit.

Porro, etſi filum BGF veluti unicum ac ſimplex hactenus deſignavimus, ſciendum tamen longe præſtare ut parte ſuperiori duplex ſit, ac F verſùs in angulum coëat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ AB latitudo ad B tanta eſſe debet, quanta iſti filorum divaricationi ſufficit, vel & ipſa bifida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, abſque alio ullo adminiculo, continuatur, ac filum utrumque ſibi annexum in rectum extendit; quod non faceret, ſi unico tantum filo teneretur. Ubi tamen vim illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad continuationem hujus motus circularis requiri ſciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem KH pervenit, ac minimo niſu, motum ſphæræ F ſemel inditum, conſervat.

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Hoc autem quo facilius poſſit, liberrimam axis KH revolutionem eſſe oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam ſi, parte ſui ima, durato chalybe conſtet, ſuppoſitamque habeat adamantis ſuperficiem planam; cujus minima quævis particula hic ſufficit, ſubter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili BGF, qua parte curvæ AB applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata ſervetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides ſuſpenſum eſt, experti ſumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

THÉORÈMES SUR LA FORCE CENTRIFUGE RÉSULTANT DU MOUVEMENT CIRCULAIRE [1]).

I.

Lorfque deux mobiles égaux parcourent en des temps égaux des circonférences inégales, la force centrifuge correfpondant à la plus grande circonférence fera à celle qui correfpond à la plus petite dans un rapport égal à celui des circonférences elles-mêmes ou de leurs diamètres.

II.

Lorfque deux mobiles égaux fe meuvent avec la même viteffe dans des circonférences inégales, leurs forces centrifuges feront inverfement proportionnelles aux diamètres.

III.

Lorfque deux mobiles égaux fe meuvent dans des circonférences égales avec des viteffes inégales, mais conftantes pour chacun d'eux comme nous voulons que cela foit entendu dans toutes ces propofitions, la force centrifuge du plus rapide fera à celle du plus lent dans un rapport égal à celui des carrés des viteffes.

IV.

Lorfque deux mobiles égaux, parcourant des circonférences inégales, ont une force centrifuge égale, le temps d'une révolution fuivant la plus grande circonférence fera à celui d'une révolution fuivant la plus petite circonférence dans un rapport égal à celui des racines carrées des diamètres.

V.

Lorfqu'un mobile fe meut fuivant une circonférence de cercle avec la viteffe qu'il acquiert en tombant d'une hauteur égale au quart du diamètre, il aura une force centrifuge égale à fa gravité; en d'autres termes, il tendra la corde, par laquelle il eft attaché au centre, avec la même force que lorfqu'il y eft fufpendu.

VI.

Dans la furface concave d'un conoïde parabolique à axe vertical toutes les révolu-

[1]) Nous ne publions ici que la traduction française des treize théorèmes, vu que le texte latin a déjà été publié aux p. 315—318 du T. XVI.

tions d'un mobile parcourant des circonférences horizontales petites ou grandes ſont accomplies dans des temps égaux: chacun de ces temps eſt égal à celui d'une oſcillation double d'un pendule ayant pour longueur la moitié du latus rectum de la parabole engendrante. DE LA FORCE CENTRIFUGE.

VII.

Lorſque deux mobiles ſuſpendus à des fils inégaux parcourent en tournant des circonférences horizontales, l'un des bouts du fil demeurant immobile, et que les hauteurs des cônes dont les fils décrivent la ſurface par ce mouvement ſont égales, les temps des révolutions ſeront auſſi égaux entre eux.

VIII.

Lorſque deux mobiles, ſuſpendus à des fils égaux ou inégaux, tournent comme précédemment d'un mouvement conique et que les hauteurs des cônes ſont inégales, les temps de révolution feront dans un rapport égal à celui des racines carrées de ces hauteurs.

IX.

Lorſqu'un pendule poſſédant un mouvement conique décrit des circonférences extrêmement petites, leur période aura au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale au double de la longueur du pendule un rapport égal à celui de la circonférence d'un cercle à ſon diamètre; par conſéquent cette période eſt égale au temps de deux oſcillations latérales fort petites du même pendule.

X.

Lorſqu'un mobile parcourt une circonférence et que la période de ce mouvement eſt égal au temps dans lequel un pendule ayant pour longueur le rayon de cette circonférence peut décrire d'un mouvement conique une circonférence extrêmement petite ou exécuter une fort petite oſcillation latérale double, il aura une force centrifuge égale à ſa gravité.

XI.

La période de révolution d'un pendule quelconque poſſédant un mouvement conique ſera égale au temps de la chute verticale d'une hauteur égale au fil du pendule, lorſque l'angle d'inclinaiſon du fil par rapport au plan horizontal eſt à peu près de 2°54′. Il en ſera exactement ainſi, lorſque le ſinus du dit angle eſt au rayon comme le carré inſcrit à un cercle eſt au carré de ſa circonférence.

XII.

Lorſque deux pendules de même poids, mais dont les fils ſont inégalement longs, décrivent en tournant des ſurfaces coniques et que les hauteurs des cônes ſont égales,

DE LA FORCE CENTRIFUGE.

les forces avec lesquelles ils tendent leurs fils seront entre elles dans un rapport égal à celui des longueurs des fils.

XIII.

Lorsqu'un pendule simple exécute un mouvement latéral maximum, c.à.d. lorsqu'il descend par un quart entier de circonférence de cercle, il tendra son fil, au moment où il sera parvenu au point le plus bas de la circonférence, avec une force trois fois plus grande que s'il y était simplement suspendu [1]).

FIN.

[1]) Comparez la p. 45 de l'Avertissement qui précède.

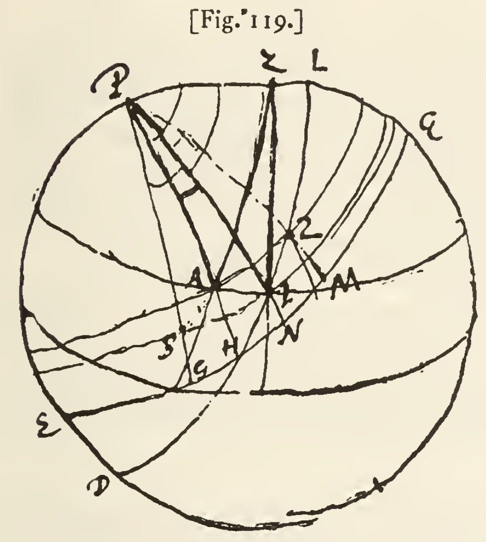
APPENDICE I

À LA PARS PRIMA DE L',,HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1668—1669.]

A. Ad inveniendas longitudines in mari, ex duabus æqualibus ſolis altitudinibus et hora pendulorum [1]).

[Fig. 119.]



PLQ meridianus. P polus. Z. zenit, EQ æquator. A1 parallela horizontis. LD ecliptica.

1 locus ſolis in ecliptica cum ante meridiem obſervaretur ejus diſtantia a vertice Z1 [2]).

2 locus ſolis in ecliptica cum poſt meridiem obſervatus fuit in eadem diſtantia a vertice atque ante meridiem. tranſlato nempe puncto eclipticæ 2 in A, et 1 in B.

Interceſſere autem inter obſervationem utramque horæ horologij 10. daturque punctum eclipticæ 1 puta 10 gr. ♈. Et altitudo poli. et diſtantia a vertice Z1 vel ZA. Quæritur quot horis poſt primam obſervationem ſol fuerit in meridiano.

Ex ephemeride datur arcus eclipticæ BA, et ex tabula aſcenſionum rectarum dabitur proinde arcus æquatoris GH [3]) arcui BA

---

[1]) La Pièce *A* est empruntée aux p. 241—242 du Manuscrit C écrites entre février et mai 1668. Comparez sur des calculs de ce genre, où toutefois il n'est pas encore tenu compte du déplacement du soleil dans l'écliptique, l'avant-dernier alinéa de la p. 222 et le premier alinéa de la p. 226 du T. XVII.

[2]) Le point 1 (Fig. 119) ne désigne pas l'endroit où se trouvait le soleil au moment de l'observation matinale: dans la figure cet endroit a été transféré de l'Orient à l'Occident, à égale distance du méridien. Comparez le cinquième alinéa là où il est question du ,,duplus arcus QN".

[3]) C'est par hasard que dans la Fig. 119 le point H coïncide (ou peu s'en faut) avec l'intersection de l'équateur et de l'écliptique.

conveniens, unde itaque noſcitur angulus BPA. Porro ex 3 lateribus trianguli PAZ[1]), invenietur angulus APZ et ex 3 lateribus trianguli P1Z[1]) invenietur angulus 1PZ, qui ablatus ab APZ relinquit angulum AP1. cui addito BPA, cognoſcitur angulus BP1. Hic vero angulus BP1 menſurat tempus quod elapſum eſt dum punctum eclipticæ 1[2*]) pervenit in B. Ponitur autem 1 eſſe in B cum ſol eſt in A. Itaque 10 horis tranſierunt meridianum duplus arcus QN et inſuper arcus NG. Ergo à 10 horis auferendo tempus quo tranſijt arcus NG, relinquitur tempus quo tranſijt duplus arcus QN. cujus itaque temporis dimidium additum horæ primæ obſervationis dabit horam qua punctum eclipticæ 1 fuit in meridiano. Tunc autem ſol nondum eſt in meridiano, ſed adhuc tranſire debet dimidium aſcenſionis rectæ NM. Ergo addendo tempus hujus dimidij arcus NM ad horam inventam qua punctum 1 erat in meridiano, habebitur hora qua ſol erat in meridiano.

Brevius vero ſic idem invenitur. Tempus quo punctum eclipticæ 2 eſt in A excedit tempus quo idem punctum 2 erat in circulo P1N[2*]) tempore arcus HN. Itaque ſi a 10 horis, hoc eſt, a tempore inter duas obſervationes æqualium ſolis altitudinum, auferatur tempus arcus HN, relinquetur tempus quo ſol æquales angulos horarios confecit ab utraque parte meridiani PQ, utrumque ſcilicet æqualem ipſi QPN. Cujus temporis ſemiſſe itaque à prima obſervatione ſol pervenit ad meridianum (quandoquidem mutatio aſcenſionis rectæ, dum percurrit exiguum arcum 1, 2, pro motu æquabili haberi poteſt) adeoque dicti temporis ſemiſſis additus horæ primæ obſervationis dabit horam qua ſol erat in meridiano. Itaque tantum invenire opus eſt angulum AP1 quem metitur arcus HN.

N. B. datur complementum declinationis primæ P1; deinde ex tempore dato 10 horarum cognoſcitur locus ſolis 2, et proinde et complementum declinationis P2 ſive PA.

His caſibus omnibus quibus P2 arcus major quam P1[2]) addendum eſt tempus arcus HN ad horas elapſas inter obſervationes. tum ut prius ſummæ dimidium additum horæ primæ obſervationis dabit horam qua ſol erat in meridiano.

B. Pour mettre dans l'inſtruction[3]).

[2*]) Voir la note 2 de la p. 369 qui précède.

[1]) Les arcs PA et P1, compléments de déclinaisons, sont connus: comparez le troisième alinéa.

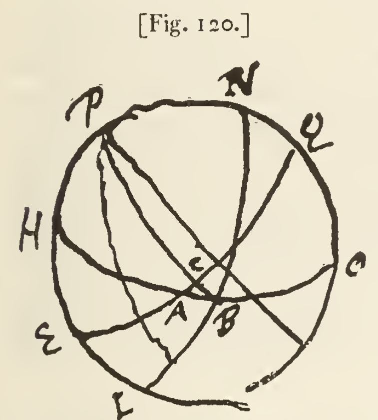
[2]) Les „casus omnes" où P2 > P1 se rapportent à quelques autres figures dans le genre de la Fig. 119.

[3]) La Pièce *B* est empruntée aux p. 20—21, datant de septembre 1668, du Manuscrit D. Comparez la p. 195 du T. XVII sur l'intention de Huygens de publier une traduction française retouchée de son „Kort Onderwijs aengaende het gebruyck der Horologien etc." de 1665 (T. XVII).

Il faut dans le vaiſſeau ſuſpendre les horologes dans la chambre du Capitaine ou autre lieu commode qui ſoit bien ſec et les defendre autant qu'on peut de la pouſſiere ſans avoir egard que ce ſoit pres du grand maſt ou non puiſqu'on a veu par experience que la difference pour le mouvement n'eſt pas conſiderable.

Puis que l'anneau graduè ne peut pas ſervir, ni l'arbaleſte ordinaire avec aſſez d'exactitude, il faudra faire un quartier Anglois [4]) ſelon les avis qu'en donneront de Combe [5]) et la Voye [6]). Mais il faudra ſe ſervir le plus qu'on peut du coucher et lever du ſoleil, parce que ces obſervations ſont incomparablement plus certaines que toutes celles qu'on ſcauroit faire avec les inſtruments [7]). Si on peut avoir le lever et le coucher en un jour l'on s'en peut ſervir ſans aucun calcul d'heure par les triangles. Mais ſi l'on n'a que l'un ou l'autre, l'on ſupputera l'heure du coucher ou lever par la declinaiſon du ſoleil connue et par la hauteur meridiene qu'on ne doibt pas manquer d'obſerver et qui ſe prend aſſez preciſement. Ce calcul ſe fait par le triangle rectangle BCA [Fig. 120], dont l'angle C que fait le meridien [8]) PB (paſſant par B lieu du ſoleil) fait [ſic] avec l'Equateur EQ. Et l'angle BAC eſt la hauteur meridiene du

[Fig. 120.]



4) D'après une note à la p. 334 de l'édition de 1880 des „Voyages and works of John Davis the Navigator" (London, Hakluyt Society"): „The back staff, invented by Davis, was the forerunner of Davis's quadrant, called by the French „Quartier Anglais". Ces instruments servent à mesurer la hauteur du soleil en lui tournant le dos. L'ouvrage „The Seamans Secrets" par John Davis parut en 1594: il n'existe aujourd'hui, paraît-il, que des exemplaires de la deuxième édition de 1607 (London, Th. Dawson). À la p. 334 nommée (les „Seamans Secrets" occupent les p. 229—337) on trouve une figure représentant l'instrument primitif. Le „quartier anglais" est représenté à la p. 356 du Vol. I de l'ouvrage „Early Science in Oxford" par R. T. Gunther (Oxford, printed for the subscribers, 1923). On peut le voir à Leiden dans le „Ned. hist. natuurw. Museum". Il est représenté aussi, sous une forme légèrement différente, à la p. 14 de l'ouvrage de W. J. Blaeu „De groote Zeespiegel, inhoudende een korte Onderwijsinge in de Konst der Zeevaert etc." (Amsterdam, J. Blaeu, MDCLV). Blaeu l'appelle „omgekeerden Graedboogh ofte dubbelden dryhoeck..... daer van den eenen 60 en den anderen 30 graden begrypt".

Dans son „Kort Onderwijs" de 1665 Huygens ne fait pas encore mention de cet instrument: comparez le deuxième alinéa de la p. 197 du T. XVII. Voir les Additions et Corrections à la fin du présent Tome sur quelques figures de Huygens relatives à ce sujet qu'on trouve plus loin.

5) Il s'agit sans doute de „de Combes" mentionné aussi par Huygens en février 1668 (voir la note 1 de la p. 24 qui précède). À la p. 223 du Manuscrit F, datant de 1685 ou 1686, on trouve quatre noms parmi lesquels figure celui de „Francois de Combe". Il paraît probable que le prénom était en effet François et non pas Francesco (p. 614 du T. VI).

6) Voir la Pièce *C* qui suit.

7) Comparez la note 2 de la p. 218 du T. XVII.

8) Lisez: „cercle de déclinaison". Il faut pourtant remarquer que, du moins en anglais, le mot

ſoleil [1]) ou le complement de la hauteur du Pole. Et le coſtè CB la declinaiſon du ſoleil [1]). d'ou l'on calcule le coſtè AC, arc de l'equateur. lequel on adjoute à 90 degr. quand les jours ſont plus longs que de 12 heures, ou on l'oſte des mesmes 90 deg. quand les jours ſont plus courts que de 12 heures. Et on convertit cette ſomme ou difference en heures. diſant . . . . . [2]).

On pourroit avoir des tables pour les heures du lever et du coucher du ſoleil dans toute l'annee et pour toutes elevations de pole de degrè en degrè.

Pour ajuſter les horologes quand le vaiſſeau eſt a la rade ou au port, il ne faut pas porter les horologes a terre. parce qu'en les remettant dans leur boetes pour les raporter au vaiſſeau on doit apprehender que tous ces remuemens ne les alterent et que les ſuſpendant dans le vaiſſeau elles [3]) ne conſervent preciſement la meſme meſure qu'ils [3]) avoient ſur tetre. Il vaut donc mieux de les laiſſer ſuſpendues [3]) dans le vaisſeau, et d'aller obſerver ſeulement a terre quelque azimut d'eſtoile fixe par des filets, ou quelque coin de maiſon, avec un point fixe d'ou l'on regarde [4]), et a l'inſtant que l'eſtoile y joint faire ſigne [5]) avec du feu ou par un coup de piſtolet ou de mouſquet a celuy qui regarde l'horologe dans le vaiſſeau afin qu'il marque l'heure qu'elle montre. et le lendemain ou quelques jours apres ayant fait la meſme obſervation avec la meſme eſtoile l'on connoiſtra la difference journaliere de l'horologe, comme il eſt dit dans l'inſtruction [6]).

Quand on ne ſcauroit pas preciſement la difference journaliere des horologes, il ne faut pas laiſſer de faire les obſervations des Longitudes parce qu'on pourra par apres rechercher cette difference journaliere et redreſſant par la les obſervations precedentes voir l'effet des horologes et meſme les veritables differences de Longitude des terres qu'on aura rencontrees.

,,meridian'' a parfois un sens plus général. Davis p.e. à la p. 293 de l'ouvrage cité dans la note 4, appelle ,,Eclipticall Meridian'' un grand cercle quelconque passant par les pôles de l'écliptique.

[1]) ∠BAC, complément de la hauteur du pôle, représente la hauteur méridienne du soleil non pas dans le cas considéré dans la Fig. 120, mais dans celui où le soleil se trouve dans l'équateur. Il est évident qu'il ne s'agit pas ici d'une erreur, mais seulement d'une expression peu heureuse. CB est la déclinaison du soleil de la figure.

[2]) Phrase inachevée. On obtient ainsi l'heure de l'horloge correspondant au temps où le soleil se trouvait dans le méridien.

[3]) Chez Huygens le mot ,,horologe'' est généralement féminin: mais il n'en est pas toujours ainsi de son temps; voir p. e. les p. 420 du T. II, 399 du T. III (lettres de P. Petit) et 193 du T. XVII.

[4]) Comparez les p. 106—109 qui précèdent.

[5]) Comparez, à la p. 501 du T. VI, le huitième alinéa de la Piece C qui suit.

[6]) Voir la p. 208 du T. XVII, où il est toutefois question d'une détermination de la différence journalière d'une horloge par l'observation du soleil et non pas par celle d'une étoile fixe.

C. Sur l'Effay des Horologes fur mer par la Voye dans le vaiffeau de M. de Beaufort au voiage de Candie en 1669 [7]).

[Voir les p. 501—503 du T. VI].

D. Om te weten hoeveel de dampheffing den opgangh der fonne verhaeft of den ondergang verachtert [8]).

Den fchrijver van 't Journael heeft de fons center fien opgaen den 9 Julij 1669 als het horologe wees op 2 uren 56'.6".

En op den 19 Julij daer nae weder het fons center fien opgaen ten 2 uren 52'.28". Het uren getal der horologien is dan 3'.38" min als 10 dagen, dat is 9 daghen 23 uren 56'.22". waer af getrocken het vereffeningh getal van den 9 Jul. dat is 11'.0" en weder bij gedaen dat van den 19. Jul. te weten 9.58, foo vind men 9 dagen. 23 uren 55'.20". Dit moet nu gelyck wefen (indien 't horologie wel geftelt was) aen het uren of tijdtgetal der fonne tuffchen de twee obfervatien verloopen. 't Welck aldus gevonden werdt. De bereeckende ure der fons middelpunts opgang den 9 Julij was ten 4 uren 50' 38". waer af treckende 2'.54" die de dampheffing den opgangh doet verhaeften, foo was de fightbare opgangh des centers ten 4 ur. 47'44" [9]).

Wederom den 19 Jul. was des fons middelpunts berekende opgangh ten 4 ur. 56'2". waer af treckende 2'.54" voor de verhaefting der opgangh door de dampheffing komt de fichtbaere opgangh des centers ten 4 ur. 53'.8". Hier af nu getrocken de voorgaende 4 ur. 47'.44", foo komt voor het tijdtgetal der fonne tuffchen de twee obfervatiën boven de 10 dagen, noch 5'.24". Maer het tijdtgetal van 't horologie was gevonden 9 dag. 23 ur. 55'.20" foo is dit minder als der fonne tijdtgetal om 10'.4". dat is de daghelijckfe verachteringh der horologie $1'\frac{4}{10}''$. men konde de 2'54" van de verhaefting der fonnen opgangh beijde de dagen achter laten. maer niet indien men den tijdt genomen hadt van een opgangh der fonne tot een ondergangh.

De getallen onder malkander te ftellen [10]).

---

[7]) La Pièce *C* a été tirée du Manuscrit D (p. 226—227, datant de septembre 1669).

[8]) Traduction: „Pour savoir combien l'élévation apparente due aux vapeurs avance le lever ou retarde le coucher du soleil".

La Pièce *D*, comme la Pièce *C*, contient des remarques de Huygens sur le rapport de de la Voye que nous ne possédons plus. Elle est empruntée à la p. 215 du Manuscrit F. La p. 209 date du 20 octobre 1685 et la p. 227 du 5 mai [1686]; comparez la note 10.

[9]) En marge: men kan seggen, de berekende en door de dampheffing gecorrigeerde ure des opganghs was &c.

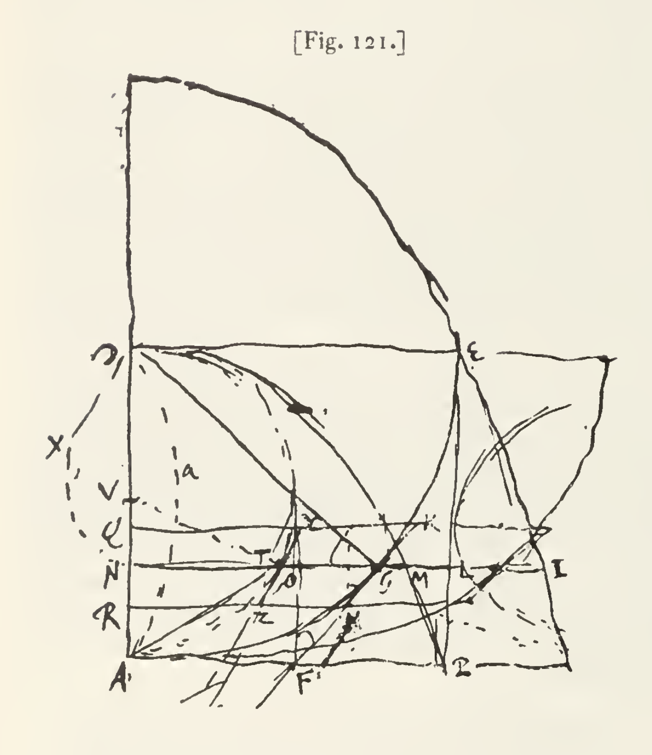
[10]) Voir la p. 61 du T. IX. En 1686 — comparez la note 8 — Huygens se fervit, comme on voit, de quelques données du rapport de de la Voye dans la composition de la nouvelle Instruction de cette année (T. IX, p. 55—76). On trouve plus loin dans le présent Tome la traduction d'une partie de cette Instruction; voir les Additions et Corrections.

APPENDICE II

À LA PARS PRIMA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1659—1693 ou 1694]

[Fig. 121.]



A. [1]) Quæritur tempus per quadrantem Circumferentiæ circuli, quod dubito an inveniri poſſit.

Ut AT ad GF [Fig. 121] ita faciendum YZ ad aliam quæ erit tempus per KH, ſed ut AT ad GF ita IN ad NL [2]).

Ratio temporis per KH ex EG ad tempus per QR cum motu æquabili dimidio ex DA [3]) componitur ex rationibus KH ad QR et $\frac{1}{2}$AP ad MN [4]), hoc eſt ex DG ſive LN ad NG et $\frac{1}{2}$AP ad MN, hoc eſt eam quam $\frac{1}{2}$qu. AP ad ▭ MNG.

NG $\sqrt{aa - xx}$

MN $\sqrt{ax}$

▭ MNG $\sqrt{a^3x - ax^3}$

tempus per QR ——⊤—— tempus per KH

$\sqrt{a^3x - ax^3}$ ——⊤—— $\frac{1}{2}aa$ —————— a/y

$$\frac{\frac{1}{2}a^3}{\sqrt{a^3x - ax^3}} \infty y$$ [5]).

---

[1]) Chartæ Mechanicæ f. 73 verso, datant de décembre 1659. Consultez sur la f. 73 recto et verso les notes 1 et 4 des p. 392—393 du T. XVI. Nous n'avons pas reproduit en cet endroit le calcul de la p. 73 v. disant que Huygens ne trouva que plus tard une solution approchée pour le „tempus per quadrantem circumferentiæ". Ce n'est en effet que dans l'„Hor. osc." qu'on trouve la valeur numérique approchée 34 : 29 (inférieure à la vraie valeur) du rapport de la période d'une oscillation de 180° du pendule simple à la période de l'oscillation extrêmement petite du même pendule (voir la note 2 de la p. 101 qui précède). Evidemment ce rapport ne pouvait être déterminé avant que, dans ce même mois de décembre, la règle qui donne la formule de la période de l'oscillation extrêmement petite avait été trouvée (T. XVI, p. 410). Pour trouver ensuite le rapport 34 : 29 Huygens peut s'être servi (voir la note 2 de la p. 378) de l'équation $y = \frac{\frac{1}{2}a^3}{\sqrt{a^3x - ax^3}}$ de la f. 73 v. Il est intéressant de savoir que cette formule qu'on retrouve dans la Pièce *C* de 1669 qui suit, a déjà été trouvée par lui en 1659 au début de ses recherches sur ce sujet.

[2]) Nous conservons ce début quoique Huygens n'ait pas poursuivi ce calcul. Dans la proportion AT : GF = YZ : tempus per KH, il est évident que par „YZ" il faut entendre „tempus per YZ". La très petite droite KH est sans doute supposée parcourue avec la vitesse provenant d'une chute de E en G. Or, de quelle hauteur au-dessus de T Huygens suppose-t-il tombé le point pesant qui parcourt la petite droite YZ? En partant de la proportion du texte on constate, en faisant le calcul, que, pour toute position de T, le point de départ est situé à une hauteur $\frac{1}{4}$AD ou $\frac{1}{4}a$ au-dessus de lui. En d'autres termes: la demi-circonférence DTA est parcourue avec la vitesse constante $\frac{1}{2}ag$ (où g est l'accélération de la pesanteur), c.à.d. avec la moitié de la vitesse qui proviendrait d'une chute suivant DA.

La proportion AT : GF = IN : NL sert à introduire ensuite la grandeur constante NL ou a au lieu de la variable AT pour toute position du point G. La considération de la figure conduit à la relation AT : GF = $\sqrt{a(a+x)} : a$, où x = DN. Pour que $\sqrt{a(a+x)} : a$ = IN : a, il faut que les points I soient situés sur la parabole de la figure, qui passe par le point E et dont la distance du sommet au point D est égale à a.

On a maintenant: tempus per KH = $\frac{a.\text{YZ}}{\text{IN}}$ (où YZ désigne toujours le „tempus per YZ"), où le numérateur est constant lorsque tous les „arcs" YZ qui „composent" la demi-circonférence DTA sont pris égaux entre eux. Pour trouver le temps qui correspond à la chute le long de EA il faudrait intégrer l'expression trouvée pour toutes les valeurs de IN de a à $a\sqrt{2}$. Ce qui rend cette intégration, même approchée, difficile ou impossible, c'est que les éléments YZ ne se trouvent pas sur une droite mais sur une circonférence.

Observons que la demi-circonférence DTA réapparaît dans les démonstrations des propositions se rapportant à la chute cycloïdale; voir les p. 406 et suiv. du T. XVI et les figures de la Pars Secunda de l'„Hor. osc.".

[3]) De nouveau Huygens compare le mouvement accéléré suivant le quart de circonférence EKA avec un mouvement uniforme, mais cette fois il a soin de prendre ce dernier suivant une droite. Comparez sur le résultat du calcul la pièce *C* qui suit (note 1 de la p. 378).

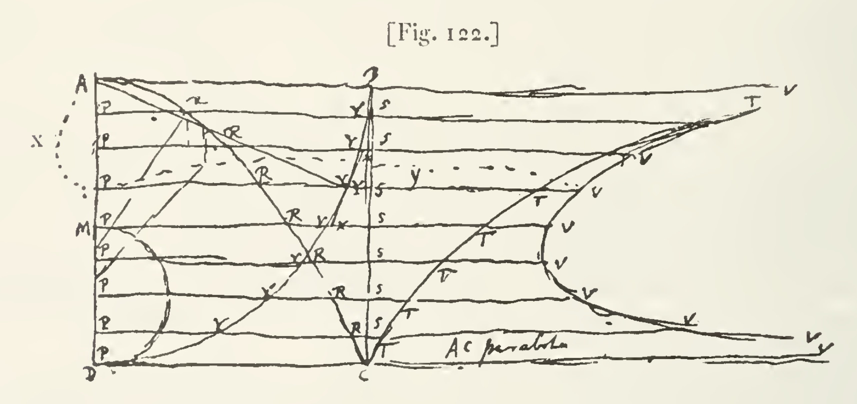
[4]) La ligne DMP est la parabole qui donne les vitesses. Comparez la Fig. 7 de la p. 398 du T. XVI. La vitesse constante le long de QR est à la vitesse accélérée en G comme $\frac{1}{2}$AP : MN.

[5]) Le temps nécessaire pour parcourir un élément QR, qui est constant lorsque tous les élements QR sont égaux entr'eux, étant représenté par la grandeur constante, d'ailleurs arbitrairement choisie, a, le temps nécessaire pour parcourir l'élément KH correspondant à QR aura la valeur y du texte.

B. [1]) De descensu accelerato gravium. Hypotheses. De composito motu. Theorema Galilei exactè demonstratum. Aliud de ascensu. De æquali ascensu et descensu. Eadem super planis contingere &c. quæ de descensu super planis, et curvis superficiebus, et de curva Cycloide. De motu pendulorum. Circularem non esse isochronum contra Galilei et multorum opinionem, difficilem esse determinationem temporis per quadrantem circuli et arcus minores. quænam sit proxima. Quænam ex motu per superficies applicentur motui penduli circularis. Pendulum Cycloidicum. Proprietas evolutionis ad Theoremata de Evolutione et dimensione curvarum remittitur.

C. [2]) De tempore descensus per arcum quadrantis circumferentiæ.

[Fig. 122.]



AC [Fig. 122] parabola.

PR, PS, PT proportionales.

Item PY ad PS ut PT ad PV. Erit tempus per quadrantem BD ad tempus accelerati motus per AD [3]) ut spatium infinitè extensum AVVVDA ad spatium infinite extensum ATTCDA, hoc est ad duplum quadratum ABCD.

---

[1]) La Pièce *B* est empruntée à la p. 224 du Manuscrit D datant de septembre 1669 (la p. 225 porte la date du 29 septembre). En ce mois Huygens s'apprêtait donc à rédiger définitivement les théorèmes de la Pars Secunda sur le mouvement des corps tombants dont il s'était occupé aussi en 1659 (p. 125—141 du T. XVII). Les p. 222—223 du Manuscrit D contiennent des projets de rédaction de quelques théorèmes sur la chute que nous ne reproduisons pas. Nous plaçons la pièce *B* dans un Appendice à la Pars *Prima*, parce qu'il y est c. a. question de la détermination du „tempus par quadrantem circuli", comme dans les Pièces *A*, *C*, *D* et *E*.

[2]) La Pièce *C* est empruntée à la p. 68 v. du Manuscrit G, datant d'un des trois premiers mois de 1691.

[3]) Contrairement à ce qu'il avait fait en 1659 (p. 375, note 3). Huygens compare ici (voir la suite du texte) les temps nécessaires pour parcourir les éléments du quart de circonférence BD avec les temps dans lesquels les éléments correspondants de la droite verticale AD sont parcourus d'un mouvement *accéléré* par un point qui tombe de A. Il est évident que la formule qui donne le rapport du temps suivant BD au temps suivant AD devient néanmoins la même.

Si enim DC referat celeritatem qua infima PP percurritur, referet MR celeritatem qua percurritur MI.

Tempus autem per infimum PP ad tempus per IM ut MR ad DC, nempe in ratione contraria celeritatum. Ergo tempora ut DC seu MS ad MT. Hinc singulæ TP ad se invicem ut tempora motus accelerati ex A per singulas lineas PP istis spatijs respondentes. Tempora autem per singulos arcus YY sunt ad tempora illa per sibi respondentes PP ut ipsæ singulæ YY ad singulas PP longitudine, hoc est ut singulæ respondentes SP ad YP ut facile ostenditur; hoc est ut singulæ respondentes VP ad TP. Hinc per propos. 2. Archimedis de Conoidibus et Sphæroidibus [4]) erunt omnia simul tempora per lineas PP, hoc est tempus motus accelerati per AD ad tempora omnia per arcus YY, hoc est ad tempus per arcum BD ut omnes TP ad omnes VP. hoc est [5]) ut spatium infinitum AVVDA ad spatium infinitum ATTCDA, seu 2 quadratum ABCD[6]).

PR	PS	PS	PT
$\sqrt{ax}$	a	a	$\frac{aa}{\sqrt{ax}}$

PY	PS	PT	PV
$\sqrt{aa-xx}$	a	$\frac{aa}{\sqrt{ax}}$	y

$$y\sqrt{}\ .\ \infty \frac{a^3}{\sqrt{ax}}$$

. . . .

$$y \infty \frac{a^3}{\sqrt{ax}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y \infty \sqrt{\frac{a^5}{aax - x^3}}$$

4) Voir la note 1 de la p. 179 qui précède.

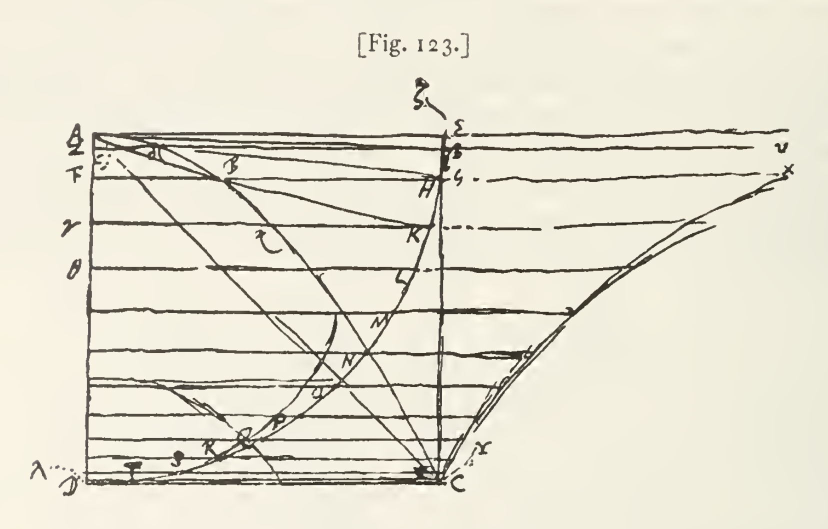
5) Huygens considère ici le rapport inverse, savoir celui du „tempus per arcum BD" à celui du „tempus motus accelerati per AD".

6) La courbe CTTT est une hyperboloïde. Son équation $y^1x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ permet de déterminer, d'après la méthode de Huygens de 1657 (note 8 de la p. 289 du T. XIV) le rapport de l'aire ABCD à l'aire BTTC. Puisque p (note nommée) a ici la valeur 1 et q la valeur $\frac{1}{2}$, on a $p-q:q = 1:1$, c.à.d. les deux aires sont égales, en d'autres termes: le „spatium infinitum [c.à.d. l'espace s'étendant jusqu'à l'infini] ATTCDA" est égal au double du carré ABCD.

Oporteret hujus curvæ quadraturam dari [1]).
Stanni folium ſpecularis incidatur et pondus comparetur [2]).

D. [3]) Ad computanda tempora deſcenſus per arcus circumferentiæ [4]).

[Fig. 123.]



[1]) Le résultat du calcul est donc (lorsqu'on introduit le symbole de Leibniz $\int$):
tempus per arcum BD [Fig. 122]: tempus motus accelerati per AD =

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a^5}{aax - x^3}}\, dx : 2a^2.$$

En 1659 (Pièce *A*) Huygens avait trouvé (sans toutefois se servir du symbole Σ d'Euler):

$$\text{tempus per arcum BD} = \Sigma \frac{\frac{1}{2}a^3}{\sqrt{a^3x - ax^3}} \text{ ou } \Sigma \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{a^5}{aax - x^3}}.$$

Comme le temps nécessaire pour parcourir du mouvement uniforme considéré l'élément QR de la Fig. 121 était réprésenté par a (p. 375, note 5), le temps nécessaire pour parcourir la droite entière DA était $\frac{a^2}{QR}$. Ce temps est égal, d'après l'hypothèse faite pour la grandeur de la vitesse constante, à celui de la chute accélérée suivant DA. On a donc:
tempus per arcum BD: tempus motus accelerati per AD =

$$= \Sigma \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{a^5}{aax - a^3}} : \frac{a^2}{QR} \qquad = \Sigma\, QR. \sqrt{\frac{a^5}{aax - x^3}} : 2a^2.$$

ce qui s'accorde avec le résultat du calcul de 1691 (début de la présente note).

[2]) Est-ce pas un pesage de ce genre que Huygens avait trouvé entre 1659 et 1673 la valeur approchée 34 : 29 (note 2 de la p. 101) du rapport en question? Nous ne le pensons pas, puisqu'il

§ 1. AF ∞ c [Fig. 123].

AD ∞ a ∞ latus rectum parabolæ ABC.

FB, FG, FX proportionales.

$$\begin{array}{ccc} & \text{FG} & \text{FG} \\ \text{FB} \infty \sqrt{ac} & \top a \text{———} & a \Big| \dfrac{aa}{\sqrt{ac}} \text{FX} \end{array}$$ [5])

cujus igitur logarithmus eſt 2 log. a — $\frac{1}{2}$ log. a — $\frac{1}{2}$ log. c ſive $\frac{3}{2}$ log. a — $\frac{1}{2}$ log. c.

$\frac{3}{2}$ l. a — $\frac{1}{2}$ l. c ∞ l. temporis per EG [6]), celeritate ex AF; ſive rectæ FX.

$\zeta\beta$ eſt ∞ $\frac{1}{4}$ arcus EH [7]).

Zδ. Zβ. ZV proportionales [8]).

Erit ZV pauxillo brevior tempore per EH quia eſſet æqualis tempori per rectam perpendicularem æqualem EH arcui ſeu per quadruplam Eβ. ſed poteſt ſumi tanquam æqualis [9]).

---

propose ici une méthode pratique qui ne pouvait pas servir pour obtenir, comme il le dit dans l'„Hor. osc.", une valeur du rapport „aussi proche qu'on voudra". Il s'agissait donc probablement avant 1673 d'un calcul approché de la surface représentée par l'intégrale de la note 1, à moins que Huygens n'ait suivi déjà en ce temps la méthode de la Pièce *E* qui suit ou une autre méthode que nous ne connaissons pas. Voir encore la note 2 de la p. 384 qui suit.

[3]) Manuscrit I, p. 100 et suiv. De ces deux pages la première date de 1693 ou 1694 suivant la place qu'elle occupe dans le Manuscrit. L'autre est le recto d'un feuillet collé dans le livre. La division en §§ est de nous.

[4]) En marge: „Vide lib. G. pag. 34. 1". C'est la page, numérotée par Huygens, que nous avons désignée par 68 verso (p. 376, note 2).

[5]) FX correspond donc à PT (ou MT) de la Fig. 122 de la Pièce *C*; x de la Fig. 122 s'appelle maintenant c.

[6]) En disant que la droite FX représente le „tempus per EG" Huygens considère cette droite comme une partie d'une surface. C'est en effet la bande découpée par deux horizontales de la surface XCDAX (Fig. 123, laquelle s'étend jusqu'à l'infini vers le côté droit), qui représente le temps d'une chute verticale suivant la largeur de cette bande. À droite la bande est limitée par une partie de la courbe CX et dans le cas du „tempus per EG", où EG est le premier élément de la verticale, la bande s'étend jusqu'à l'infini. Dans la Pièce *C* Huygens disait que la surface considérée est *proportionnelle* au temps. Ici il l'égale au temps. Un peu plus loin, il dit de même que le temps du mouvement accéléré suivant AD est *égal* au double du carré AC. Il est évidemment plus correct de dire que la droite FX représente non pas un temps mais l'inverse d'une vitesse.

[7]) L'élément $\zeta\beta$ (où le point ζ est identique avec le point E) est un élément de la *verticale* dont la longueur est égale par hypothèse à $\frac{1}{4}$ de *l'arc* EH.

[8]) Dans la Fig. 123 V est donc situé sur la courbe CX.

[9]) Huygens se propose apparemment de chercher une valeur approchée du temps nécessaire pour parcourir le quart de circonférence ED du mouvement accéléré tel qu'il a lieu en réalité; à cet effet il divise le quart de circonférence en 12 arcs égaux et suppose chacun d'eux parcouru

Porro incipiendo ab FX et finiendo in DC, ſumma applicatarum eſt minor tempore per quadrantem ED. ſi nempe ducatur in EH arcum [1]).

Sed incipiendo ab ZV et finiendo in λY ſumma applicatarum erit major tempore per eundem quadrantem ED. ducta nempe in arcum EH [2]).

AF, Aγ, Aθ &c. ſunt ſinus angulorum EAH, EAK &c.

Tempus motus accelerati per AD erit ∞ 2 quad. AC.

Ratio horum eſt, quia ſi arcus EH ponatur peractus æquabili celeritate quanta ex altitudine EG, vel per EH, acquirit, quam refert FB applicata in parabola AC, ſumetur tempus vero brevius. Item ſi pro tempore deſcenſus continuati per HK ſumatur illud quo HK percurreretur celeritate æquabili quanta ex EK, quam refert γκ, rurſus ſumitur tempus vero brevius.

quia autem arcus æquales ponuntur, erunt tempora quibus percurri ponuntur in ratione contraria celeritatum, hoc eſt ut applicatæ in curva CX, ad rectam AD.

§ 2. Ponatur primo quadrantis arcus ED diviſus in 10 partes æquales [3]).

Ergo AF ∞ ſin 9. gr.

AF ∞ 1564345 cujus log. 9.1943324

4.5971662 $\frac{1}{2}$ log. *c*.

avec une vitesse constante. La droite verticale égale à l'arc EH dont il est question dans la note 7 est parcourue dans un même temps, soit qu'on considère le mouvement accéléré naturel, soit qu'on suppose cette droite verticale parcourue avec la vitesse constante qui résulte de la chute verticale le long de $E\beta = \frac{1}{4}EH$. C'est ce temps-là que Huygens désigne par „ZV" quoiqu'en réalité (comparez la note 6) il soit égal à l'aire de la bande limitée par les horizontales AE (de longueur infinie) et ZV. Le „tempus per EH", c.à.d. le temps dans lequel l'arc EH est parcouru dans le mouvement réel, est évidemment, comme le dit le texte, tant soit peu plus long que le temps nécessaire pour parcourir la verticale égale à EH.

[1]) On obtient une limite inférieure pour le temps de la chute le long de HD en supposant chacun des 12 arcs égaux, dans lesquels HD est divisé, parcouru avec la vitesse finale telle qu'elle est en réalité pour cet arc. Pour chaque arc le temps est alors égal au produit de EH par l'„applicata", c.à.d. par l'horizontale se terminant à la courbe CX qui passe par le point le plus bas de l'arc considéré. La limite inférieure totale est donc égale au produit de EH par la somme des horizontales de FX à DC.

[2]) On obtient une limite supérieure pour le temps correspondant aux 11 derniers arcs en les supposant parcourus avec la vitesse initiale. Il faut encore y ajouter le temps du premier arc. La suite du texte donne d'ailleurs l'explication exposée dans les notes 1 et 2.

Il est vrai que pour le premier arc la valeur trouvée était inférieure au vrai temps, de sorte que, lorsqu'on ajoute cette valeur à la limite supérieure obtenue pour les 11 arcs suivants, il n'est pas rigoureusement démontré qu'on obtient encore une limite supérieure du temps nécessaire pour parcourir le quart de circonférence. Mais Huygens avait dit que la valeur trouvée pour le premier arc diffère sans doute très peu de la vraie valeur.

[3]) Le § 2 a peu d'importance puisque Huygens retourne au §3 à la division du quart de circonférence en 12 parties, conformément à la Fig. 123.

10.0000000
5.0000000

15.0000000 ∞ $\frac{3}{2}$ log. a
4.5971662

10.4028338 l. 2528000000 ∞ FX [4]). 252800 FX, cum AD 100000 [5]).

§ 3. Sit arcus quadrantis ED diviſus in 12 partes æquales.

Ergo AF ∞ ſin 7°30'. cujus log. 9.1156977

4.5578488
15.0000000 [6])

10.4421512 l. 276800 (1).

AG ∞ ſin 15°		Aθ ∞ ſin. 22.30'	
log. 9.4129962		9.5828397	
4.7064981		4.7914198	
15.0000000		15.0	
10.2935019	l. 196600 (2)	10.2085802	l. 161600 (3)
30°. 9.6989700		37°30'. 9.7844471	
4.8494850		4.8922235	
15.		15.	
10.1505140 [7])	l. 141300 (4)	10.1077765	l. 128200 (5)
45°. 9.8494850		52°30. 9.8994667	
4.9247425		4,9497334	
15.		15.	
10.0752575	l. 118900 (6)	10.0502666	l. 112300 (7)

4) D'après la formule $\frac{3}{2}$ log. a — $\frac{1}{2}$ log. c = log. temporis . . . . du § 1.

5) Quoique le rayon ait la longueur 10^5, le calcul de FX (note 4) a eu lieu comme si la longueur du rayon était 10^{10}.

6) La remarque de la note précédente s'applique aussi au calcul de AF et des horizontales suivantes. Mais dans la valeur finale obtenue pour chacune de ces lignes Huygens omet à bon droit les 5 zéros qu'il avait écrit dans la valeur de FX du § 2.

7) Le nombre est plus près de 10.1505150 que de 10.1505140, mais Huygens prend cette dernière valeur puisqu'il s'agit de trouver une „summa minor". Une remarque analogue s'applique à plusieurs autres nombres. Une somme plus exacte ne peut évidemment être obtenue que lorsqu'on tire de la table des logarithmes une valeur plus exacte pour chaque nombre séparément.

60°. 9.9375306
4.9687653
15........
10.0312347. 107400 (8)

67.30'. 9.9656153
4.9828076
15........
10.0171924. 104000 (9)

75°. 9.9849438
4.9924719
15........
10.0075281. 101800 (10)

82.30'. 9.9962686
4.9981343
15........
10.0018657. 100400 λY (11)

per 4 $\frac{13052}{3263.}$ [1])

fit 3263. l. 8.5136171
4.2668085
15........
10.7331915 l. 541400 ZV

7 ——— 11 ——— 100000 / 157143

13095 ∞ $\frac{1}{12}$ quadrantis.

276800 FX
196600
161600
141300
128200
118900
112300
107400
104000
101800
100400
100000 DC
1649300 fumma minor
276800 FX } s. [3])
1372500 }
DC 100000 } s.
1272500 }
541400 ZV } ad.
1813900 fumma major [4])

1649300
13095
....
21597583500 [2])

1813900
13095
....
23753020500 —┬— 20000000000

E. [5])

2768	13095
5536 2	20031
2290	....
1770	262305945 —— 200000000 ratio pauxillo minor quam temporis per quadrantem circumferentiæ ad tempus descensus perpendicularis per radium.
1510	
1345	
1230	
1145	
1095	
1055	
1032	
1018	
1005	
20031	

ratio temporis per radium ad tempus oscillationis minimæ, eadem quæ lateris quadrati in circulo ad arcum quadrantis.

113 —— $177\frac{1}{2}$ —— 10000 / 15708

141420 —— 15708 —— 200000000 / 22214

2623 —— 2222 ratio minor quam temporis per quadrantem circumferentiæ ad tempus oscillationis minimæ. Sed antehac experienti videbatur mihi esse proxime quæ 12 ad 11, non 13 ad 11 ut hic.

34 —— 29 —— 2623 —— 2222

2623	2222
29	34
.....	.....
76067	75548

10000 —— 14142 —— 20000

14142
2
28284

2623 —— 2828

2623 — 2221 — 13 — 11

/ 11 $\frac{20}{2623}$

13 — 14 ratio prox. temporum per arcum quadrantis et per arcus subtensam.

[1]) D'après ce qui a été dit à la p. 379 (note 7) il faut, pour calculer ZV (inverse d'une vitesse),

prendre la longueur c égale à $\frac{1}{4}$ de l'arc EH lui-même. Il n'est donc pas évident pourquoi Huygens prend le nombre 13052 au lieu de 13095. Apparemment il prend $\frac{1}{4}$ de la projection de l'arc EH sur la verticale, c.à.d. du sinus de 7°30′, ce qui fait d'ailleurs bien peu de différence. Les mots „sit 3263" indiquent qu'il ne s'agit pas d'une erreur, mais qu'il croyait pouvoir se contenter de cette valeur de ZV. Comme on voit, il n'a calculé qu'ensuite (en prenant $\pi = \frac{22}{7}$) la longueur 13095 de l'arc EH.

[2]) C'est le produit de la „summa minor" par la longueur de „$\frac{1}{12}$ quadrantis". C'est donc (note 1 de la p. 380) la limite inférieure cherchée du temps d'une chute le long du quart de circonférence, le temps de la chute le long de la verticale étant représenté (note 6 de la p. 379) par 2.10^{10}. Mais ce dernier temps est à celui d'une demi-oscillation simple le long d'un très petit arc dans le rapport $\sqrt{2} : \frac{1}{2}\pi$ (comme Huygens le dit dans la Pièce *E*). Le rapport cherché est donc $21597583500 : 2.10^{10} \times 2 : 2.22145$ ou $2.15976 : 2.22145 =$ **0.97**. En d'autres termes: cette limite inférieure n'est d'aucun usage puisqu'elle est même inférieure à l'unité. Avant 1673 Huygens avait trouvé la limite inférieure 34:29 ou **1.1724** beaucoup plus approchée (note 2 de la p. 378).

[3]) s. = subtrahendo.

[4]) Pour passer de la „summa minor" à la „summa major" (note 2 de la p. 380) il faut retrancher de la première la droite CD et y ajouter la droite ZV. C'est par erreur que Huygens retranche aussi la droite FX qui dans la „summa major" correspond au temps du deuxième arc d'en haut. Il aurait donc dû trouver pour la „summa major" 2090700, et par conséquent (note 2) pour la limite supérieure du rapport cherché $2.0907 \times 1.3095 : 2.22145 = 2.73777 : 2.22145$ = **1.232**. (Le nombre erroné de Huygens donne pour cette limite du rapport la valeur $2.23753 : 2.22145 =$ **1.007** *inférieure* à la vraie valeur).

[5]) La Pièce *E* fait suite à la Pièce *D*. Elle occupe le verso du feuillet mentionné dans la note 3 de la p. 379.

Le calcul de la Pièce *D* ne pouvant apparemment conduire à des limites convenables à moins que la subdivision du quart de circonférence ne fût poussée beaucoup plus loin — nous trouvons en effet, que pour atteindre la limite inférieure **1.1724** d'avant 1673 (note 2) il ne suffit même pas de diviser le quart de circonférence en mille arcs égaux — Huygens chercha une autre méthode, tout en conservant la division du quart de circonférence en douze parties seulement. Il n'explique point cette méthode. La colonne des nombres qu'il additionne donne une „summa minor" (20031) beaucoup plus grande que la „summa minor" (16493) de la Pièce *D*, et la valeur 2623 : 2222 ou **1.18047** qui en résulte pour la limite inférieure du rapport cherché ne s'écarte pas notablement de la vraie valeur. La méthode fait donc l'effet d'être bonne. Le premier nombre de la colonne, 2768, correspondant à 276800 (FX) de la Pièce *D* — on trouve son logarithme au début du § 3 — peut évidemment être déterminé plus exactement — il deviendra un peu plus petit — et il serait sans doute également possible de déterminer exactement les autres nombres de la colonne si nous savions comment, d'après Huygens, il faut les calculer. Le nombre 13095 doit être remplacé par 13090 puisque Huygens l'à calculé en prenant $\pi = \frac{22}{7}$. On trouvera donc par cette méthode une valeur qui s'écarte quelque peu de 1.18047 et peut constituer une limite inférieure se rapprochant beaucoup de la vraie valeur 1.18033 (voir la fin de la présente note). En laissant aux nombres de la colonne leurs valeurs, mais en remplacant 13095 par 13090 et 2222 par 2221, 45 on trouve (par hasard?) pour la limite du rapport précisément **1.18033**.

Quelle peut avoir été la méthode suivie? On peut représenter graphiquement par des aires

---

les 12 quantités qu'il s'agit de sommer en écartant la première horizontale ainsi que les horizontales FX....DC de la Fig. 123 l'une de l'autre à des distances égales entre elles (savoir des distances de $\frac{1}{12}$ quadrantis). Pour trouver une forme de plus en plus exacte de la courbe déformée XC il faudrait pousser la subdivision plus loin et prendre toujours des distances égales entre chaque paire d'horizontales correspondant aux extrémités d'arcs égaux dans la Fig. 123. La courbe XC restera partout concave, puisque plus la partie considérée de la courbe est petite, plus aussi la déformation est uniforme.

Dès lors il est facile de trouver une limite *supérieure* pour les 11 dernières quantités: il suffit de remplacer la courbe XC déformée par une droite brisée, de sorte que toutes les horizontales conservent leurs longueurs et que chacune des 11 quantités est représentée par un trapèze. On trouve ainsi, en partant des valeurs de la Pièce *D*, les 11 quantités

2367 presque toutes supérieures aux quantités correspondantes de Huygens (les trois der-
1791 nières seulement sont inférieures) et dont la somme 14609 n'est pas beaucoup plus
1514½ grande que la somme correspondante, 14495, de ses quantités à lui. Pour obtenir la
1347½ somme 14609 il suffit d'ailleurs de prendre le nombre 12725 de la colonne de la
1235½ Pièce *D* et d'y ajouter $\frac{1}{2}$ (2768 + 1000) ou 1884.
1156 Pour trouver une limite *inférieure* pour les 11 dernières quantités on pourrait
1098½ limiter chaque trapèze nou pas par une corde de la courbe FX déformée, mais par
1057 une tangente à cette courbe, de sorte que l'une des horizontales qui limitent le
1029 „trapèze" est quelque peu raccourcie (ou bien que les deux horizontales soient rac-
1011 courcies, si le point de contact choisi ne se trouve pas sur une d'elles, mais entre
1002 elles). Ce n'est pas là cependant la voie suivie par Huygens puisque de cette façon
les rrois dernières quantités trouvées par lui devraient, comme les autres, être inférieures à celles que nous venons de calculer.

Quant à la première quantité Huygens prend apparemment pour une limite du temps cherché le *double* du produit de FX par $\frac{1}{12}$ quadrantis (ce qui explique peut-être l'erreur signalée dans la note 4; il est possible qu'en ce moment il était déjà d'avis qu'on peut prendre le *double* de FX dans la „summa minor"; or, s'il avait réellemeut pris le double, il eût fallu retrancher FX, comme il le fait, dans le calcul de la „summa major"). En effet, la bande supérieure de la figure déformée dont il est question un peu plus haut s'étend jusqu'à l'infini (comme celle de la figure non déformée) et a donc une aire beaucoup supérieure à celle du rectangle formé par FX et la droite verticale égale à $\frac{1}{12}$ quadrantis. Pour démontrer que la valeur prise par Huygens est bonne, il faudrait faire voir (comparez la Fig. 121 de la Pièce *A*):

$$\int_0^b \frac{a^3 dx}{\sqrt{ax}\,\sqrt{a^2 - x^2}} > \frac{\pi a^3}{12\sqrt{a.b}}$$

où $b = a \sin 7°30'$ est la projection du premier $\frac{1}{12}$ quadrantis sur la verticale. Ou plus brièvement

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x\,(a^2 - x^2)}} > \frac{\pi}{12}\frac{1}{\sqrt{b}},\ \text{où } b = ka = 0.13053a.$$

Le développement en serie de l'intégrale donne

$$\int_0^b \left\{ \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a^3}\, x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8a^5}\, x^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{16a^7}\, x^{\frac{11}{2}} \ldots\ldots \right\} dx.$$

Il faudrait donc faire voir que

$$\frac{1}{a}\left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2a^3}\left(\frac{b^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) + \frac{3}{8a^5}\left(\frac{b^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\right) + \frac{5}{16a^7}\left(\frac{b^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}}\right) \ldots > \frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}$$

ou
$$2k + \tfrac{1}{5}k^3 + \tfrac{1}{12}k^5 + \tfrac{5}{104}k^7 \ldots > \frac{\pi}{12}$$

ou 0.26106 + 0.00045 .... > 0.26180, ce qui pourtant n'est pas vrai.

Mais on voit que la valeur prise par Huygens, tout en étant quelque peu supérieure à la vraie valeur, en est très rapprochée. Il est donc *possible*, quoique sa méthode nous soit inconnue, que l'ensemble de toutes les quantités qu'il considère constitue en effet une limite inférieure.

Ajoutons qu'en prenant le double du produit FX par $\frac{1}{12}$ quadrantis comme premier nombre de la „summa major", telle que nous l'avons considérée, celle-ci devient 5536 + 14609 = 20145, ce qui donne pour la limite supérieure du rapport cherché $\frac{2.0145 \times 1.3090}{2.22145} = \mathbf{1{,}1871}$. Quant à la vraie valeur de ce rapport, elle est, d'après la note 1 de la p. 378,

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{2a^2}\int_0^a \sqrt{\frac{a^5}{a^2x - x^3}}\, dx \text{ ou } \frac{\sqrt{2a}}{\pi}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x\,(a^2 - x^2)}}$$ [1])

ou, en posant $x = a\,(1 - y^2)$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)\,(1 - \frac{1}{2}y^2)}}$$

ou
$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y^2 + \frac{1\cdot3}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{2^2}y^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{2^3}y^6 \ldots\right).$$

Or, on a
$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \int_0^1 \frac{y^n dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{n}{n + 1}\int \frac{y^{n-1}\, dy}{\sqrt{1 -}}$$

Le rapport cherché s'écrit donc

$$1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}\cdot\frac{1}{8} +$$

Il est quelque peu inférieur à **1.18033** [2]).

[1]) Ou, si l'on veut,

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}.$$

[2]) On peut consulter sur ce calcul L. Euler „De Motu oscillatorio penduli cuiuscunque, dum arcus datae amplitudinis absolvit", Act. Ac. Scient. Imp. Petrop. pro Anno MDCCLXXVII, Pars Posterior, Petropoli, Typ. Ac. Scient. MDCCLXXX, p. 159—182. Euler considère plus généralement le cas où l'amplitude d'une vibration simple est 2ζ; le rapport de la période d'une oscillation à celle d'une oscillation fort petite s'écrit alors

$$1+\frac{1^2}{2^2}.c^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}c^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}c^6+\ldots,\text{ où } c=\sin.\tfrac{1}{2}\zeta.$$

Cette série a d'ailleurs déjà été trouvée sous une forme peu différente de celle d'Euler par P. P. Elvius — qui s'inspire de la méthode de Newton, exposée dans le „Tractatus de Quadratura Curvarum" de 1704, pour développer l'intégrale trouvée par lui-même indépendamment de Huygens dont il ne connaît que les ouvrages imprimés — et publiée par lui dans son travail „Theorema de oscillationibus pendulorum in arcubus circularibus" (Acta Literaria et Scientiarum Sueciæ, Anni MDCCXXXIV, Upsaliæ, Sumtibus Reg. Soc. Lit. & Scient.), après que G. Vallerius eut publié dans les Acta de 1731 son article „Observatio & Experimentum de Funependulorum Vibrationibus". Vallerius trouve e. a. pour le rapport de la période d'une oscillation de 180° à une oscillation de 20°, 225: 189 ou **1,191..**, donc une valeur trop grande mais fort proche de la valeur véritable.

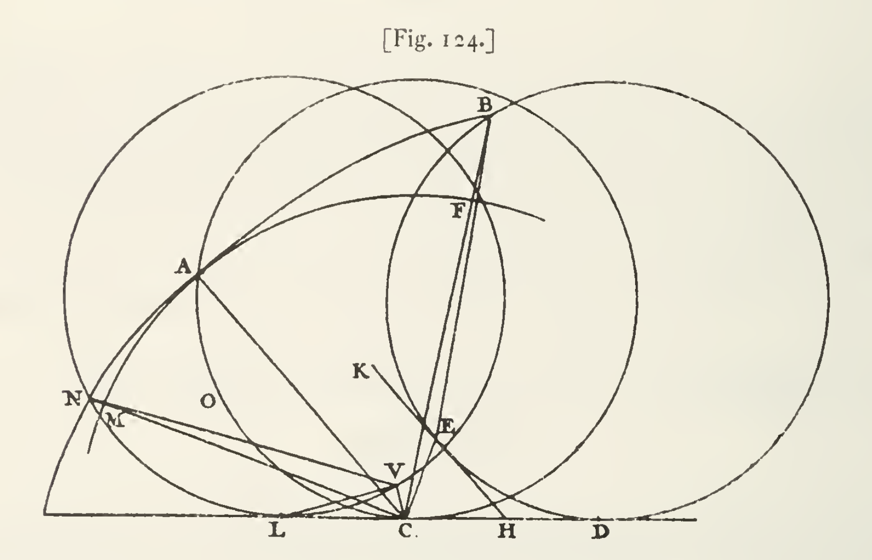
APPENDICE

À LA PARS SECUNDA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

1670.

A.[1]) *Demonſtratio propoſitionis Carteſij, de qua Schotenius in commentarijs in geometriam illius.*

[Fig. 124.]



[1]) La partie *A* de cette Pièce est empruntée aux p. 250—252 du Manuscrit D. Le texte et les figures correspondent presqu'exactement aux p. 155—157 qui précèdent, ce qui prouve, comme nous l'avons dit dans l'Avertissement (p. 36), que ces pages ont été rédigées au commencement de 1670 peu avant la maladie de Huygens. Dans ces Commentaires sur la „Géométrie" de Descartes (voir les p. 374 et 411 du T. XIV) van Schooten parle (p. 264 de l'édition de 1659) de la lettre de Descartes à Mersenne (publiée en partie en 1667 aux p. 350 et 404 du Tome III de l'édition des lettres de Descartes par Clerselier), où il est dit que la droite qui joint ce que nous appelons le centre instantané de rotation à un point de la cycloïde, ou autre courbe C, décrite par le roulement d'une figure sur une ligne droite, est normale à la courbe C, d'où résulte e. a. une construction de cette normale dans le cas de la cycloïde. Descartes démontre ce théorème en considérant la courbe roulante comme la limite d'un polygone. Comparez la note 4 de la p. 401 qui suit. Huygens donne ici une démonstration plus exacte. Quant à la lettre de Descartes à Mersenne, qui est du 23 août 1638, elle a été publiée intégralement en 1898 dans les „Oeuvres de Descartes", éd. Adam et Tannery, T. II, p. 307.

1670. 9 Jan.

AB [Fig. 124] [2]) curva genita circumvolutione figuræ AOC ſuper recta CD, deſcribente nempe puncto A in circumferentia figuræ AOC ſumto.

Dico, ſi ducatur CA, a puncto contactus figuræ et lineæ CD, ad punctum curvæ A ubi tunc invenitur punctum deſcribens, ipſam CA occurrere curvæ ad angulos rectos, ſive circumferentiam MAH [3]) deſcriptam centro C radio CA tangere curvam in puncto A.

Ducatur enim CB primum ad punctum curvæ altius quam A. Et fuerit poſitus figuræ in BED cum punctum deſcribens eſſet in B. contactus in D. Et punctum curvæ quod antea erat in C, hic jam ſublatum ſit in E, et jungantur EB, EC. tangatque figuram in E recta KH. Quia ergo recta CD æqualis eſt curvæ ED, eâdem vero curvâ major utraque ſimul EH, HD, Erit EH major quam CH; unde angulus ECH major quam CEH. Et proinde ECL minor quam CEK, atqui addendo angulo KEB, qui æqualis LCA ad KEC fit angulus CEB. Et auferendo ab ECL angulum LCB, fit ECB. Ergo angulus CEB major angulo ECB. Itaque in Δ° CEB latus CB majus erit quam EB. Atqui EB æquale patet eſſe CA, cum ſit hoc ipſum una cum figura tranſpoſitum. Ergo CB etiam major quam CA, hoc eſt quam CF. Unde punctum B erit extra circumferentiam MAF.

Sit rurſus punctum N in curva inferius ſumtum puncto A. cumque punctum deſcribens eſſet in N ponatur ſitus figuræ fuiſſe in VLN, punctumque contactus L, punctum vero quod tangebat primam in C, ſit jam ſublatum in V, et jungantur CN, NV, VC, VL. Eritque VN æqualis CA, imo ipſa erit CA in VN tranſlata. Jam quia recta LC æquatur curvæ LV, ac proinde major eſt recta LV, erit in Δ° CLV angulus LVC major quam LCV. Unde addito inſuper angulo LVN ad LVC, fiet ſimul totus NVC major utique quam LCV ac proinde omnino major angulo NCV qui pars eſt LCV. Ergo in Δ° CVN latus CN majus erit latere VN, cui æqualis CA. Quare et CN major quam CA, hoc eſt quam CM. unde apparet punctum N cadere extra circulum MAF qui proinde tanget curvam in puncto A.

Hæc demonſtratio convenit partibus curvarum infra regulam deſcendentibus, quæ curvæ generantur a puncto extra figuram revolutam ſumto.

EH [Fig. 125] [4]) tangens in E. DH + HE majores quam curva DE, hoc eſt quam recta DC. Ergo HE major quam HC. Ergo angulus HCE major quam HEC. Atqui

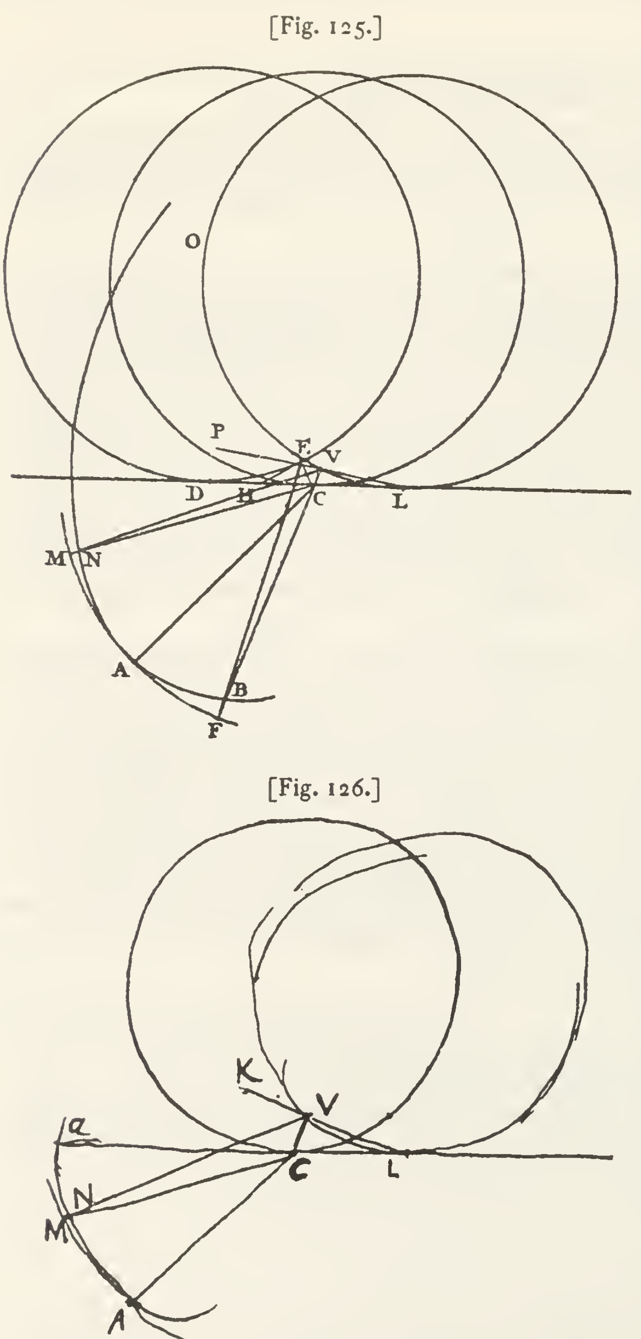
---

[2]) Notre Fig. 124 n'est autre que la Fig. 37 de la p. 155 qui précède. La figure de Huygens, tracée à la main, y correspond exactement.

[3]) Lisez MAF.

[4]) Notre Fig. 125 n'est autre que la Fig. 38 de la p. 158 qui précède: comparez la note 2.

[Fig. 125.]



[Fig. 126.]

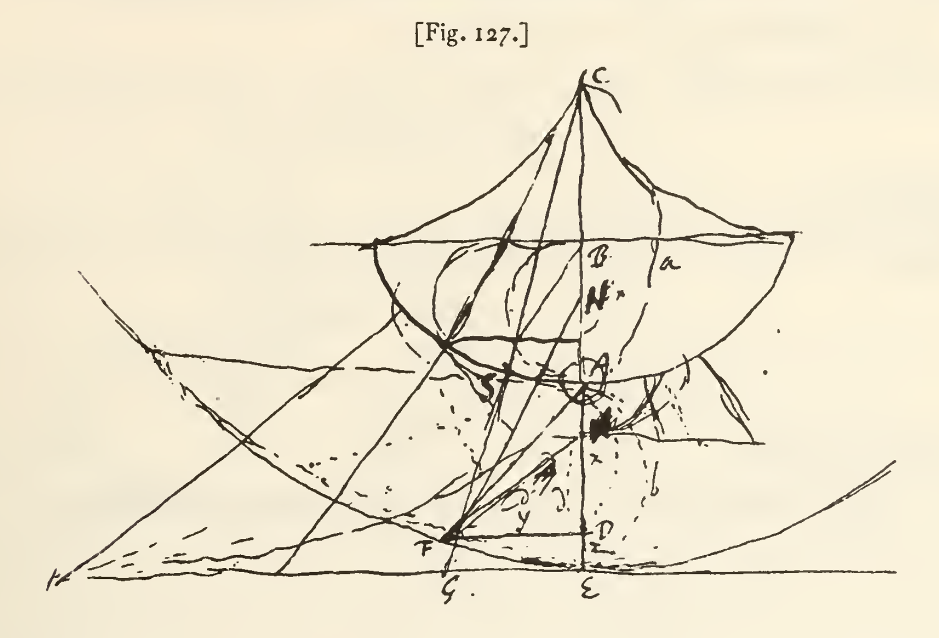
ad HCE addito HCB fit angulus ECB. Et ab HEC auferendo HEB, qui æqualis DCA, fit angulus CEB. Ergo ECB major quam CEB. Unde in Δlo ECB latus EB majus quam CB. Sed ipsi EB æqualis est CA sive CF. Ergo et CF major quam CB. Ergo punctum circumferentiæ F est extra curvam AB.

Sit jam revoluta figura [Fig. 126] in partem L ita ut recta CA translata in VN jam magis inclinetur ad regulam CQ. Sitque contactus in L, et punctum quod erat in C sublatum in V. et jungantur LV, VC, CN.

Ergo quia CL æqualis curvæ VL, erit eadem CL major recta VL, Unde in Δ CVL, angulus LVC major LCV. ac proinde CVP minor VCQ. Sed addendo ad VCQ angulum QCN, fit angulus VCN. Et auferendo ab CVP angulum PVN, fit angulus CVN. Ergo in Δ° CVN, latus VN majus erit quam CN. Est autem ipsi VN æqualis CA, sive CM. Ergo et CM major quam CN. Ideoque punctum circumferentiæ M radio CA descriptæ est extra curvam AN.

[1]) La partie *B* que nous divisons en trois §§ est empruntée aux p. 253 (§ 1 et § 2) et 257 (§ 3) du Manuscrit D. La p. 254 porte la date du 15 janvier 1670.

[Fig. 127.]



B.[1]) § 1[2]).

$\sqrt{xx + yy}$ AF [Fig. 127].
CS ∞ CA
SG ∞ AF
AF + AC $a + \sqrt{xx + yy}$
$b - z$ ∞ x. z minima[3]).

---

[2]) Huygens considère ici, comme dans les §§ 2 et 3, un poids punctiforme A attaché à un plan rigide qui roule sur une droite horizontale.

Dans la Fig. 127, comme dans les Fig. 129 et 130, la courbe qui limite ce plan vers le bas a par hypothèse une forme telle que le point A décrit une cycloïde. Huygens se propose de trouver le rayon de courbure — voir sur cette expression les p. 41 et suiv. de l'Avertissement qui précède — de la courbe mentionnée en son sommet E. L'arc infiniment petit AS de la cycloïde peut être considéré eomme faisant partie d'une circonférence de cercle à centre C et rayon CA $= a$. CS est donc la normale a la cycloïde au point S et, d'après les considérations de la partie *A* qui précède, son prolongement coupe la droite horizontale sur laquelle le plan rigide roule au point G, centre instantané de rotation au moment où le poids se trouve en S. Lorsqu'on prend l'arc EF = EG, AF est donc la droite du plan roulant qui va prendre la position SG. Comme l'arc EF est infiniment petit, FG est perpendiculaire à EG et DF = EG ($= y$). AE ou b est donnée, Huygens prend en outre AD $= x$ et DE $= z$. FN est une normale à la courbe roulante; c'est donc NF ou NE (d) qu'il s'agit de calculer.

[3]) En termes plus modernes: L'arc EF étant infiniment petit, la droite z est infiniment petite du deuxième ordre.

CA + AF $a + \sqrt{bb - 2bz + zz + yy}$

qu. CA + AF $aa + 2a\sqrt{.} + bb - 2bz + zz + yy \infty aa + 2ab + bb + yy$ qu. CG.

$$2a\sqrt{.} \infty 2ab + bz - zz$$

NE ∞ d

$$4a^2bb - 8a^2bz + 4aazz + 4aayy \infty 4aabb + 8abbz + 4bbzz - 4abzz - 4bz^3 + z^4$$

DE ∞ z

$$yy \infty \frac{\begin{array}{r} z^4 - 4bz^3 - 4abzz + 8abbz \\ + 4bbzz + 8aabz \\ - 4aazz \end{array}}{4aa}$$

qu. ND + qu. DF

$$dd - 2dz + zz + \frac{z^4 - 4bz^3 \left.\begin{array}{r} - 4ab \\ + 4bb \\ - 4aa \end{array}\right\} \begin{array}{l} zz + 8abbz \\ + 8aabz \\ \end{array}}{4aa} \infty dd \text{ qu NF.}$$

$$-2dz + \frac{8abbz + 8aabz}{4aa} \infty 0$$

$$8aadz \infty 8abbz + 8aabz$$

$$ad \infty bb + ab \qquad ad - ab \infty bb$$

$$d \infty \frac{bb + ab}{a} \qquad a \infty \frac{bb}{d - b}$$ [1]).

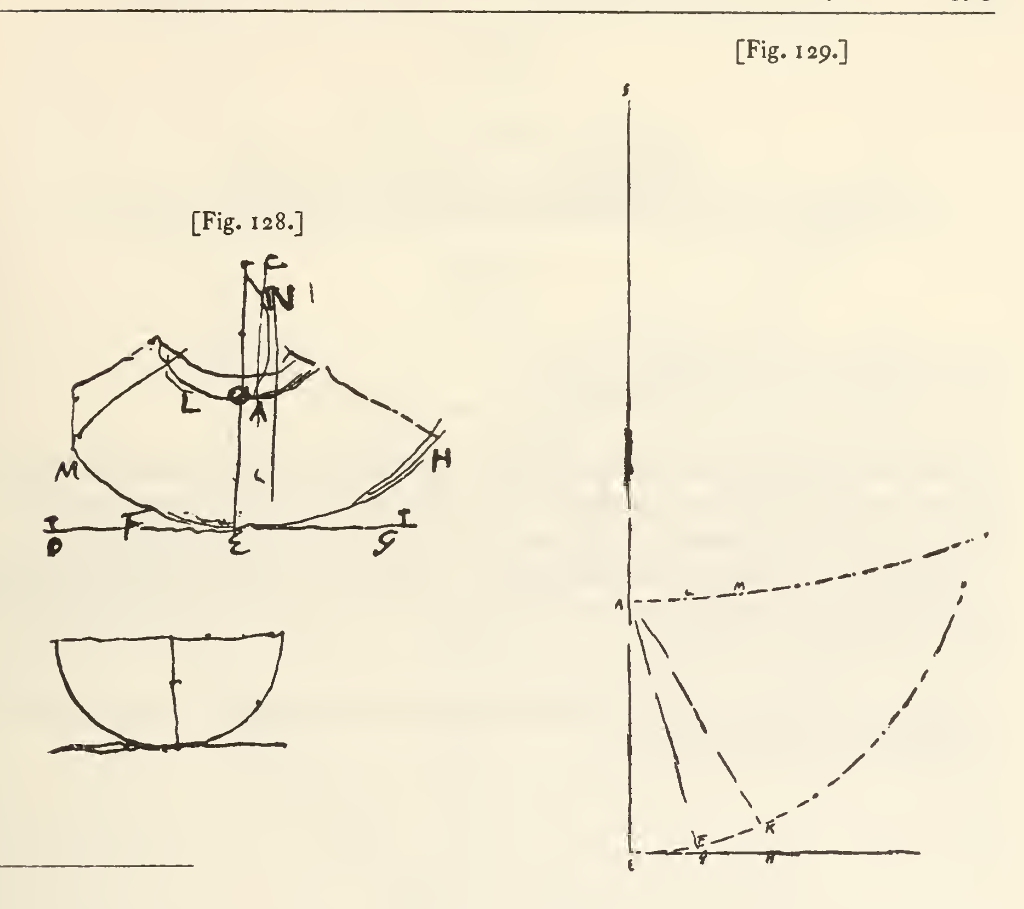
§ 2 [2]). Si NE ∞ d [Fig. 128] ſit radius circumferentiæ EF quæ ſuper plano volvitur motu reciproco, Et EA ∞ b diſtantia ponderis A, plano affixi, à puncto E. Erit $\frac{bb}{d-b} \infty$ CA, longitudo penduli iſochroni oſcillationibus ponderis A ita agitati, ſive CA erit radius circumferentiæ maximæ curvam AL, in qua pondus A fertur, intus tangentis.

Poteſt EF curva eſſe ejus figuræ ut pondus A verſetur in cava cycloide [3]), ac tunc oſcillationes fient iſochronæ [4]). ſaltem mechanicè ſatis prope inveniri poterit.

Fila ſeu faſciolæ planæ ſint MEG, HEO. altera affixa in M et G, altera in H et O. his retinebitur ſolidum volutatum. ut ſit portatile.

[Fig. 129.]

[Fig. 128.]

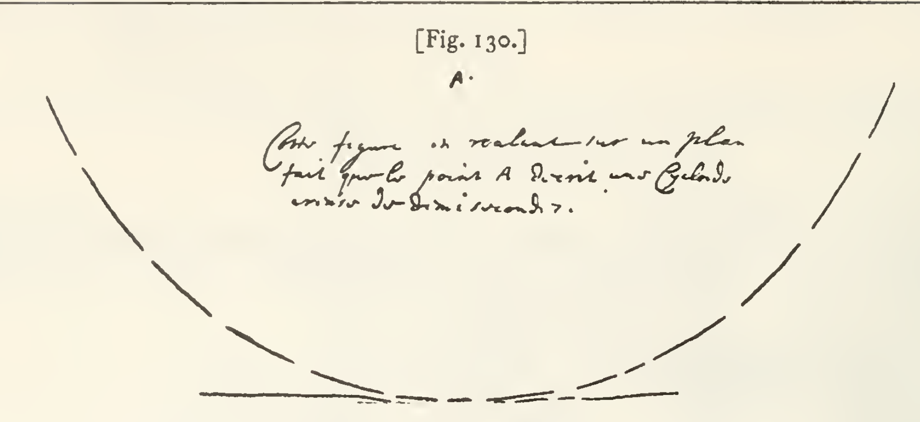


¹) Le rayon de courbure d ayant été trouvé égal à $b + \frac{b^2}{a}$, il en résulte que a a la valeur indiquée, lorsque la longueur b et le rayon de courbure sont donnés.

²) Dans le § 1 il n'a été fait usage que d'une seule propriété de la cycloïde, savoir celle de posséder en son sommet un rayon de courbure a de longueur connue. Le résultat du calcul fait donc connaître généralement la relation qui existe entre les rayons de courbure a et d. La courbe inférieure peut p. e. être une circonférence de cercle auquel cas la courbe décrite par le point A sera une cycloïde allongée. D'ailleurs Huygens ne dit rien sur la forme de la courbe décrite dans ce cas dont il est aussi question chez Descartes et van Schooten (note 1 de la p. 388 qui précède). On voit que Huygens désigne ici ce qu'il appellera plus tard le „radius curvitatis" — voir la p. 43 de l'Avertissement — en un sommet comme le rayon de la plus grande circonférence de cercle qui touche la courbe considérée intérieurement en ce point. Apollonios dans le cinquième livre de ses „Conica" — Huygens avait reçu en 1662 (T. IV, p. 165) l'édition de Borelli et Ecchellensis de 1661 annoncée déjà en 1658 (T. II, p. 252) — parle longuement des droites minimæ et maximæ qu'on peut mener à une section conique d'un point donné situé sur l'axe principal (ou ailleurs). Comparez sur Huygens et Apollonios la note 10 de la p. 41 de l'Avertissement.

On peut aussi consulter sur l'édition de 1661 la p. 501 du T. III: Golius — dont le manuscrit arabe fut un de ceux employés plus tard par E. Halley, comme celui-ci le dit dans la

[Fig. 130.]



§ 3 [5]). ALM [Fig. 129] Cycloides cujus axis SA. AE ∞ $\frac{1}{2}$AS, ſed et major minorve poteſt accipi. EH perpend. AE. LG, MH cycloidi ad angulos rectos. EF ∞ EG. AF ∞ LG; ita invenitur punctum F. Rurſus FK ∞ GH. AK ∞ MH. &c.

curva EFK revoluta in plano EH faciet ut punctum A verſetur in Cycloide ALM, ſemiſecundorum. Pondus ergo in A affixum, ſi cetera gravitate careant faciet hoc modo oſcillationes iſochronas.

Ceſte figure [Fig. 130] en roulant ſur un plan fait que le point A decrit une Cycloide creuſe de demiſecondes.

„Præfatio" de son édition de 1710 — disait à bon droit que le texte arabe dont s'étaient servis Borelli et Ecchellensis était écourté; voir la p. 7 de „Das Fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Uebersetzung des Thabit ibn Corrah" par L. M. L. Nix (Leipzig, W. Drugulin, 1889). À la p. 562 de notre T. IV il est dit à tort que l'édition de 1661 est de Abalphatus Aspahanensis: c'est de ce dernier (Abu'l-fath ibn Mohammed al-Isfahâni) que provient le texte arabe (datant de 983) traduit en latin par Ecchellensis.

[3]) C'est de nouveau le cas du § 1.

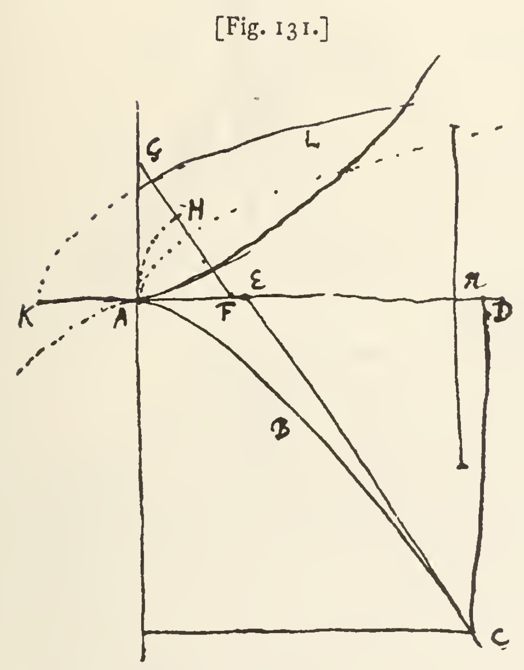
[4]) Il est évident que le tautochronisme des oscillations exige, comme cela est dit expressément au § 3, que le plan roulant soit impondérable.

[5]) Comparez le § 1. La Fig. 130 et le texte correspondant sont empruntés à une feuille détachée qui se trouve dans le Manuscrit D. Nous reproduisons ici les Fig. 129 et 130 à petite échelle. Chez Huygens les courbes roulantes des deux figures sont identiques. Dans le première de ses figures SA a une longueur de 12,4 cm. Le double de cette longueur correspond en effet à une oscillation simple accomplie en une demi-seconde.

APPENDICE I

À LA PARS TERTIA DE L',,HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[?] [1])



[Fig. 131.]

ABC [Fig. 131] eſt Paraboloides; axis ejus AE, vertex A. Proprietas autem iſta ut ducta ex puncto ejus quolibet C, perpendiculari in axem, CD; cubus abſciſſæ AD æquetur ſolido baſin habenti quadratum ab CD, altitudinem vero æqualem rectæ datæ n. Hujus curvæ parti datæ, ut AC, invenietur linea recta æqualis hoc modo: Sit AE parallela DC, et in ea ſumatur AF æqualis $\frac{8}{27}$ rectæ n. AE vero æquetur $\frac{1}{3}$DC, junctâque CE, quæ curvam tanget in C, ducatur ei parallela FG, quæ cum producto axe DA conveniat in G; et abſcindatur ab ea FH æqualis ipſi AF. Erit jam curva ABC æqualis rectæ CE una cum reſidua HG.

Evolutione curvæ CA junctæ AK rectæ æquali AF ſive $\frac{8}{27}$ n, deſcribitur Parabola KL, cujus latus rectum duplum AK, vertex K, axis KA.

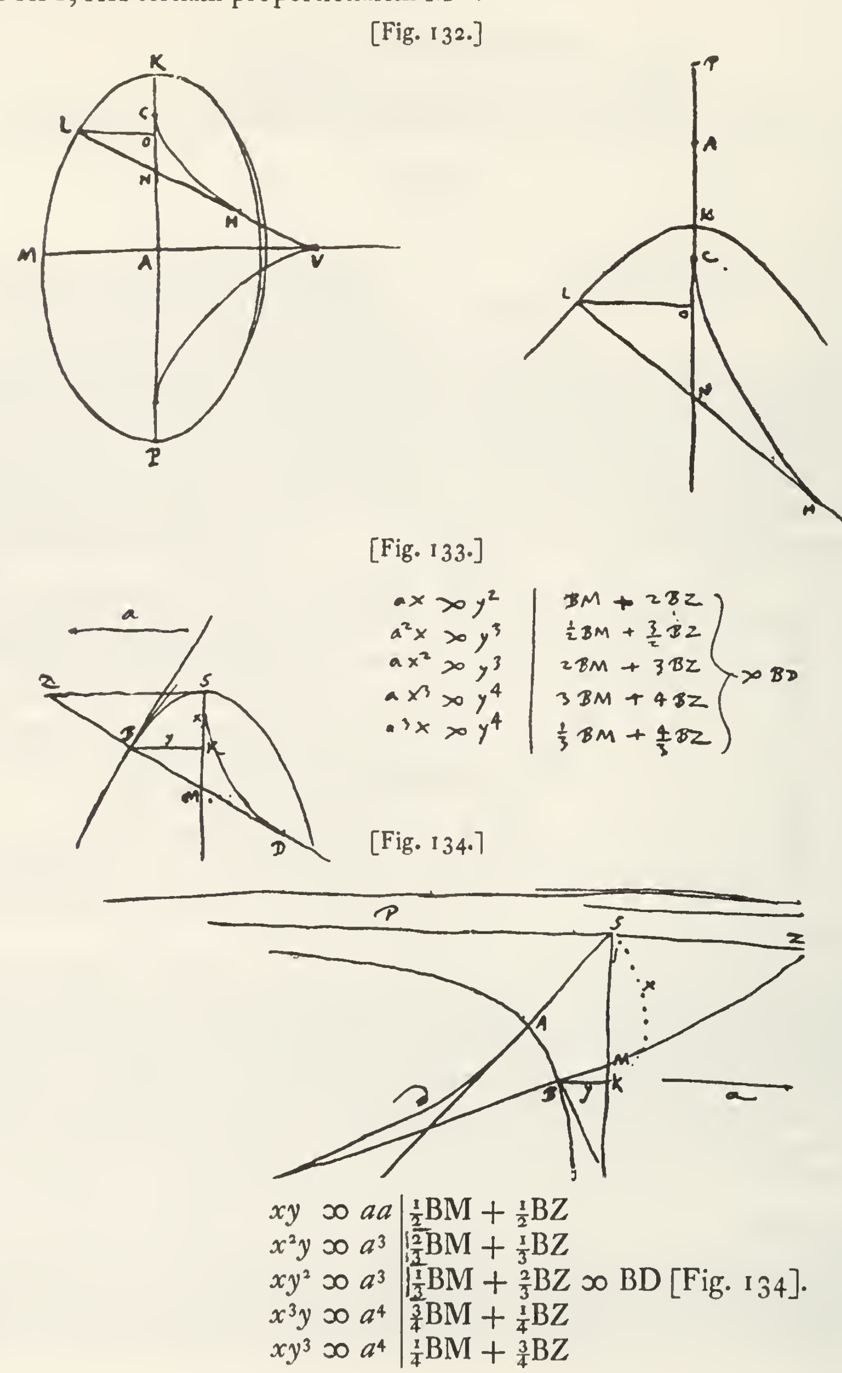
Sit KL [Fig. 132] Ellipſis vel Hyperbola. axis tranſverſus KP. centrum ſectionis A. lateris recti dimidium KC. LNH occurrat ſectioni ad angulos rectos, ſecetque axem in N. LN ad NH rationem habeat compoſitam ex ratione quadrati AK ad rectangulum POK, et ratione KC ad CA. Punctum H erit in curva CH, cujus evolutione ſimul cum recta CK deſcribitur linea ſectionis KL. unde curvæ CH recta æqualis in-

---

[1]) Les Fig. 131—134 et le texte correspondant sont empruntés aux p. 35—37 du Manuscrit 13. La date est incertaine et d'ailleurs peu importante: voir la note 2 de la p. 149 du T. XVII.

Le contenu de la Pièce correspond aux Prop. VIII et X. ainsi qu'à une partie de la Prop. XI de la Pars Tertia de l' ,,Hor. osc.".

veniri poterit. Eſt autem, in ellipſi, terminata in V punčto, quod invenitur ponendo duabus AM, AK tertiam proportionalem MV.



[Fig. 132.]

[Fig. 133.]

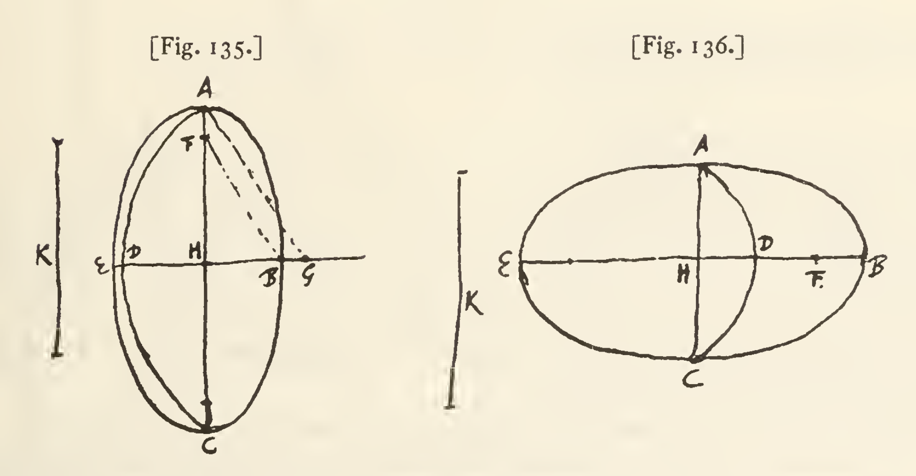
[Fig. 134.]

$xy \infty aa$	$\frac{1}{2}BM + \frac{1}{2}BZ$
$x^2y \infty a^3$	$\frac{2}{3}BM + \frac{1}{3}BZ$
$xy^2 \infty a^3$	$\frac{1}{3}BM + \frac{2}{3}BZ \infty BD$ [Fig. 134].
$x^3y \infty a^4$	$\frac{3}{4}BM + \frac{1}{4}BZ$
$xy^3 \infty a^4$	$\frac{1}{4}BM + \frac{3}{4}BZ$

APPENDICE II

À LA PARS TERTIA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[?] [1])



Superficiei ſphæroidis æqualem circulum invenire.

AECB [Fig. 135] eſt ſphæroides oblongum. AC axis. F alter focorum ellipſis AECB. AG parallela FB. arcus ADC deſcriptus centro G. Recta K eſt media proportionalis inter ſemidiametrum HB et æqualem utrisque ſimul, diametro EB et arcui ADC. Jam erit circulus, deſcriptus radio K, æqualis ſuperficiei ſphæroidis AECB.

AECB [Fig. 136] eſt ſphæroides compreſſum axis AC. F alter focorum ellipſis AECB. punctum D dividit bifariam ipſam FH quæ inter focum et centrum. ADC eſt parabola vertice D. Recta K eſt media proportionalis inter diametrum EB et rectam æqualem curvæ parabolicæ ADC. Erit jam circulus deſcriptus radio K æqualis ſuperficiei ſphæroidis AECB.

---

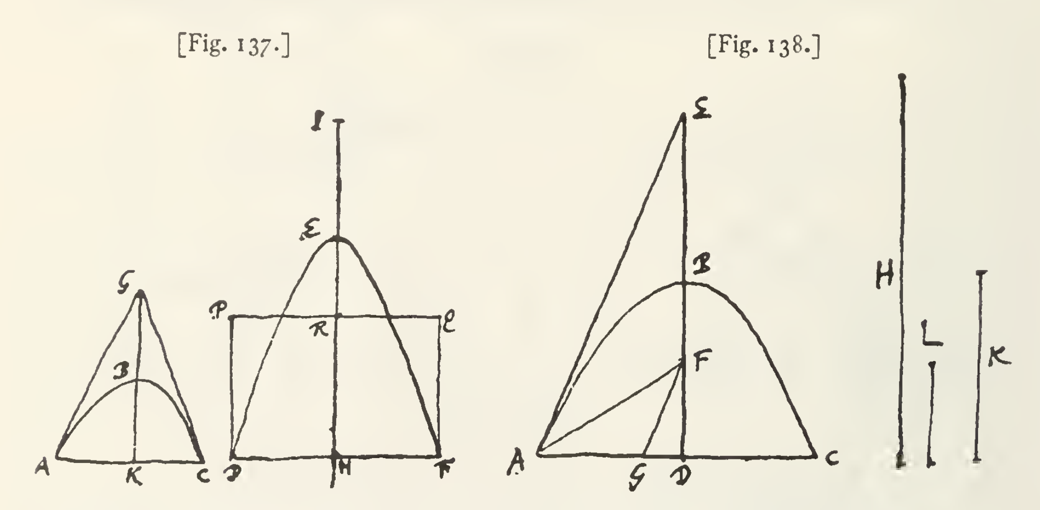
[1]) Les Fig. 135—138 et le texte correspondant sont empruntés aux p. 39—40 du Manuscrit 13. Comparez la note 1 de la p. 395.

Le contenu de la Pièce correspond à la plus grande partie de la Prop. IX de la Pars Tertia de l'„Hor. osc.".

Curvæ Parabolicæ æqualem rectam invenire.

ABC [Fig. 137] est parabolæ portio recta. triangulum AGC isosceles in eadem basi, duplum altitudine. IE æqualis AC. IH æqualis duabus simul AG, GC. DEF est hyperbole, vertice E. centro I. rectangulum PF æquale portioni hyperboles DEF. PQ secat IH in R. Jam erit IR æqualis curvæ parabolicæ ABC.

[Fig. 137.] [Fig. 138.]



Superficiei conoidis parabolici dati circulum æqualem invenire, perfectè.

Sit Conoides [Fig. 138] cujus sectio per axem parabola ABC. axis BD; vertex B. Sit AE tangens parabolæ quæ occurrat axi producto in E. Et dividatur bifariam angulus EAD, rectâ AF. et sit FG parallela AE. Deinde sit H æqualis utrique simul AE et DG. L autem æqualis trienti AC. Et inter H et L inveniatur media proportionalis K. Jamque erit circulus descriptus radio K æqualis superficiei conoidis ABC præter basin.

Si fuerit AE dupla AD erit superficies conoidis ad circulum baseos ut 14 ad 9.

Si AE tripla AD, ut 13 ad 6.

Si AE quadrupla AD, ut 14 ad 5.

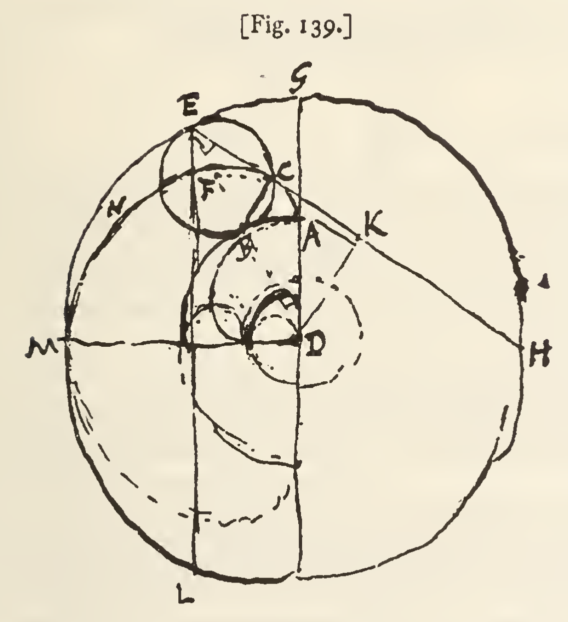
Quum sit in universum, sicut AE una cum GD (est autem GD ad DA ut hæc ad DAE) ad $\frac{3}{4}$AC.

APPENDICE III

À LA PARS TERTIA DE L',,HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

1678.

[Fig. 139.]



§ 1 [1]). Omnis Epicyclicæ evolutione ſimilis Epicyclica deſcribitur.

Ut radius circuli ſuper quo revolutio ad diametrum circuli revoluti ita utriusque ſumma ad aliam; Hæc juncta diametro circuli revoluti efficiet dimidiam longitudinem Epicyclicæ ex revolutione deſcriptæ. Vel curva Epicyclicæ eſt ad diametrum circuli genitoris ut dupla diameter circuli manentis cum dupla diametro revoluti ad ſemidiametrum manentis.

DA ∞ AG [Fig. 139]. arcus BC ∞ BA. punctum C in cycloide. DBE linea recta. ECH recta. EL parall. GD. Dico EL eſſe ∞ EH. Et EC ∞ $\frac{1}{4}$EH.

Ducatur BC. et DK perp. EH. ∠ ECB eſt rectus. Ergo ut DE ad EB ita KE ad EC. Ergo EC ∞ $\frac{1}{2}$EK ſive ∞ $\frac{1}{4}$EH. Ducatur FC. quia jam radius FB ∞ $\frac{1}{2}$ rad. AD et arcus BC ∞ BA, erit ang. BFC dupl. BDA. Ergo ∠ BEC ∞ BDA ∞ DEL. Ergo EH ∞ EL.

Hinc video MNCA curvam quæ terminat ſpatium radioſum in ſpeculo cavo MGH, a radijs axi DG parallelis, eſſe cycloidem a circulo EB, ſuper duplo majoris diametri circulo AB revoluto [2]).

---

[1]) Le § 1 — la division en §§ est de nous — de cet Appendice provient de la p. 164 du Manuscrit E. Voir sur la date le début du § 2. On trouve à la p. 164 quelques autres figures dans le genre des Fig. 139 et 140 que nous ne reproduisons pas. Les deux premières propositions du § 1 sont démontrées au § 2.

[2]) LE, rayon incident sur un miroir cylindrique, étant réfléchi suivant EH qui touche l'épi-

§ 2 [1]). 26 Nov. 1678.
lu a l'affemblée le 3 dec. 1678.

La mefure des lignes Epicycloides.

Monf. de Vaumefle Religieux de Normandie m'ayant mandè qu'il avoit trouvè la mefure de la ligne Epicycloide, lors que le cercle generateur et le cercle immobile font egaux, cela m'a donnè occafion de chercher cette demonftration generale [2]).

Propof. 1.

Par l'évolution de la moitiè d'une Epicycloide, en commencant par le fommet, il s'engendre la moitiè d'une autre Epicycloide femblable à la premiere [3]).

---

cycloïde au point C, on peut en conclure que tous les rayons provenant de rayons incidents parallèles à LE la toucheront également. Comparez la p. 41 de l'Avertissement qui précède: dans son article de 1727 Krafft dit à tort: „Cum vero dubitaretur pluresne una possibiles sint hujus indolis nec ne [c.à.d. s'il existe d'autres courbes que la cycloïde où la développée et la développante sont pareilles]: non longe post Tschirnhusius Causticis fortasse suis probe intentus secundam invenit, Causticam nempe Semicirculi quæ Epicyclois est, quam protulit deinde in Actis Lips. 1682, M. Novembri".

Voir encore sur l'évolution et la courbure d'après Huygens la p. 183 du T. X.

L'hypocycloïde et sa développée semblable à elle-même furent considérées par Newton dans son ouvrage de 1687; voir les notes 5 de la p. 168 et 19 de la p. 514 du T. IX, ainsi que la note 000 de la p. 000 qui suit.

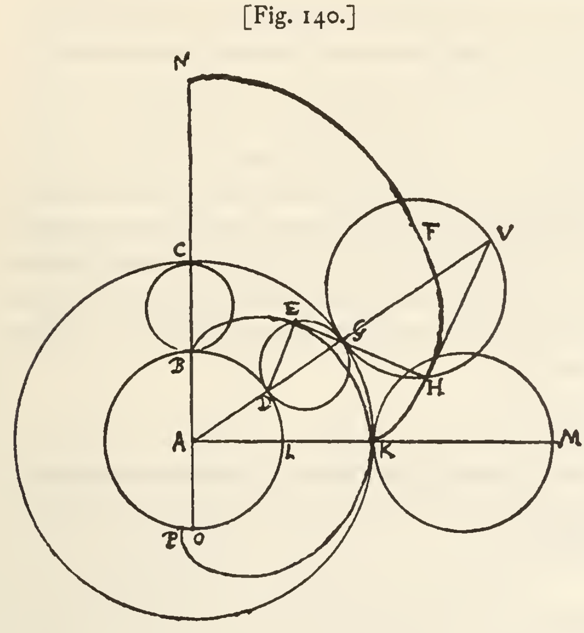
[1]) Les §§ 2 et 3 sont empruntés à deux feuilles détachées (f. 175 et 176) se trouvant dans le portefeuille „Chartæ mathematicæ". Toutefois, sauf la première et la dernière phrase, et sauf quelques différences insignifiantes dans le texte, le § 2 se lit également à la p. 165 du Manuscrit E. Comme nous l'avons indiqué dans la note 6 de la p. 117 du T. VIII, les §§ 1—3 ont déja été publiés en 1833 (dans un ordre différent) par P. J. Uylenbroek dans les „Chr. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium Exercitationes Mathematicæ et Philosophicæ, Hagæ Comitum, Ex Typographia Regia". Uylenbroek s'est servi, pour le § 2, du texte du Manuscrit E.

[2]) On trouve aux p. 115 et 125 du T. VIII les deux lettres de 1678 (resp. du 29 oct. et du 19 nov.) de de Vaumesle à Huygens. Elles furent suivies en juillet 1679 par une troisième lettre non moins intéressante (T. VIII, p. 189). Huygens connaissait déjà l'épicycloïde, quoiqu'il n'en eût apparemment pas encore considéré les propriétés; voir la note 6 de la p. 127 du T. VIII ainsi que les remarques publiées plus loin dans le présent Tome sur la forme des dents d'un engrenage.

Mons. A. Legoy, archiviste départemental à Saint-Lo, nous a fait savoir que d'après différentes liasses du fonds de l'abbaye d'Hambye „dom Pierre de Vaumesle" fut prieur en 1698, 1704, 1705, 1707 et probablement jusqu'à 1711, lorsqu'un successeur fut élu. En 1690 Huygens lui donne déjà le titre de Presbyter (T. IX, p. 515). Il est mentionné comme religieux en différentes années, depuis 1676 jusqu'à 1691.

[3]) Dans sa première lettre de Vaumesle dit déjà „que par leuolution de la cycloïde circulaire est decrite une autre cycloïde circulaire triple de la premiere". Il ne considère que le cas où les rayons des cercles immobile et mobile sont égaux: sa „cycloïde circulaire" est la cardioïde.

[Fig. 140.]



Soit BEK [Fig. 140] la moitiè d'une Epicycloide, defcrite par le roulement du cercle BC fur le cercle immobile BL. Et le cercle KM eftant fuppofè eftre au cercle KC comme le cercle CB au cercle BL, foit, par le roulement du cercle KM fur le cercle KC immobile, defcrit la demie Epicycloide KFN, qui fera terminée à la droite AB prolongée; et fera femblable a la demie Epicycloide BEK, à caufe de la proportionalité des cercles.

Je dis que la mefme courbe KFN fera defcrite par l'Evolution de la courbe BEK, commencée par K.

Car ayant pris dans BEK quelque point E, pofons que le cercle geniteur de cette courbe, lors que le point qui la trace eftoit en E, ait eu la pofition GED, touchant le cercle BL en D. Et ayant joint ED, foit EG perpendiculaire à elle, qui touchera l'Epicycloide BEK au point E, par notre propos. . . . du traitè de l'Evolution des lignes courbes, car il eft aifè de la rendre generale [4]).

Il faut donc feulement demonftrer que EG eftant prolongée rencontre l'Epicycloide KFN à angles droits. car il s'en fuit de la que cette courbe fe defcrit par l'evolution de la courbe BEK, par notre prop. . . . de l'Evolution des courbes [5]). Il eft certain que EG rencontre la circonference KC au point de contact du cercle ED, parce que DEG eft un demicercle à caufe de l'angle droit DEG.

---

[4]) Voir la Prop. XV de la Pars Secunda de l'„Hor. osc." ou bien la partie *A* de notre Appendice à la Pars Secunda. La proposition doit en effet être généralisée, car dans la lettre de Descartes à Mersenne citée dans la note 1 de la p. 388, ainsi que dans le Commentaire de van Schooten (même endroit) et dans la Prop. XV de Huygens il n'est question que d'une courbe roulant *sur une droite*. Ici Huygens admet que la droite qui relie le point considéré de la figure roulante au centre instantané de rotation est également normale à la courbe décrite par ce point, lorsque la figure roule *sur une courbe*. Descartes (quoiqu'il dise pouvoir démontrer la proposition dans le cas considéré par lui „d'une autre façon, plus belle a mon gré & plus Geometrique") se contente d'en faire voir la vérité en assimilant la courbe roulante à „un polygone qui a une infinité de costez". Or, cette même considération peut servir à établir le théorème lorsque la

Soit VG le cercle generateur de l'Epicycloide KFN, et qu'il touche auſſi le cercle KC en G: Et que EG prolongée couppe la circonference GV en H. Puis donc que l'arc BDL eſt egal à la demie circonference DEG; et que l'arc DB eſt egal à l'arc DE, par la nature de la courbe BEK; l'arc DL ſera auſſi egal a l'arc EG. Mais l'arc EG eſt a l'arc GH comme le diametre DG a GV, c'eſt à dire comme AD a AG, (parce que AD, AG, AV ſont proportionelles) ou comme l'arc DL à l'arc GK. Donc les arcs EG, DL eſtant egaux, les arcs GH, GK ſeront egaux de meſme. d'ou s'enſuit que le point H eſt le point traçant de l'Epicycloide KFN, lors que ſon cercle generateur eſt en GV. Et par la propos. ſusdite du Traitè de l'Evolution [6]), il paroit que GH, qui eſt la continuation de la droite EG, rencontre la courbe KFN en ce point H à angles droits, ce qui reſtoit à demonſtrer.

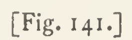
Propoſ. 2.

La courbe d'une Epicycloide eſt au diametre de ſon cercle generateur comme deux fois la ſomme des diametres du cercle generateur et du cercle immobile qui ſert de baſe, au rayon du meſme cercle immobile.

Il eſt evident que l'evolution de la demie Epicycloide BEK ſe terminant en N, comme il a eſtè dit, la droite BN eſt egale a la courbe BEK. et parce que AN, AC, AB ſont proportionelles il s'en ſuit que NC eſt a CB, comme CA à AB ou AO [7]). Et en compoſant, NB à BC, c'eſt a dire la demie Epicycloide au diametre de ſon cercle generateur comme CO a OA, Et l'Epicycloide entiere BKP à BC, comme deux fois CO à OA; ce qu'il fallait demonſtrer.

---

figure roule sur une courbe: il suffit d'assimiler cette dernière à un polygone, dont les côtés correspondent exactement à ceux de la figure roulante qui viennent s'y appliquer. C'est la probablement la voie suivie par de Vaumesle qui dit (T. VIII, p. 117) avoir „trouvé la tangente de la cijcloïde circulaire par la methode de mr. des Cartes", puisqu'il ajoute „Jay reconnu que les tangentes de lvne et de lautre cycloïde se trouvent de mesme maniere": il connaissait (T. VIII, p. 127) „la geometrie de mr. des cartes commenté par Scoothen" et considère (même endroit) fort ingénieusement des polygones réguliers roulant l'un sur l'autre. C'est à ce sujet que se rapporte la petite figure de Huygens de la p. 108 du Manuscrit E que nous insérons ici [Fig. 141]. Il ne paraît pas que Huygens se soit appliqué à généraliser la démonstration plus rigoureuse de la Prop. XV de la Pars Secunda. Comparez la note 9 de la p. 403 qui suit.


[Fig. 141.]



[5]) Il s'agit de la Prop. IV de la Pars Tertia de l'„Hor. osc."

[6]) C.à.d. par la Prop. XV de la Pars Secunda, supposée généralisée (note 4).

[7]) Cette dernière équation est d'ailleurs équivalente à l'hypothèse initiale: „le cercle KM estant supposé estre au cercle KC comme le cercle CB au cercle BL".

Il eſt à noter que ces Epicycloides ſont des lignes geometriques quand les diametres des cercles generateur et immobile ſont commenſurables [8]).

---

§ 3. Spatium epicycloide et baſi ſua comprehenſum, eſt ad circulum genitorem Epicycloidis, ut tripla ſemidiametrus circuli baſeos cum diametro circuli genitoris ad radium circuli baſeos [9]).

---

[8]) Dans le Livre Second de sa Géométrie Descartes parle comme suit: „Pour comprendre ensemble toutes celles [c.à.d. toutes les courbes planes] qui sont en la nature, et les distinguer par ordre en certains genres, je ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points de celles qu'on peut nommer géometriques, c'est a dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimée par quelque équation, en tous par une même".

Or, l'épicycloïde extérieure s'exprime en coördonnées rectangulaires par les équations

$$\frac{x}{r} = \frac{n+1}{n} \cos n\varphi - \cos (n+1)\varphi$$

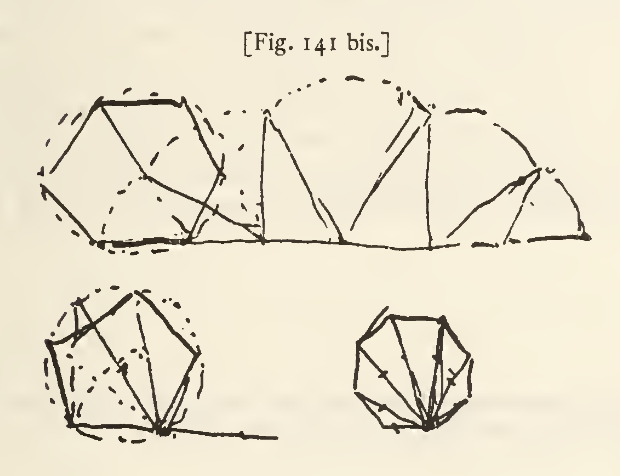
$$\frac{y}{r} = \frac{n+1}{n} \sin n\varphi - \sin (n+1)\varphi$$

$$n = \frac{r}{R},$$

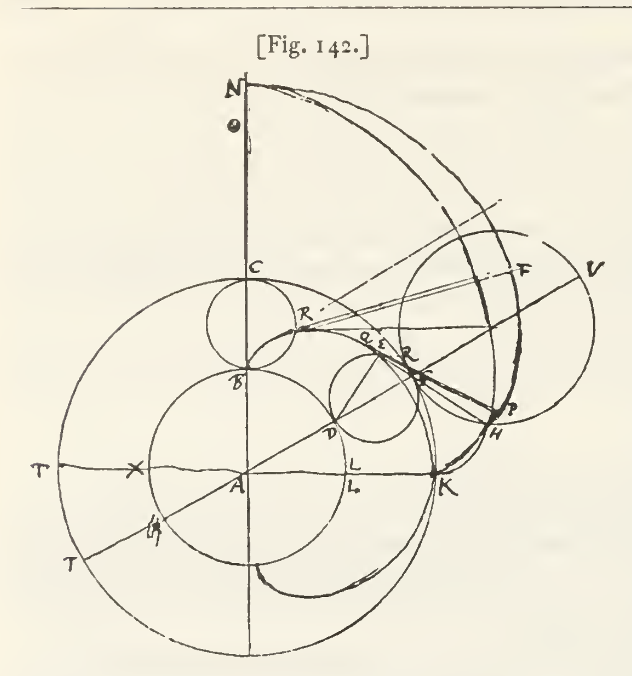
où R et r désignent les rayons du cercle immobile et mobile; lorsque n est commensurable, le paramètre φ peut être éliminé. La cycloïde au contraire n'est pas „géométrique".

[9]) De Vaumesle avait trouvé, par la considération de polygones réguliers et égaux roulant l'un sur l'autre, que la surface de la cardioïde, y compris le cercle générateur, est le double de celle de la cycloïde ordinaire engendrée par un cercle de même grandeur (T. VIII, p. 117); en d'autres termes que la surface de la cardioïde sans le cercle générateur, est le quintuple de ce dernier (même endroit et p. 127). C'est ce résultat — c'est à la méthode de de Vaumesle que se rapportent les figures (Fig. 141 bis) de Huygens de la p. 174 du Manuscrit E — que Huygens généralise en suivant une méthode différente.

[Fig. 141 bis.]



[Fig. 142.]



Dans la mesme figure [Fig. 142] soit pris un autre point Q dans l'Epicycloide BQK, pres du point E, et soit QP sa tangente, qui rencontrera donc l'Epicycloide KHN à angles droits, comme en P; Et coupera necessairement la circonference CK; prenons que ce soit en R. Or les points de contact E Q peuvent estre infiniment pres l'un de l'autre et aussi les points d'intersection G R; la raison de HE a GE et de PQ a QR demeurant tousjours les mesmes que de VD a DG. Partant HQP, GQR peuvent estre considerez comme des triangles des quels la proportion est la mesme que du qu. HE au qu. EG, ou du qu. VD au qu. DG [1]). Donc tout l'espace BEKN à l'espace BEKC aura la raison du qu. VD au qu. DG, parce qu'en concevant de tangentes infinies [2]) le long de la courbe BQK, elles diviseront tout l'espace KPNBQK en une infinitè de triangles tels que PQH, qui auront chacun à leur partie RQG la mesme raison que le qu. HE au qu. EG, ou que le qu. VD au qu. DG. Donc aussi dividendo, l'espace KHNC sera à BEKC comme l'exces du qu. VD sur le qu. DG est au qu. DG. Mais l'espace BEKL est à KHNC comme le qu. DG au qu. GV. donc ex æquo [3]) in propositione perturbata, l'espace BEKL sera à BEKC, comme le qu. VD — qu. DG au qu. GV, c'est a dire comme le rectangle de VG + 2GD et VG, au qu. VG, ou comme VG + 2DG à VG. Et l'espace BEKL à BLKC comme VG + 2DG a 2VG + 2DG. ou comme AK + 2AL à 2AK + 2AL. Sed BLKC est ad semicirc. BRC comme 2BL + 2CK à BL: Parce que BLCK est egal au ▭ $\frac{1}{2}$BL + $\frac{1}{2}$CK et BC. Et le demicercle BRC egal au ▭ $\frac{1}{4}$BL et BC. Et partant en ostant la commune hauteur BC et quadruplant, sera BLKC au demicercle BRC comme 2BL + 2CK à

[1]) Ou plutôt: „Partant HQP, GQR, lesquels peuvent être considérés comme des triangles dont la proportion est égale à $HE^2 : EG^2$, sont aussi entre eux comme $VD^2 : DG^2$."

[2]) C.à.d. une infinité de tangentes.

[3]) Comparez la p. 396 du T. XVI.

BL, ou comme 2AK + 2AL à AL. Mais l'efpace BEKL eftoit à BLKC comme AK + 2AL à 2AK + 2AL, donc ex æquo BEKL au demicercle BRC comme AK + 2AL à AL. C'eft a dire comme 3AL + LK a AL.

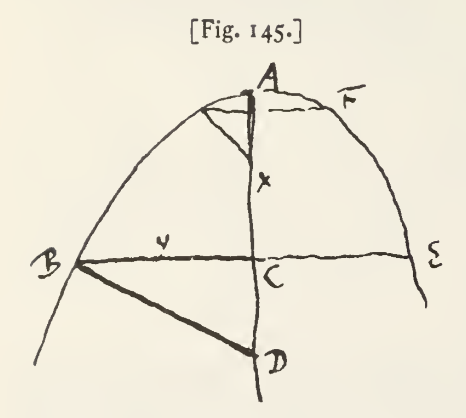
§ 4. [Voir la p. 406 du T. XIV (p. 166 du Manufcrit E). Le calcul fe rapportant à la cycloïde, découpée de la même manière que l'épicycloïde, eft une fuite du calcul des §§ précédents. La page 166 du Manufcrit date fans doute également de 1678, non pas de 1679, puifque les pages fuivantes fe rapportent encore en partie au même fujet: voir la Fig. 141 bis et auffi la Fig. 141 aux p.402—403 qui précèdent].

APPENDICE IV

À LA PARS TERTIA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1691.][1)]

[Fig. 145.]



Parte tertia Horologij oscillatorij, ubi de curvarum evolutione agitur, Propos. 11 [2)], dixi data quavis curva geometrica, aliam inde reperiri curvam geometricam, cujus longitudo lineæ rectæ adæquetur. Qua in re difficultas quædam occurrit quæ tamen tolli potest [3)].

Sit curva data AB [Fig. 145]. AC ∞ x, applicata CB ∞ y. Sit etiam BD curvæ perpendicularis in B, et rectam AC secans in D. Jam ad inveniendam curvam alteram cujus dimensio detur, necesse est prius curvam effingere AFE, in qua applicatæ CE sint semper æquales rectis CD [4)]. ac necesse est ut CD exprimatur in terminis qui tantum incognitam x contineant non autem y. Quod Methodo Tangentium Cartesiana plerumque efficere licet. at non semper tamen nisi AC sit axis curvæ AB, ita ut ex puncto D, ducta ad curvam perpendiculari DB una tantum possit esse longitudo interceptæ DC.

Velut si ABEb [Fig. 146] sit curva illa Huddenij [5)], quæ ad rectam AD ita refera-

---

[1)] La Pièce est empruntée à la p. 70 du Manuscrit G. La date du 1 janvier 1691 se trouve à la p. 57 et la p. 74 est datée: „1691. Maj".

[2)] Voir la p. 225 qui précède.

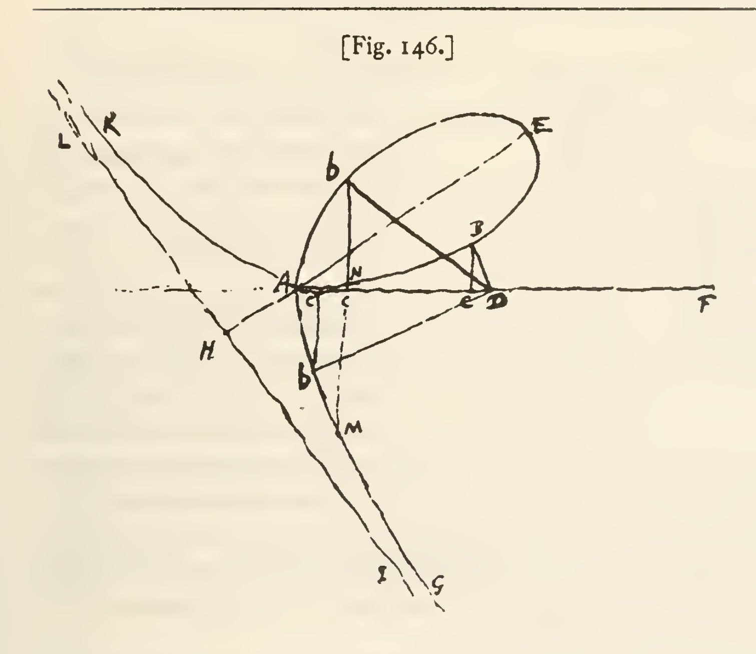
[3)] Comme il est dit dans la suite, la difficulté consiste dans le fait qu'on peut en général mener d'un point donné D plusieurs normales à la courbe, d'où résultent des complications mathématiques. La droite AD, axe des x, peut avoir par rapport à la courbe une position quelconque. Huygens fait voir comment on peut, dans un cas spécial, lever la difficulté par un changement d'axes.

[4)] D'après la construction de la Prop. XI nommée. Voir la Fig. 70 à la p. 231.

[5)] Il s'agit du „folium Cartesii". Comparez la p. 351 du T. X, où Huygens désigne cette courbe comme celle que „Mr. des Cartes . . et nostre Mr. Hudde ont considerée".

Plus tard Huygens écrivit en marge: Hujus curvæ quadraturam inveni in libro H. Folium

[Fig. 146.]



tur, ut ſi AC vocetur x, CB y. AF linea data ſit a, fiat $x^3 + y^3 - xya \infty$ o. In hac ſi ex puncto D rectæ AD, ducenda ſit curvæ perpendicularis DB, non invenietur ex Carteſij methodo[6]), neque ea quam inde deduxit Flor. de Beaune[7]), ut intercepta DC inter D et perpendicularem BC, exprimi poſſit ſolis quantitatibus x et a. Sed ad cubicas æquationes pervenietur valde implicitas in quibus quæſita AC tertiam dimenſionem attingat. Quod hanc cauſam habet, quod perpendicularis ex puncto D ad curvam hanc, aliquando tripliciter vel quadrupliciter duci poteſt, ut in hac figura conſpicitur, adeo ut AC longitudo trifariam accipi poſſit, præterquam quod et ipſa DA curvæ occurrit ad angulos rectos in A. Hoc autem non fiet ſi curvæ hujus puncta ad axem ejus referantur qui eſt recta EAH, angulo ſemirecto ad AD inclinata, ut ex æquatione ſuperiori non difficulter intelligitur. Ut autem ex æquatione illa inveniatur alia, qua ad axem EA curva referatur, conſideretur [Fig. 147], quod poſita AC ∞ x,

---

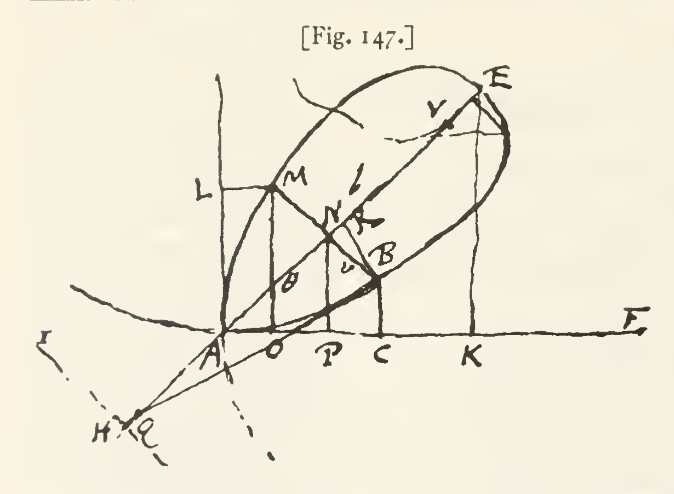
nempe ABEb, esse $\frac{1}{3}$ quadrati ab axe AE. Spatium vero utrimque infinitum KAGIHL, esse folio æquale. AH est $\frac{1}{3}$ AE. CM applicata semper æqualis duabus CN, Cb, radix falsa nimirum duabus veris [c.à.d. à chaque valeur de y correspondent trois valeurs de x dont la somme algébrique est nulle].

Cette quadrature, dont nous n'avons pas à nous occuper ici, se trouve à la p. 141 et suiv. du manuscrit H qui porte la date du 21 novembre 1692. Nous l'avons déjà publiée à la p. 374 et suiv. du T. X.

6) Exposée dans le deuxième livre de la „Géométrie".

7) Voir „Florimondi de Beaune in Geometriam Renati des Cartes Notæ breves", p. e. dans l'édition de 1683 (ex typ. Blaviana, Amsterdam) de F. van Schooten („Geometria à R. des Cartes anno 1637 Gallicè edita; postea autem cum Notis Fl. de Beaune, operâ atque studio F. v. Schooten"); les remarques „de modo inveniendi contingentes linearum curvarum" s'y trouvent aux p. 130—133.

[Fig. 147.]



et CB ∞ y, ſi ducatur BM, axem normaliter ſecans in N, ſitque MO perpendicularis in AC, ML perpendicularis in AL quæ angulo recto inſiſtit in AC, conſideretur inquam ML eſſe æqualem BC, ideoque et AO æqualem BC ſive y. Item demiſſâ perpendiculari NP in AC, eſſe OP ∞ $\frac{1}{2}$OC, ſive $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$: Ideoque AP ∞ $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Sicut autem AP ad PC ita AN ad NB. Itaque ſi AN vocetur θ, et NB v; erit ut AC ad AO, ſive CB ita $\theta + v$ ad $\theta - v$. Sit AE ∞ b, et EK perpendicularis AK: Eritque AK ∞ $\frac{1}{2}a$. Itaque $\theta + v$, $\theta - v$ et $2b$ inter ſe ſicut x, y et a. Cumque ſit $x^3 + y^3 - axy \infty 0$, Erit cubus ex $\theta + v$ + cubo ex $\theta - v$ — ſolido ex $\theta + v$ in $\theta - v$ in $2b$ ∞ o, hoc eſt his tribus additis

$$\begin{array}{ll} \theta + v & \text{AN} + \text{NB} \\ \theta - v & \text{AN} - \text{NB} \\ \hline \theta\theta - vv & \\ 2b & 2\text{AE} \\ \hline 2b\theta\theta - 2bvv & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \theta^3 + 3\theta\theta v + 3\theta vv + v^3 \\ & \theta^3 - 3\theta\theta v + 3\theta vv - v^3 \\ & \qquad\qquad - 2b\theta\theta + 2bvv \\ \hline \text{Summa} & 2\theta^3 + 6\theta vv - 2b\theta\theta + 2bvv \infty 0 \\ \hline \text{ſive} & \theta^3 + 3\theta vv - b\theta\theta + bvv \infty 0 \ \aleph \\ \hline & \dfrac{b\theta\theta - \theta^3}{3\theta + b} \infty vv. \end{array}$$

Hinc facile invenitur ubi latitudo MNB ſit maxima in ſpatio AMEB per regulam de max. et min. nam $3b\theta^3 + 2bb\theta\theta - 6\theta^4 - 3b\theta^3 \infty 0$

$$bb \infty 3\theta\theta$$

$\sqrt{\frac{1}{3}bb} \infty \theta$ ut ab Huddenio fuit inventum [1]).

[1]) Cette détermination de la plus grande largeur de la boucle est ici un πάρεργον.
Celle de Hudde se trouve aux p. 493 et 497—499 des „Exercitationes Mathematicæ" de F. van Schooten de 1656 (voir le titre complet à la p. 184 du T. I).

Hic ſi pro θ ſit $-\theta$, hoc eſt ſi AN verſus H accipiatur fiet $\frac{b\theta\theta + \theta^3}{-3\theta+b} \infty vv$.

unde erit v infinita ſi $3\theta \infty b$, hoc eſt poſita AH $\infty \frac{1}{3}$AE, erit HI aſymptotos, quod aliter quoque oſtenditur infra [2]).

Porro et tangens curvæ in puncto B invenitur ex æquatione $\theta^3 - b\theta\theta + 3\theta vv + bvv \infty 0$.

Si enim tangens ſit BQ, invenitur NQ $\infty \frac{6\theta vv + 2bvv}{2b\theta - 3\theta\theta - 3vv}$.

Unde, ſi fiat BR perpend. in AE [3]), erit NR $\infty \frac{2b\theta - 3\theta\theta - 3vv}{6\theta + 2b}$, ſive quia vv eſt $\frac{b\theta\theta - \theta^3}{3\theta + b}$, fiet NR $\infty \frac{2b\theta - 3\theta\theta}{6\theta + 2b} - \frac{3b\theta\theta - 3\theta^3}{\frac{1}{2}\text{qu. } 6\theta + 2b}$, ſive tandem $\frac{bb\theta - 3\theta^3}{\text{qu. } 3\theta + b}$.

ubi una tantum incognita quantitas θ reperitur, ideoque ſecundum propoſitionem noſtram undecimam de Evolutione Curvarum, poterit inveniri curva rectifianda, cujus nempe Evolutione curva EBA deſcribitur. Incipiet autem a puncto V [Fig. 147], poſita EV $\infty \frac{1}{8}b$ [4]). Cum enim inventa ſit NR $\infty \frac{bb\theta - 3\theta^3}{\text{qu. } 3\theta + b}$, ſi ponatur θ hoc eſt AN ∞b, fit NR $\infty -\frac{1}{8}b$, hoc eſt ab E verſus A accipienda.

Porro ſi ponatur $b - \theta$, hoc eſt NE ∞z, ſive $b - z \infty \theta$, fit pro æquatione ſuperiori ℵ, hæc altera $2bzz - z^3 - bbz - 3vvz + 4bvv \infty 0$,

Et $$\frac{2bzz - z^3 - bbz}{3z - 4b} \infty vv.$$

Unde apparet v infinitam fieri ſi $3z \infty 4b$, ſive $z \infty \frac{4}{3}b$, unde HI curvæ aſymptotus, ſi EH $\infty \frac{4}{3}b$ [2]).

[2]) On peut faire sur cette détermination de la position de l'asymptote une remarque analogue à celle du début de la note 1.

[3]) BR est une perpendiculaire à la tangente BQ, en d'autres termes une normale à la courbe, coupant l'axe AE en R.

[4]) Le point V est donc le centre de courbure de la boucle au point E.

APPENDICE V

À LA PARS TERTIA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1692]

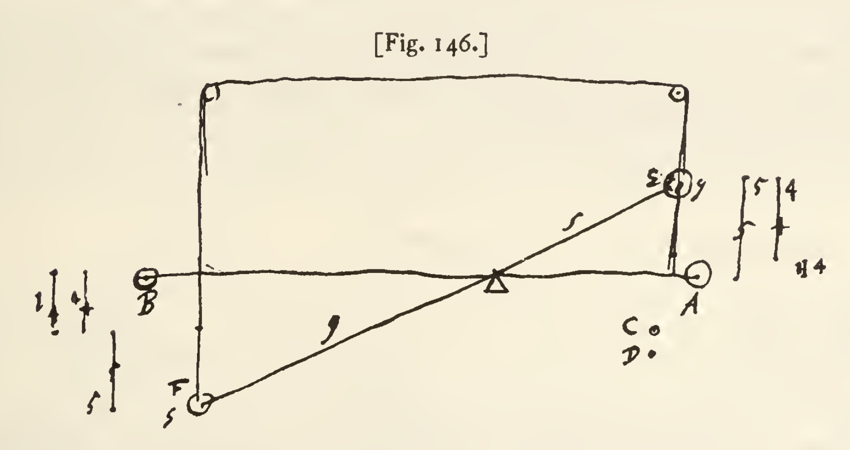
Calcul du rayon de courbure minimal de la courbe logarithmique: voir le N° 2770, p. 333—335 du T. X.

APPENDICE I

À LA PARS QUARTA DE L',,HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1666.] [1]

[Fig. 146.]



§ 1 [2]. Datis duobus gravibus æqualibus, ratio æquilibrij patitur ut defcenfu unius ex certa altitudine, alterum attollatur ad altitudinem æqualem [3].

Nullum grave afcendere poteft nifi aliud grave defcendat [3].

Si non æquiponderent, prævaleat B [Fig. 146] [4]. Ergo addenda gravitas aliqua

---

[1]) La Pièce, que nous divisons en deux §§, est empruntée à la p. 105 du Manuscrit C. La p. 102 est datée sept. 1666 et la p. 107 porte la date du 2 nov. 1666.

[2]) Dans la Pars Quarta de l',,Hor. osc." Huygens consacre quelques pages à l'élucidation de son Hypothèse I d'après laquelle le centre de gravité d'un système de corps ne peut pas s'élever spontanément. Les considérations du présent Appendice, écrites à Paris quelques mois après son arrivée, se rapportent à ce sujet. Remarquons en passant que Huygens ne définit nulle part le centre de gravité d'un corps unique, ce qui d'ailleurs n'est pas facile (voir les notes 1 et 2 de la p, 340 du T. XVI).

[3]) C'est évidemment l'expérience, indépendante de toute théorie sur la nature de la pesanteur, qui est invoquée ici, comme dans les élucidations mentionnées dans la note 2 où il est dit que deux corps égaux, pouvant tourner autour de leur centre de symétrie ou de gravité, ,,moventur . . . absque vi ulla".

[4]) Les chiffres écrits dans la Fig. 146 font voir que les poids sont supposés inversement proportionnels aux bras de levier.

ad A ut fiat æquilibrium, ſit ea C. et ſit D gravitas minor quam C. Ergo D appoſitâ ad A non fiet æquilibrium ſed utraque ſurſum tolletur puta in E, dum B perveniet in F. Atqui A ſola oſtenditur [3]) deſcendendo ad priſtinum locum reducere poſſe etiam B unde digreſſa erat. Ergo jam gravitas D in E remanens motu ſpontaneo gravitatum A et B eo ſublata eſt, illis in priſtinum locum reſtitutis unde rurſus quoties libuerit pondus ipſi D æquale eodem modo in E attollent quod eſt abſurdum [5]).

§ 2. Primum oſtendendum [6]) cum minus pondus metitur majus [7]).

Auferendo minorem altitudinem à majori, et minus pondus a majori pondere ſemper reliqua altitudo ad minorem altitudinem, ut reliquum pondus ad minus pondus [8]). Ideoque pondera duo quibus deſcendendum reſtat ſemper converſam rationem habent ſpatiorum per quæ deſcendere debent.

---

[3]) Voir la note 3 de la p. 411 qui précède.

[5]) Comparez le „quod est absurdum" du troisième alinéa de la Prop. VI de la Pars Secunda de l'„Hor. osc.". Huygens considère comme absurde l'idée qu'on pourrait construire un système mécanique accomplissant continuellement et spontanément un travail utile (voir à ce sujet la note 7 de la p. 243 du T. XVI).

[6]) Apparemment Huygens se propose de démontrer rigoureusement plus tard (en effet, le § 1 ne contient pas de démonstration rigoureuse; on ne distingue pas nettement les hypothèses suggérées par l'expérience et les conséquences logiques qui en découlent) que lorsque deux poids attachés au fléau d'une balance impondérable sont en équilibre, le rapport de leurs distances au point fixe est l'inverse de celui des poids. C'est là le sujet de son mémoire „Demonstration de l'Equilibre de la Balance" publié en 1693 aux p. 313 et suiv. des „Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique, par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences", Paris, Impr. Royale, où il part des données suivantes: „I. L'on demande avec Archimede que deux poids égaux attachez chacun au bout des bras égaux d'une balance fassent équilibre. II. Et que les poids estant égaux, & les bras de la balance où ils sont attachez, inégaux, elle incline du costé du bras qui est le plus long. III. L'on demande aussi qu'on puisse concevoir que les lignes & les plans dont il sera parlé dans cette démonstration soient inflexibles & sans pesanteur". Dans ce mémoire — les considérations qu'on y trouve, postérieures à celles du présent Appendice, datent d'ailleurs de longtemps avant 1693; nous y reviendrons dans un des Tomes suivants — Huygens ne part donc pas de l'hypothèse de la non-existence d'un mécanisme accomplissant continuellement et spontanément un certain travail, tandis qu'ici, d'apres la fin du § 1, il se propose de fonder sa démonstration e. a. sur cette dernière hypothèse.

[7]) En 1693, comme en 1666, Huygens suppose les poids commensurables entre eux.

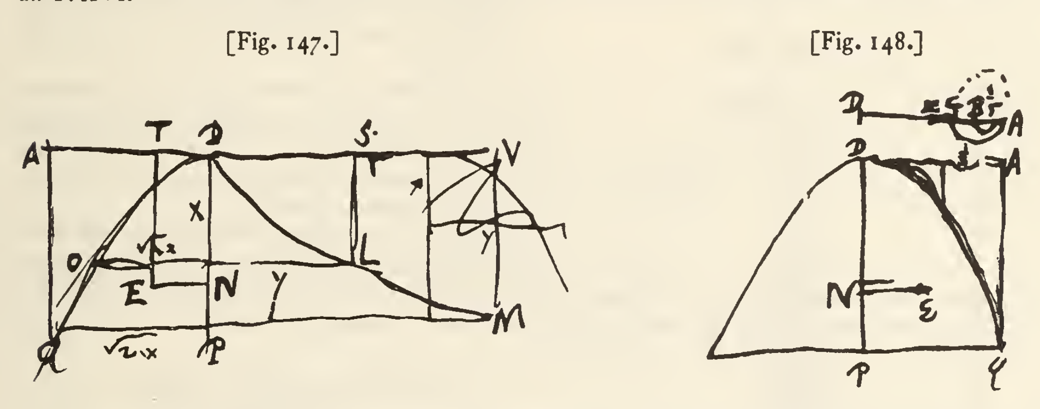
[8]) La dernière phrase du texte fait voir que Huygens suppose la proposition rigoureusement établie pour des poids commensurables entre eux. Il indique comment il faut ensuite étendre cette démonstration aux poids incommensurables.

APPENDICE II

À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

A. Dans la Prop. XXI Huygens indique e.a. la longueur du pendule isochrone avec un segment droit de parabole oscillant latéralement soit autour de son sommet soit autour du milieu de sa base. Son calcul repose e.a. sur quelques données qu'on trouve à la p. 60 (numération nouvelle) du Manuscrit B. Nous avons publié à la p. 475 du T. XVI la plus grande partie de ces données qui servaient en cet endroit à expliquer le calcul des p. 473—474 de la longueur du pendule isochrone avec un ellipsoïde de révolution suspendu en un point de son axe. Ici nous reproduisons de nouveau les deux figures de la page nommée, mais pour le texte de Huygens nous renvoyons le lecteur au T. XVI.

[Fig. 147.] [Fig. 148.]



La Fig. 148 représente le segment entier. D'après la Fig. 147 et le texte correspondant on a $DN = \frac{5}{7} DP$, où DP est l'axe du segment de parabole dont la Fig. 147 ne représente que la moitié gauche, tandis que DN, subcentrique d'un onglet, est la longueur du pendule isochrone, lorsque la parabole, suspendue en D, exécute une oscillation solide, c.à.d. une oscillation autour de la tangente au sommet D. Comme le centre de gravité Z se trouve à une distance $\frac{3}{5}$ DP du sommet, le „premier rectangulum" — voir la p. 48 de l'Avertissement qui précède — correspondant à cette oscillation solide est $DZ \times ZN$ ou $\frac{3}{5} DP \times (\frac{5}{7} - \frac{3}{5}) DP$ ou $\frac{12}{175} DP^2$. La fraction $\frac{12}{175}$ a été notée en marge par Huygens sur la page en question.

Pour calculer la longueur du pendule isochrone dans le cas d'une oscillation latérale du segment autour du sommet D, il faut en considérer le „deuxième rectangulum", celui, peut-on dire, qui se rapporte à l'oscillation solide de la demi-parabole autour de DP. Comme la distance de DP au centre de gravité de la demi-parabole est $\frac{3}{8}$ PQ (p. 474 du T. XVI) et la distance de DP au centre de l'oscillation solide considérée vaut $\frac{8}{15}$ PQ, le „deuxième rectangulum" s'exprime par $\frac{3}{8} PQ . \frac{8}{15} PQ$ ou $\frac{1}{5} PQ^2$.

La somme des deux „rectangula" que nous venons de calculer constitue le „spatium applicandum" qui est donc $\frac{12}{175} DP^2 + \frac{1}{5} PQ^2$. En le divisant par $\frac{3}{5}$ DP, distance du sommet au centre de gravité, et en ajoutant $\frac{3}{5}$ DP au quotient, on trouve $\frac{5}{7} DP + \frac{1}{3} \frac{PQ^2}{DP}$, ce qui est la valeur donnée par Huygens dans l'„Hor. osc.".

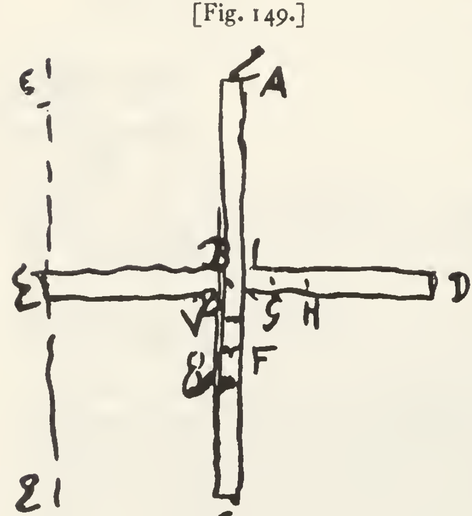
On pourrait auſſi commencer par ajouter DN^2 ou $(\frac{3}{5}\ DP)^2$ au „premier rectangulum". On trouve ainſi pour les deux grandeurs reſpectivement $\frac{3}{7}\ DP^2$ et $\frac{1}{5}\ PQ^2$. La ſomme $\frac{3}{7}\ DP^2 + \frac{1}{5}\ PQ^2$ conſtitue alors ce que nous avons appelé ρ^2 dans la note 1 de la p. 48 de l'Avertiſſement. En le diviſant par $\frac{3}{5}$ DP, diſtance du ſommet au centre de gravité de la parabole, on trouve de nouveau pour la longueur du pendule iſochrone $\frac{5}{7}\ DP + \frac{1}{3}\frac{PQ^2}{DP}$.

Lorſque l'oſcillation latérale du ſegment a lieu autour du point P, il faut, pour trouver ρ^2, ajouter $(\frac{2}{5}\ DP)^2$ au „premier rectangulum" $\frac{12}{175}\ DP^2$ et $(\frac{3}{8}\ PQ)^2$ au „deuxième rectangulum" $(\frac{1}{5} - \frac{9}{64})\ PQ^2$. La ſomme totale eſt donc dans ce cas $\frac{8}{35}\ DP^2 + \frac{1}{5}\ PQ^2$, ce qui donne en diviſant cette expreſſion par $\frac{2}{5}$ DP, la longueur du pendule iſochrone $\frac{4}{7}\ DP + \frac{1}{2}\frac{PQ^2}{DP}$, comme le dit Huygens.

Ajoutons que l'expreſſion „ſpatium applicandum" eſt employée déjà, dans un autre calcul, à la p. 60 du Manuſcrit B. Voir la partie *C* du préſent Appendice.

D'ailleurs on peut fort bien ne pas ſe ſervir d'une terminologie correſpondant au texte de l'„Hor. oſc." et faire uſage de la formule de la note 3 de la p. 482 ou de la note de la p. 492 du T. XVI.

[Fig. 149.]



B. La Pièce *B*, écrite au crayon (Huygens était alité en ce temps, voir la p. 36 de l'Avertiſſement), eſt empruntée à la p. 262 du Manuſcrit D (les p. 254 et 264 portent les dates du 15 janvier et du 27 mai 1670 reſpectivement).

Huygens y conſidère l'oſcillation latérale d'une croix, compoſée de deux lignes peſantes égales, autour d'un de ſes ſommets. Il s'agit de trouver la longueur du pendule iſochrone.

AC vel ED ∞ *a* [Fig. 149].

EH ∞ $\frac{2}{3}$ AC.

BH ∞ $\frac{1}{6}$ ED vel AC.

Cunei ſuper cruce AECD abſciſſi plano per EE, centrum gravitatis bifariam dividet BH. BG ∞ $\frac{1}{12}$ ED.

La ſubcentrique BG de l'onglet conſidéré eſt le centre d'une oſcillation ſolide de la croix autour de l'axe EE. L'onglet ſe compoſe de deux plans égaux, l'un triangulaire, l'autre rectangulaire, dont les centres de gravité ſe projettent en H et B reſpectivement.

AB ∞ $\frac{6}{12}$ *a*

AV ∞ $\frac{7}{12}$ *a*

$\square$ BAV $\frac{12}{144}$

$+ \frac{1}{24}$ $\square$ EBG

$\frac{48}{144}$

$\frac{1}{3}$

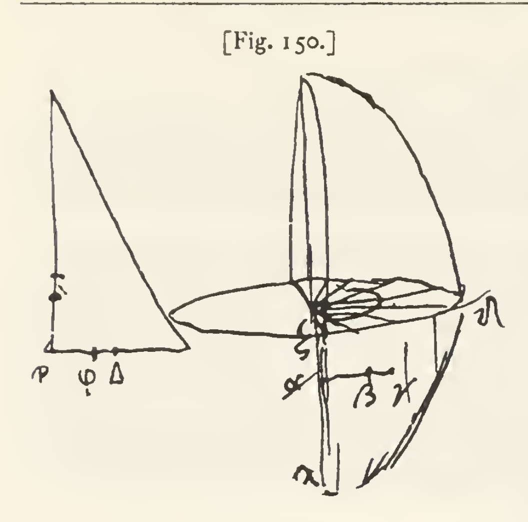
$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \infty \frac{2}{3} a \infty AO.$$

Le point de fufpenfion dans le cas de l'ofcillation latérale de la croix eft A (l'ofcillation folide confidérée plus haut avait lieu autour d'un axe paffant par E, mais il eft évident que les points A et E font équivalents). V eft le centre de l'ofcillation folide de la croix autour d'un axe horizontal paffant par A. Le „premier rectangulum" eft donc le $\square$ ABV ou $\frac{1}{24} a^2$. En y ajoutant, comme dans l'application de la deuxième méthode au cas du fegment de parabole, le carré AB^2, c.à.d. $\frac{1}{4} a^2$, on obtient $\frac{1}{24} a^2 + \frac{1}{4} a^2 = \frac{42}{144} a^2$, ce qui fe calcule directement en prenant le $\square$ BAV. Le „deuxième rectangulum" $\square$ EBG ou $\frac{1}{24} a^2$ doit refter tel qu'il eft, puifqu'il fe rapporte à un centre de gravité B fitué fur l'axe de fymétrie du corps ofcillant. La fomme $\frac{48}{144} a^2$ ou $\frac{1}{3} a^2$ eft la grandeur totale — nous ne difons pas le „fpatium applicandum"; comparez la note 1 de la p. 48 de l'Avertiffement — correfpondant à l'ofcillation plane autour de A; en le divifant par $\frac{1}{2} a$, diftance du fommet au centre de gravité, on obtient $\frac{2}{3} a$, longueur du pendule ifochrone cherché.

$$
\begin{array}{l}
AB \infty \frac{1}{2} a \\
BV \infty \frac{1}{12} a \\
\hline
\frac{1}{24} aa \ \square\ ABV \\
\frac{1}{24} aa \ \square\ EBG \\
\hline
\frac{1}{12} aa \text{ fumma} \\
\text{div. p. } \frac{1}{2} a \infty AB \\
\hline
\frac{1}{6} a \infty BO \\
\frac{2}{3} a \infty AO.
\end{array}
$$

Dans ce deuxième calcul, conduifant au même réfultat, et analogue au premier calcul dans le cas du fegment de parabole, la fomme $\frac{1}{12} a^2$ du „premier rectangulum", et du „deuxième rectangulum", fe rapportant par définition l'un et l'autre au centre B de la figure, conftitue le „rectangulum ofcillationis", „totum fpatium applicandum" ou „fpatium applicandum". Après l'avoir divifée par $\frac{1}{2} a$, il faut ajouter $\frac{1}{2} a$ au quotient, d'après la formule $l = \frac{\rho'^2}{b} + b$ ou $l = \frac{\Sigma r'^2}{nb} + b$ de la p. 48 de l'Avertiffement.

C. Le calcul qui fuit eft emprunté à la p. 60 du Manufcrit B, confidérée auffi plus haut (partie *A*). Comme il s'agit d'une feuille collée dans le Manufcrit, la date eft incertaine. Huygens y calcule le „fpatium applicandum" d'un demi-paraboloïde de révolution. Ailleurs (Manufcrit B, p. 174 ou T. XVI, p. 483, p. 333 du préfent Tome) il confidère le paraboloïde (ou conoïde) entier. Il paraît extrêmement probable que le calcul de la p. 483 du T. XVI, quoiqu'il fe trouve plus loin dans le Manufcrit B, foit antérieur à celui de la p. 60, d'autant plus qu'on trouve à la p. 60 la Fig. 150, dont la figure a latere où fe trouvent les lettres P, Φ et Δ correfpond à la Fig. 90 de la p. 289 du préfent Tome et fe rapporte à la nouvelle méthode de calcul pour les corps de révolution (voir la note 4 de la p. 554 du T. XVI), dont nous avons dit dans le deuxième alinéa de la p. 372 du T. XVI qu'elle correfpond plus ou moins à la détermination de Σz^2 de la note 4 de la p. 483 du T.



[Fig. 150.]

XVI, c.à.d. à une méthode dont Huygens fait ufage (note 5 de la p. 483 nommée) dans le cas du conoïde entier. Vers la fin de la Prop. XXII de la Pars Quarta Huygens parle généralement de la détermination du centre d'ofcillation de la moitié d'un corps de révolution, évidemment toujours coupé en deux (comme le conoïde) par un plan paffant par l'axe. Il ne développe le calcul que pour le demi-cône (nous ne poffédons pas de brouillon de ce calcul) en ajoutant qu'il laiffe à d'autres le foin d'exécuter un calcul analogue pour le demi-cylindre et le demi-conoïde. Or, voici ce qu'on trouve fur le demi-conoïde à la p. 60 du Manufcrit B outre le texte de la p. 475 du T. XVI fe terminant par les mots NE [Fig. 147] $\frac{8}{15}$ brachium cunei fuper PDQ abfciffi per DP:

r radius c arcus quadrantis

$$c \text{ ——— } r \text{ ——————— } \tfrac{8}{15} \Big/ \tfrac{8}{15}\frac{rr}{c}$$

$\alpha\beta$ [Fig. 150] brachium femiconoidis parabolici vel figuræ proportionalis $\zeta\lambda\delta$.

$$\frac{\frac{1}{6}rr}{\frac{8}{15}\frac{rr}{c}}$$

$\frac{5c}{16}$ brachium cunei per $\zeta\lambda$ fuper figura proportionali $\zeta\lambda\delta$.

$$\left.\begin{matrix}\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \infty \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3}\end{matrix}\right\} \text{in.}$$
$$\overline{\tfrac{1}{18}\,aa.}$$

$$\frac{5}{16}c - \frac{8}{15}\frac{rr}{c} \quad \beta\gamma$$

$$\frac{8}{15}\frac{rr}{c} \quad \alpha\beta$$

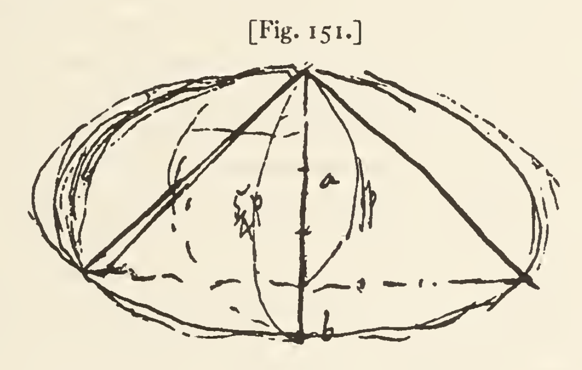
$\frac{1}{6}rr - \frac{64}{225}\frac{r^4}{cc} + \frac{1}{18}aa$ fpatium applicandum in femiconoide parabolico.

Voici l'explication de ce calcul. $\frac{8}{15}r$, où r eft le rayon de la bafe du demi-conoïde, eft la diftance à l'axe vertical de la Fig. 150 du centre de gravité d'une partie du demi-conoïde limité par deux plans paffant par l'axe et faifant l'un avec l'autre un angle infiniment petit. Le lieu de tous ces centres de gravité eft la demi-circonférence de cercle horizontale qu'on voit dans la figure.

$\frac{8}{15}\frac{rr}{c}$ ou $\alpha\beta$ eſt la diſtance de l'axe vertical au centre de gravité de cette demi-circonférence, donc auſſi la diſtance de l'axe au centre de gravité du demi-conoïde. Les deux figures proportionnelles, à gauche et au-deſſous de la figure principale, ſont conſtruites comme l'enſeigne la Prop. XIV de la Pars Quarta. D'après la fin de la Prop. XV de la Pars Quarta le „deuxième rectangulum" du conoïde entier s'exprime, puiſque le corps conſidéré eſt de révolution, par le produit PΦ. PΔ, où PΔ $= \frac{1}{2}r$ et P$\Phi = \frac{1}{3}r$, Φ étant la projection ſur la baſe du centre de gravité de la figure a latere qui, pour le conoïde, eſt un triangle. Ce „deuxième rectangulum" eſt donc $\frac{1}{6}rr$. Or, il s'exprime auſſi par le produit $\alpha\beta.\ \alpha\gamma$, où $\alpha\gamma$ eſt le „brachium cunei per $\zeta\lambda$ ſuper figura proportionali $\zeta\lambda\delta$". On obtient donc par diviſion $\alpha\gamma = \frac{5c}{16}$. Le produit de $\beta\gamma$ par $\alpha\beta$ donne enſuite le „deuxième rectangulum" ſe rapportant au demi-conoïde. Pour obtenir le „ſpatium applicandum" du demi-conoïde il faut encore y ajouter le „premier rectangulum" qui a la valeur $\frac{1}{18}aa$, où a déſigne la hauteur du triangle a latere égale à celle du conoïde; en effet, il s'obtient, tant pour le demi-conoïde que pour le conoïde entier, en multipliant dans le triangle la diſtance $\frac{1}{12}a$ de ſon centre de gravité au centre de l'oſcillation ſolide du triangle autour d'un axe paſſant par ſon ſommet — on prend donc la différence de $\frac{3}{4}a$ (ſubcentrique d'un onglet) et de $\frac{2}{3}a$ — par la diſtance $\frac{2}{3}a$ du centre de gravité au ſommet.

Comme Huygens le dit dans le paragraphe ſur le demi-cône, le „ſpatium applicandum" calculé permet de trouver le „centrum agitationis ... in omni ſuſpenſione, ... dummodo ab axe qui ſit parallelus" au diamètre qui limite la baſe du demi corps de révolution. On obtient, comme toujours — comparez la partie *D* qui ſuit — la longueur du pendule iſochrone en diviſant le „ſpatium applicandum" par la diſtance du ſommet au centre de gravité du corps, et en ajoutant enſuite cette même diſtance au quotient.

[Fig. 151.]



D. La même p. 60 verſo contient encore le calcul ſuivant:

$$\frac{\frac{3}{80}aa + \frac{3}{80}bb}{\frac{3}{4}a} + \frac{3}{4}a \infty p \text{ [Fig. 151]}$$

$$\frac{3}{80}aa + \frac{3}{80}bb + \frac{9}{16}aa \infty \frac{3}{4}ap$$

$a \infty x,\ b \infty 2y.$

$$\frac{48}{80}aa + \frac{3}{80}bb \infty \frac{3}{4}ap$$

$$\frac{6}{10}xx + \frac{3}{20}yy \infty \frac{3}{4}px$$

$$yy \infty 5px - 4xx$$

$$y \infty \sqrt{5px - 4xx}.$$

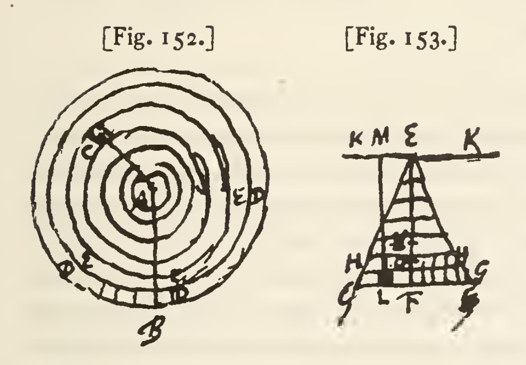
Huygens se propose de trouver le lieu des bases d'un groupe de cônes droits suspendus à un sommet commun et correspondant tous au même pendule isochrone de longueur p. La hauteur du cône considéré est d'abord appelé a, puis x, et le diamètre de la base d'abord b, ensuite $2y$.

Le „spatium applicandum" $\frac{3}{80}aa + \frac{3}{80}bb$ du cône de révolution est donné par Huygens — qui laisse au lecteur le soin d'exécuter le calcul de ce „spatium" ce que nous faisons comme lui — dans le paragraphe „centrum oscillationis coni" de la Prop. XXII de la Pars Quarta. Il en tire ici la longueur du pendule isochrone comme il a été dit à la fin de la partie B qui précède. Le lieu cherché est l'ellipsoïde de révolution aplati engendré par la rotation de l'ellipse à axes $\frac{5}{4}p$ et $\frac{5}{2}p$. C'est ce qui résulte aussi du calcul de Huygens de la p. 481 du T. XVI, où l'on trouve [Fig. 50] une ellipse de la même forme; ceci en vertu de la remarque que nous avons faite à la p. 368 (troisième alinéa) du T. XVI.

APPENDICE III

À LA PARS QUARTA DE L'HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1669—1670.][1])



§ 1. Si circulus vel circuli fector in particulas minimas æquales divifus intelligatur a quibus fingulis rectæ ad centrum ductæ fint. Erunt harum omnium quadrata fimul fumta æqualia dimidio quadrato radij, multiplici fecundum particularum ipfarum numerum.

Sit Circulus [Fig. 152] in annulos æqualis latitudinis divifus. Et annuli omnes in particulas æquales, adeo ut in unoquoque fit numerus particularum pro ratione magnitudinis annuli [2]). Triangulum EGG [Fig. 153] lineis bafi parallelis dividatur in fegmenta annulis proportionalia. Et fegmenta omnia divifa in particulas æquales inter fe, non opus autem ut et particulis circuli æquales fint. Sit vero numerus particularum in fegmento GG idem qui in annulo DD. Unde neceffario et in reliquis deinceps fegmentis erunt numeri ijdem qui in annulis ipfis refpondentibus, et in toto proinde Δ^{lo} EGG idem numerus particularum qui in circulo AB.

EF [Fig. 153] ∞ AB [Fig. 152]. GG ad arbitrium, KE parallela GG.

GG fecta in tot particulas inter fe æquales quot funt in annulo DD. Ergo quadrata omnia LM æqualia quadratis omnibus ex annulo D in A ductarum. Et quadrata a diftantijs particularum fegmenti HH ab KE [Fig. 153], æqualia omnibus quadratis EA [Fig. 152] &c. Atqui fumma quadratorum a diftantijs particularum trianguli EGG æquatur rectangulo OEN [3]), multiplici fecundum particularum numerum.

---

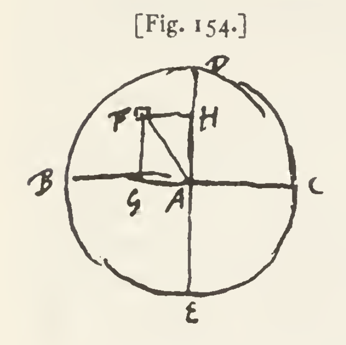
[1]) Cet Appendice est emprunté aux p. 245—249 du Manuscrit D. La p. 235 porte la date du 21 nov. 1669 et la p. 250 (comparez la note 1 de la p. 388 du présent Tome) celle du 9 janvier 1670. Nous divisons cette Pièce en §§.

[2]) Comparez le troisième alinéa de la p. 443 du T. XVI.

[3]) N est le centre de gravité du triangle, EO la subcentrique de l'onglet obtenu en coupant le prisme élevé sur le triangle par un plan oblique passant par KK. EN × NO est le „rectangu-

posita EN $\frac{2}{3}$ EF, et EO $\frac{3}{4}$ EF, unde ▭ OEN ∞ $\frac{1}{2}$ qu. EF. Ergo et summa quadratorum a distantijs particularum circuli AB a centro A æquabitur $\frac{1}{2}$ qu. EF sive $\frac{1}{2}$ qu. AB multiplici secundum particularum numerum qui sunt in triangulo vel in circulo[1]).

[Fig. 154.]



Si circulus in particulas minimas æquales divisus intelligatur, et a singulis in diametrum circuli perpendiculares duci. Erunt harum omnium quadrata simul sumta æqualia quartæ parti quadrati radij, multiplici secundum numerum particularum.

Sit circulus [Fig. 154] centro A diametro BC, et diviso cogitatione plano ejus in particulas minimas æquales. sint ab ijs singulis ductæ in diametrum BC perpendiculares sicut a particula F ducta est FG. dico harum omnium perpendicularium quadrata æquari $\frac{1}{4}$ qu. AB mult. s.n.p.

Sit enim ducta altera circuli diametrus ipsi BC ad angulos rectos DE et in eam cadat perpendicularis FH et jungatur FA. Sunt igitur quadrata FG et FH simul æqualia quadrato FA. Eademque ratione quadrata bina perpendicularium quæ ab unaquaque particula ducuntur ad diametros BC, DE, æqualia esse constat quadrato distantiæ ejus particulæ a centro A. Et quadrata omnia a distantijs particularum a diametris BC, DE æqualia omnibus quadratis distantiarum a centro A. Atqui quadrata perpendicularium omnium ad diametrum BC æquari liquet quadratis omnibus perpendicularium ad diametrum DE. Ergo quadrata perpendicularium omnium ad diametrum unamquamque BC vel DE æquantur semissi quadratorum a distantijs particularum a centro A. hoc est per præc. $\frac{1}{4}$ qu. radij AB multiplici s.n.p. quod erat demonstrandum.

§ 2. Si sphæra [Fig. 155] vel sector sphæræ in particulas minimas æquales dividi intelligatur, a quibus singulis ad centrum sphæræ rectæ ducantur. Erunt harum

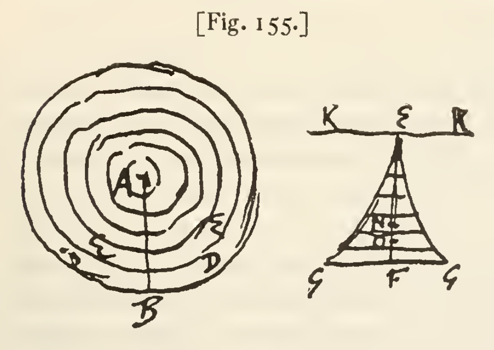
---

lum distantiarum" par rapport au centre de gravité qui doit être augmenté de EN² (de sorte qu'on obtient EN × OE) lorsque le point de suspension est en E. Voir p. e. la partie *B* de l'Appendice précédent.

[1]) Ceci peut s'écrire en notations plus modernes

$$2\pi \int_{0}^{r} r^3 dr = \pi r^2 . \tfrac{1}{2} r^2 \text{ ou } \tfrac{1}{2}\pi r^4; \text{ donc } \int_{0}^{r} r^3 dr = \frac{r^4}{4}.$$

[Fig. 155.]



omnium quadrata fimul fumta æqualia $\frac{3}{5}$ quadrati radij multiplicibus fec. p. n.

Sit fphæra primum divifa in involucra fphærica minimæ et æqualis craffitudinis omnia circa idem centrum ordinata, et hæc deinde fecta in particulas æquales, quarum in unoquoque involucro multitudo erit pro ratione magnitudinis, deinde accepta EF æquali radio AB, conftituantur ad eam bina complementa $\frac{1}{2}$ parabolarum verticem habentium E punctum axem vero EK quæ ipfi FE perpendicularis ducatur. figura autem ex iftis compofita EGG fecetur totidem lineis bafi GG parallelis et æqualibus interftitijs a fe invicem remotis quot funt fuperficies fphæram in involucra dirimentes. Sitque fegmentum GG divifum in partes æquales totidem quot funt in involucro fphærico DD, itemque reliqua fegmenta figuræ EGG fecta fint in ejufdem magnitudinis particulas ijs quæ in fegmento GG. Ergo cum involucra fphærica fint ficut quadrata fuorum radiorum, et fegmenta quoque figuræ EGG fint ut quadrata diftantiarum fuarum ad recta EK. patet fegmenta involucris proportionalia effe fi eodem in ordine fumantur. Unde unicuique etiam fegmentorum idem inerit numerus partium qui involucro ipfi refpondenti. Et fi a fingulis proinde particulis fegmentorum ad rectam EK perpendiculares cadant, erunt quadrata a particulis cujufque fegmenti eodem numero ac magnitudine cum quadratis a rectis quæ a particulis involucri refpondentis ducuntur ad centrum A. &c. [2]).

---

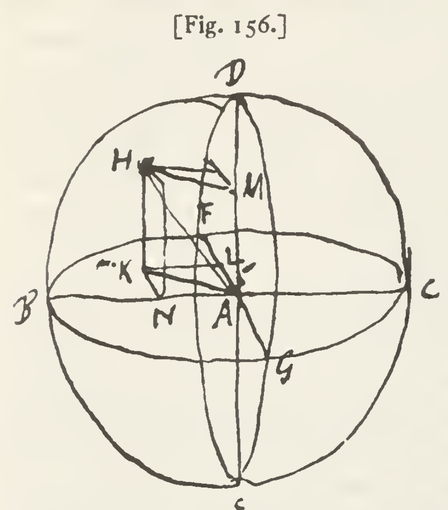
[2]) En marge: „potest EGG conus poni de quo antea sit demonstratum". Suivant la Prop. XXII de la Pars Quarta (Fig. 112 de la p. 329 qui précède) les sections d'une pyramide ou d'un cône de même hauteur r sont proportionnelles à celles de la figure plane EGG ici considérée. La somme cherchée est donc égale à celle des carrés des distances de toutes les particules du cône au plan de la base GG, évidemment en supposant que le cône contient le même nombre de particules que la sphère.

Son „premier rectangulum" — voir sur ce terme la p. 48 de l'Avertissement — est alors $\frac{3}{80}r^2$ d'après le paragraphe „Centrum oscillationis coni" de la Prop. XXII de la Pars Quarta. Pour obtenir la grandeur cherchée il faut y ajouter le carré de la distance du sommet au centre de gravité, c.à.d. $\frac{9}{16}r^2$. Comparez les calculs de l'Appendice précédent. On obtient alors la somme $\frac{3}{5}r^2$. L'on pourrait dire (comparez la note 1) que Huygens a ainsi démontré la formule $\int_0^r r^4 dr = \frac{r^5}{5}$, ou encore qu'il a trouvé que le moment d'inertie d'une sphère homogène par rapport à son centre est $\frac{2}{5}Mr^2$, où M désigne la masse.

Propositio.

Si ſphæra in particulas minimas æquales diviſa intelligatur, et a ſingulis in planum per centrum ſphæræ ductum perpendiculares actæ, erunt harum omnium quadrata ſimul ſumta æqualia $\frac{1}{3}$ quadratorum a diſtantijs omnium particularum a ſphæræ centro, hoc eſt $\frac{1}{5}$ quadrati radij multiplici ſec. p. num.

[Fig. 156.]



Sit ſphæra [Fig. 156] cujus centrum A, ſectio per centrum circulus BGCF, cujus diameter BC. et intelligantur a ſingulis ſphæræ particulis perpendiculares ductæ ad planum BGCF. ſicut a particulis H ducta eſt HK. dico &c.

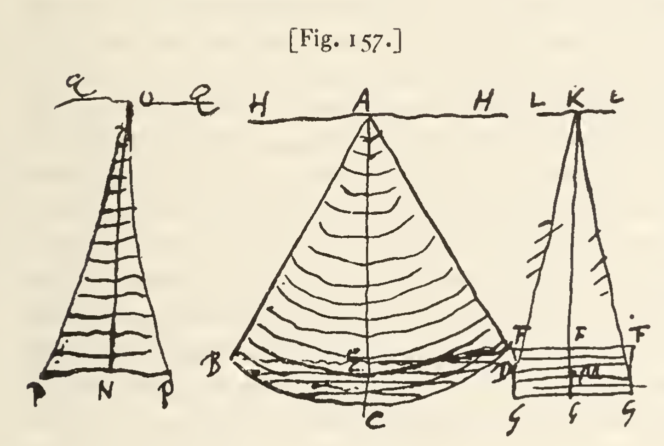
Secetur enim ſphæra alio plano per diametrum BC, quod ſit priori BGCF ad angulos rectos. Itemque tertio plano DGEF quod ſit rectum ad utrumque jam dictorum faciens in circulo BGCF ſectionem GF, et in circulo DBEC ſectionem DE. Et a puncto K ducantur ad BC, FG perpendiculares KN, KL, et jungantur KA, HA. Eſt igitur quadratum HA æquale quadratis HK et KA. Sed quadratum KA æquale quadratis KN, NA, ſive quadratis KN, KL. Ergo quadratum HA æquale quadratis tribus HK, KN, KL. Eſt autem KN æqualis perpendiculari quæ a puncto H duceretur in planum DBEC, et KL æqualis perpendiculari quæ duceretur ab eodem puncto H in planum DGEF. Ergo quadrata tria HK, KN, KL ſeu quadratum HA æquale quadratis diſtantiarum particulæ H a tribus planis quibus ſphæram per centrum ſecuimus. Eademque ratione erit quadratum diſtantiæ uniuscujuſque particulæ à centro A æquale quadratis diſtantiarum ejus particulæ a tribus dictis planis, et proinde quadrata omnium diſtantiarum a centro A æqualia quadratis omnibus perpendicularium a particulis in tria plana per centrum ſphæræ ducta. Atqui manifeſtum eſt quadrata omnium perpendicularium in quodlibet trium planorum ſimul ſumta eandem efficere quadratorum ſummam. Ergo ſumma perpendicularium in unum horum planorum velut BGCF æquatur $\frac{1}{3}$ quadratorum à diſtantijs omnium particularum a centro A. hoc eſt, per præc. $\frac{1}{5}$ quadrati radij multiplici ſec. num. part. in quas ſphæra diviſa intelligitur. quod erat demonſtrandum.

Propositio.

Poſita ſit prius ſphæra in particulas diviſa. ſi ab omnibus ducantur perpendiculares in axem ejus, erunt harum omnium quadrata æqualia $\frac{2}{3}$ quadratorum a diſtantijs particularum a centro ſphæræ, hoc eſt $\frac{2}{5}$ quadrati radij multiplicibus ſec. num. part.

In eadem figura ſit HM perpendicularis a particula H in axem DE, eodemque modo a ſingulis particulis in eundem axem perpendiculares ductæ intelligantur, cætera vero conſtructa ſint ut prius. Eſt ergo HM æqualis KA, cujus quadratum æquale quadratis KN, KL, quare et quadratum HM æquale quadratis KN, KL, hoc eſt quadratis perpendicularium a puncto H ductarum in planum DBEC, DGEF. Eademque ratione quadratum perpendicularis ab unaquaque particula in axem DE, æquale oſtendetur quadratis perpendicularium ejus particulæ a planis ijſdem duobus. Unde patet quadrata omnia perpendicularium a ſingulis ſphæræ particulis in axem DE ductarum æquari quadratis omnibus perpendicularium ab ijſdem particulis ductarum in plana DBEC, DGEF. Sunt autem quadrata perpendicularium a particulis omnibus in alterutrum horum planorum ductis æqualia quadratis perpendicularium ab omnibus ijſdem particulis ductarum in reliquum planum. Ergo quum, ex præc. ſit ſumma iſta quadratorum in unum planum æquale parti quintæ quadrati radij AB multiplici s.n.p. Erunt duæ ſummæ quadratorum a perpendicularibus particularum in duo plana DBEC, DGEF, hoc eſt, ſumma quadratorum a perpendicularibus quæ in axem DE ducuntur ab omnibus particulis æqualis $\frac{2}{5}$ quadrati AB multiplicibus s.n.p. quod erat demonſtrandum.

[Fig. 157.]



§ 3. In ſphæræ ſectore quoque centrum oſcillationis inveniri poteſt conſtituta ad latus figura plana proportionali quæ ex complemento parabolæ ad circumſcriptum rectangulum et ſegmento item parabolæ conflata erit [1]). in qua figura invenire licet omnia quibus ad ſolutionem problematis opus eſt. Sed alia ratione multo breviori atque hic peculiari res conficietur hoc modo.

Sit [Fig. 157] ſector ABCD, ex ſphæra cujus centrum A. axis vero ſectoris ſit AC

[1]) La partie supérieure de cette figure a latere, composée, comme celle de la Fig. 155, de deux „complementa parabolæ", correspondrait évidemment à la partie conique du secteur de sphère, tandis que la partie parabolique inférieure correspondrait au segment de la sphère qui termine le secteur (comparez la p. 470 du T. XVI ou plutôt la p. 331 qui précède).

ſuſpendique intelligatur ab axe horizontali per A punctum ducto. Itaque invenienda eſt ſumma quadratorum a diſtantijs particularum ſinguli ſectoris ab axe illo. ſive ſummæ duæ diſtantiarum a plano horizontali AH, et a plano per axem ſectoris AC ducto. Hæ enim diviſæ [1]) per diſtantiam quæ eſt à ſuſpenſione A ad centrum gravitatis ſectoris multip. s.n.p. dabit diſtantiam centri oſcillationis ab eadem ſuſpenſione A.

Ut ergo primum inveniatur ſumma quadratorum a plano horizontali AH. intelligatur ſector diviſus ſuperſiciebus ſphæricis æquali intervallo diſtantibus et quarum omnium centrum idem A, fietque ut involucra ſphærica hoc modo formata eandem habeant inter ſe rationem quam quadrata radiorum ſuarum ſphærarum utque in ſingulis involucris pro ratione magnitudinis numerus particularum minimarum contineatur.

Quod ſi vero involucrum ejuſmodi, puta extremum BCF ſecetur planis horizontalibus æqualiter inter ſe diſtantibus, ſcindetur ijs involucrum in partes æquales æque ac ſphærica ſuperficies, de qua ex Archimede facile hoc ita ſe habere oſtendetur [2]). Itaque figura uni iſti involucro proportionalis a latere ponenda erit rectangulum FG, parem involucro altitudinem habens adeo ut ſi ▭ hoc in totidem particulas æquales ſectum intelligatur ac involucrum BCD quadrata a diſtantijs earum ab recta LL quæ eadem ſit altitudine cum plano HH, æqualia futura ſint quadratis diſtantiarum particularum involucri BCD a plano HH. Sunt autem quadrata diſtantiarum particularum ▭i FG ab KL æqualia $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis FG [3]) una cum quadrato MK (poſito ſcilicet M centro gravitatis ▭i FG) multiplicibus per numerum particularum ipſius rectanguli. ergo et quadrata a diſtantijs particularum involucri BCF æquantur $\frac{1}{12}$ quadrati FG et quadrato MK, multiplicibus ſec. num. part. ▭i FG ſive ſec. num. part. ipſius involucri BCD. Sit recta NO quæ poſſit [4]) quadratum MK cum $\frac{1}{12}$ quadrati ab FG. Et conſtituantur ad ipſam NO complementa ſemiparabolarum ONP quarum vertices ad O, figuraque ab his compoſita ſecetur rectis baſi NP parallelis, quæ dividant axem NO in partes totidem æquales quot ſint in axe AC factæ a ſuperſiciebus ſphæricis. unde quidem ſegmenta figuræ OPP proportionalia erunt involucris ſphæricis ſectoris ABCD. Et ſi figura OPP in totidem particulas minimas æquales quot ſector diviſa intelligatur, erunt earum particularum totidem comprehenſæ ſegmento imo PP quot ſunt in involucro imo BCD. et in reliquis item ſegmentis ſingulis idem numerus particularum qui in involucris ordine ipſis reſpondentibus.

---

[1]) Il s'agit de la somme des „summæ duæ". C'est pourquoi Huygens met le verbe au singulier.

[2]) La proportionnalité de deux calottes sphériques, faisant partie de la même surface sphérique, avec leurs hauteurs découle aisément de la Prop. XLII du Livre I „De Sphæra et Cylindro" d'Archimède, suivant laquelle chaque calotte est égale au cercle dont le rayon est la distance du point central de la calotte à un point de son contour.

[3]) $\frac{1}{12}$ FG^2, produit de $\frac{1}{2}$ FG par $\frac{1}{6}$ FG, est le „premier rectangulum" du rectangle; il faut y ajouter MK^2 pour obtenir la grandeur cherchée. Comparez la note 2 de la p. 421.

[4]) C.à.d. dont le carré est égal à ...

Quia autem quadrata omnia diſtantiarum particularum involucri BCD à plano HH æqualia oſtendimus quadrato MK $+ \frac{1}{12}$ quadrati FG multiplicibus ſec. n. partic. involucri ipſius. Ergo et quadrata eadem diſtantiarum æqualia quoque erunt quadrato NO multiplici ſecundum num. part. ſegmenti PP. hoc eſt quadratis omnibus a diſtantijs particularum ſegmenti PP ab recta OQ baſi figuræ parallela. Eademque ratione quadrata à diſtantijs particularum quæ in ſingulis involucris à plano HH æqualia erunt quadratis a diſtantijs particularum ſegmenti reſpondentis figuræ OPP ab recta OQ. Quamobrem cum ſumma quadratorum a diſtantijs omnium particularum figuræ OPP ab recta OQ æquetur $\frac{3}{5}$ quadrati ON, ſicut cum de pyramide ageremus oſtenſum eſt [5]), etiam ſumma quadratorum a diſtantijs omnium particularum ſectoris ABCD a plano HH æquabitur $\frac{3}{5}$ quadrati ON.

Dicatur radius AC a; EC vel FG b, altitudo nempe ſuperficiei ſphæricæ BCD. Quia ergo qu. ON æquale fecimus qu. KM quæ eſt $a - \frac{1}{2}b$ et $\frac{1}{12}$ qu. FG ſive b. Erit qu. ON æquale $aa - ab + \frac{1}{3}bb$, cujus tres quintæ ſunt $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{5}ab + \frac{1}{5}bb$. quibus proinde multiplicibus per num. part. ſectoris ſphærici ABCD æqualia erit dicta ſumma quadratorum a diſtantijs omnium particularum ſectoris ejuſdem a plano AH.

Jam porro quadrata diſtantiarum a plano per axem ſectoris AC invenienda eſſent. Sed eorum ſumma facile inveſtigabitur ex ſumma jam inventa quadratorum a diſtantijs a plano AH et ex ſumma cognita quadratorum a diſtantijs a centro A, quæ æqualia ſunt $\frac{3}{5}$ qu.ⁱ AC multiplicibus ſec. num. p. ſectoris [6]). Nam ſi a ſingulis his quadratis à diſtantia alicujus particulæ a centro A auferantur ſingula illorum quæ fiunt a diſtantia ejuſdem particulæ a plano AH, manifeſtum eſt relinqui ſingula quadrata diſtantiæ ejuſdem particulæ ab axe AC. ac proinde ſi a ſumma quadratorum diſtantiarum a centro A, hoc a $\frac{3}{5}aa$, auferatur ſumma quadratorum a diſtantijs à plano AH, hoc eſt $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{5}ab + \frac{1}{5}bb$, relinquetur ſumma quadratorum a diſtantijs omnibus ab axe AC, quæ erit $\frac{3}{5}ab - \frac{1}{5}bb$. Hujus vero ſummæ quadratorum à diſtantijs ab axe, ſemiſſis eſt ſumma quadratorum a diſtantijs a plano per axem AC, ut facile intelligitur ex ijs quæ de circulo oſtendimus prop. . . [7]) ſi nempe ſector totus in ſegmenta circularia dividi intelligatur. Ergo ſumma quadratorum a diſtantijs a plano per axem erit $\frac{3}{10}ab - \frac{1}{10}bb$. quibus additis ad ſummam ſupra inventam quadratorum a diſtantijs a plano AH, nempe $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{5}ab + \frac{1}{5}bb$, fit ſumma quadratorum a diſtantijs ab axe oſcillationis per A punctum ducto, $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{10}ab + \frac{1}{10}bb$. quæ nempe multiplicia intelliguntur s. n. part. ſectoris.

Applicando itaque planum æquale his $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{10}ab + \frac{1}{10}bb$ ad intervallum inter

---

[5]) Comparez la note 2 de la p. 421.

[6]) D'après la première partie du § 1.

[7]) Il s'agit de la proposition qui constitue la deuxième partie du § 1 [Fig. 154].

centrum A et centrum gravitatis sectoris, quod est $\frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b$ [1]), fiet distantia centri oscillationis ab eodem centro A, $\frac{4}{5}a + \frac{4bb}{30a - 15b}$, hoc est quatuor quintæ radij, cum quatuor decimisquintis rectæ cujusdam, quæ sit ad sinum versum sectoris EC [2]), sicut hic ad reliquam partem diametri sphæræ. Unde si pro sectore hemisphæra fuerit, erit hæc distantia $\frac{16}{15}a$. Ut autem in alia quavis suspensione sectoris, dummodo ab axe qui sit æquidistans plano circuli BD, habeatur longitudo penduli isochroni, oportet a plano invento $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{10}ab + \frac{1}{10}bb$, auferre quadratum dictæ distantiæ $\frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b$, unde relinquitur $\frac{3}{80}aa + \frac{21}{80}ab - \frac{13}{320}bb$ rectangulum distantiarum [3]). quod nempe applicatum ad distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis quolibet [1]) dabit intervallum quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis.

Quod autem diximus centrum gravitatis sectoris distare a centro A $\frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b$ facile ostenditur diviso sectore ut fecimus in involucra concentrica, quorum singulorum centrum gravitatis altitudinem ipsorum bifariam dividit [4]).

---

[1]) C.à.d. en divisant la première grandeur par la deuxième.

[2]) La flèche EC ou b constitue le „sinus versus" de l'arc BCD, donc aussi celui du secteur.

[3]) Comparez p.e. la note 3 de la p. 419 ou la note 2 de la p. 421.

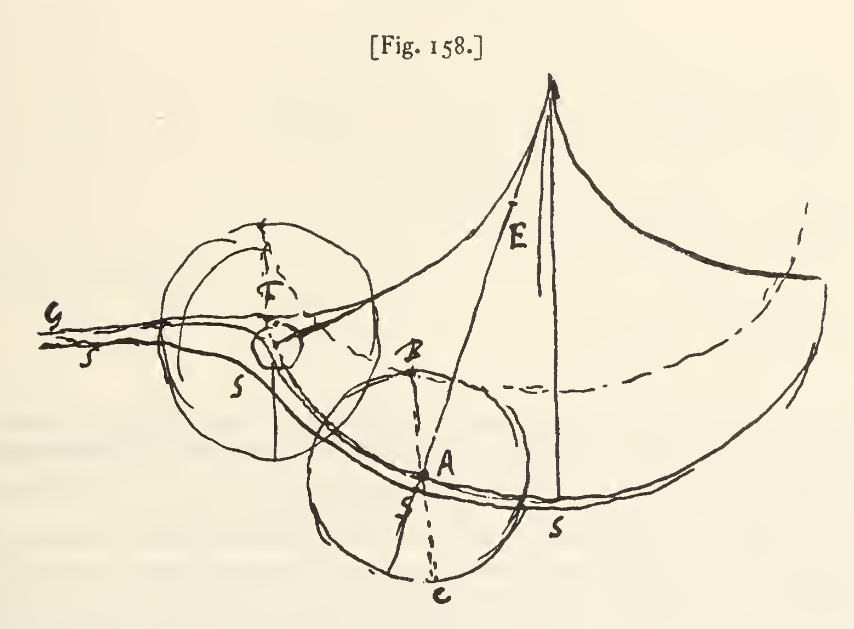
[4]) Il résulte en effet de ce théorème sur le centre de gravité d'une calotte sphérique que le centre de gravité d'un secteur sphérique coïncide avec celui d'un cône de hauteur $a - \frac{1}{2}b$ dont le centre de la sphère constitue le sommet.

APPENDICE IV

À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

1670[1]).

[Fig. 158.]



Poteſt ſphæra ſeu pondus quodcumque BC [Fig. 158] imo pendulo ita affigi ut ſit mobile circa axem A, quo fiet ut ſingula puncta ponderis ſeu particulæ deſcribant cycloides easdem. Nam ſi immobiliter affixum ſit virgæ EA, videtur ex ratione centrorum agitationis quæ continuè mutabuntur, aliqua inæqualitas timenda. quam tamen inſenſibilem puto. Nam licet linea illa centrorum agitationis ſit verbi gratia SSS, non ideo putandum ſphæram BC ea lege moveri ac ſi incederet [2]) per curvam SSS. quæ in infinitum extenditur juxta aſymptoton FG. Nunquam enim rediret [3]).

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 254 du Manuscrit D, qui porte la date du 15 janvier 1670. Comparez la Prop. XXIV de la Pars Quarta, ainsi que le paragraphe B. à la p. 46 de l'Avertissement.

[2]) Le sujet de ce verbe n'est évidemment pas la „sphaera BC" mais le „centrum oscillationis". En effet, puisque le centre d'oscillation de la sphère, suspendue a un fil impondérable, est situé au-dessous du centre de gravité de la sphère d'une longueur $\frac{2}{5}\frac{r^2}{b}$ — voir les p. 470—472 du T. XVI ou 330—333 du présent Tome —, où r est le rayon de la sphère et b la distance de son centre de gravité au point de suspension, il en résulte que théoriquement le centre d'oscillation s'éloigne à une distance infinie lorsque b s'annule. On peut supposer que le fil est attaché précisément au centre de la sphère et que, grâce a une fente infiniment étroite pratiquée dans la sphère, celle-ci peut venir s'appliquer sur la lame courbée de telle manière que le centre touche la lame exactement de sorte que la distance du point de suspension au centre de la sphère devient nulle. Lorsque dans ce cas la longueur du fil est égale à celle de l'arc entier de la cycloïde lequel possède à son extrémité F une tangente horizontale, le centre d'oscillation s'éloigne à l'infini dans une direction horizontale comme l'indique la figure.

[3]) Il n'est certes nullement permis d'admettre que dans le cas considéré le temps d'une oscillation deviendrait infini, ce qui impliquerait, du moins si l'on admet la réversibilité du mouvement, que la sphère, placée par un expérimentateur dans la position extrême dont nous avons parlé dans la note 2, ne parviendrait pas, théoriquement, à se détacher de la lame, ce qui est franchement absurde.

Quelle que soit la valeur du raisonnement de Huygens, celui-ci ne peut en tout cas pas servir pour évaluer la grandeur de la „inæqualitas timenda".

Il serait intéressant de connaître la forme des lames courbées correspondant aux oscillations tautochrones d'un corps de grandeur finie suspendu à un fil impondérable. L. Euler, dans son travail de 1753 „De Motu tautochrono Pendulorum compositorum" déjà cité dans la note 1 de la p. 46 de l'Avertissement, trouve de la courbe en question une équation différentielle qu'il ne réussit à intégrer approximativement que dans le cas où le corps est „valde ponderosum simulque minimum, ac præterea oscillationes ampliores excludantur".

APPENDICE V

À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

1670[1]).

20 Jan. 1670.

$$\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c} \infty s\ ^{2)} \infty \underline{720} \text{ debebat poni } 1440\ ^{3)}.$$

$$a \infty \frac{\frac{1}{2}b + c.\ 720}{\frac{1}{3}b + c}$$

$a \infty 722\frac{2}{5}$ vel $722{,}4$

$b \infty 1$ $\underline{\quad 2}$

$d \infty 1$ $1444{,}8$

$c \infty 50$

$s \infty 1440$. tres pedes horarij.

$a \infty 1444{,}8$

$b \infty 1$

$d \infty 1$

$c \infty 50$

$$f \infty \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$$

$$f \infty \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 72962\,p - 105061210}\ ^{4)}$$

---

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 258—260 du Manuscrit D. Elle se rapporte au réglage de la marche de l'horloge à pendule par le déplacement du petit poids curseur dont il est question aux p. 338—347 qui précèdent.

Comparez sur ce sujet les p. 424—433 du T. XVI et 105—111 du T. XVII.

[2]) Comparez l'équation $x =$ Etc. de la p. 424 du T. XVI, ainsi que la p. 340 du présent Tome, où les notations sont les mêmes qu'ici.

[3]) Dans la suite Huygens prend en effet 1440 pour la longueur du pendule isochrone avec le pendule ne portant pas encore le poids curseur, comme il le fait aussi à la p. 345 de l'„Hor. osc." Comparez la note 1 de la p. 432.

[4]) Ces formules (où f désigne la distance du poids curseur au point de suspension et p la longueur du pendule isochrone lorsque le poids curseur se trouve quelque part sur la verge du pendule considéré) et la table qui suit s'accordent avec celles des p. 344—347 qui précèdent.

1440 } s. $\frac{1}{4}$ 1439,75	ratio 1440 ad 1439,75 duplicata facit 1440 ad 1439,50. *p* ∞ 1439,50 ut 15″ acceleretur. . . . . [1]) 7,0 lineæ pedis horarij.

---

p ∞ 1439, ut 30″ acceleretur.

. . . .

15,2 lineæ pedis horarij. et ſic ubique.

---

p ∞ 1438,50	ut 45″ acc. . . .	23,70	partes à centro oſcillationis [2])
p ∞ 1438	ut 1′ accel. . . .	32,55	ſurſum accipiendæ, in decimis
p ∞ 1437,50	ut 1′,15″ acc. . . .	41,91	linearum pedis horarij [3]).
p ∞ 1437	ut 1′,30″ acc. . . .	51,75	
p ∞ 1436,50	ut 1′,45″ accel. . . .	62,21	
p ∞ 1436	acc.° 2′	73,44	acceleratio horologij ſpatio 24
p ∞ 1435,50	acc. 2′,15″	85,605	horarum.
p ∞ 1435	acc.° 2′,30″	99,03	
p ∞ 1434,50	acc. 2′,45″	114,105	
p ∞ 1434	acc.° 3′	131,85	
p ∞ 1433,50	acc.° 3′,15″	154,35	
p ∞ 1433	acc. 3′,30″	192,612	
p ∞ 1432,50	. . . .	non poteſt.	

---

[1]) Nous omettons les calculs.

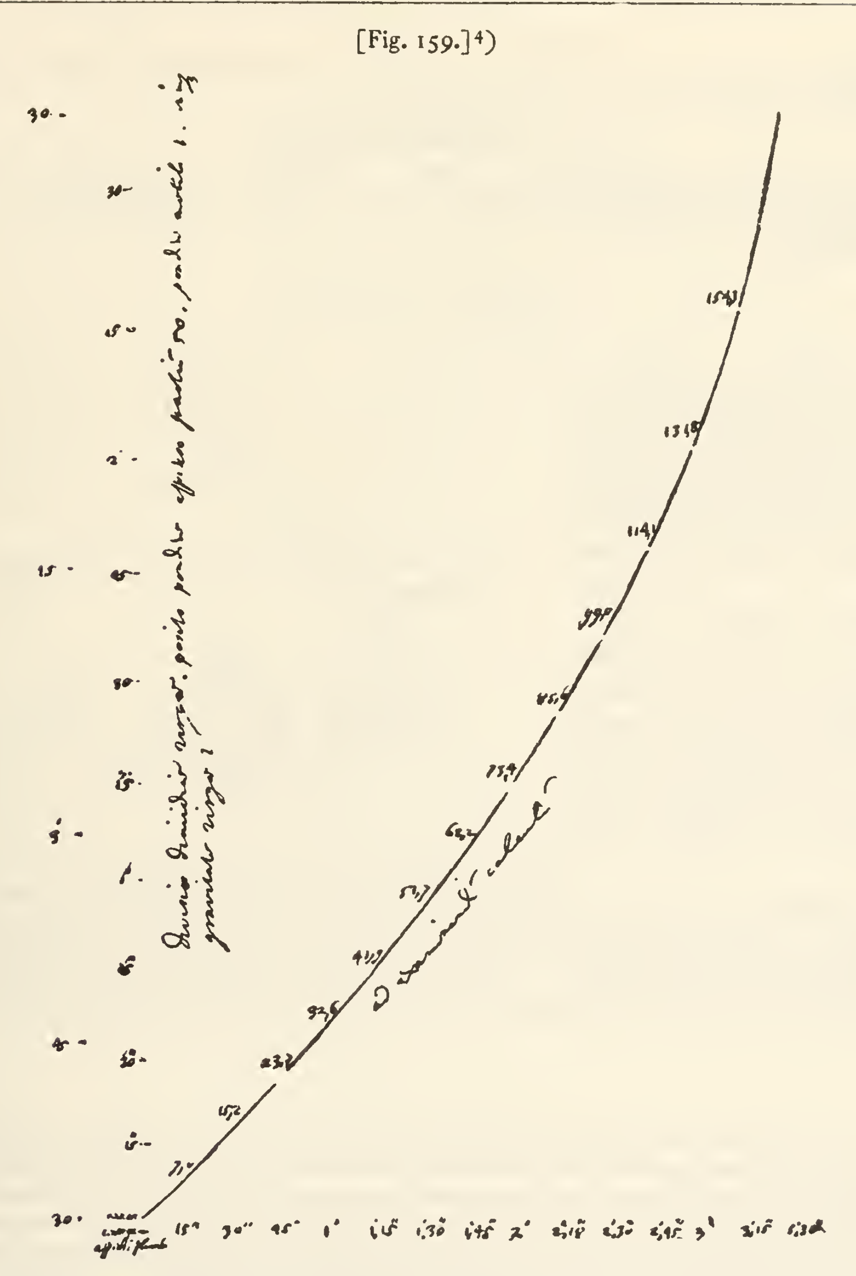
[2]) C.à.d. à partir du centre d'oscillation du pendule dépourvu du poids curseur.

[3]) Ou plutôt: in lineis pedis horarii.

[4]) La Fig. 159 est la reproduction, à une échelle de 0,6, de la figure de Huygens qui se trouve sur une feuille détachée du Manuscrit D. La courbe et les chiffres de la ligne horizontale correspondent à la table qui précède. Les chiffres écrits près de la courbe, qui donnent les ordonnées, représentent en lignes du pied horaire les distances du poids curseur au centre d'oscillation fixe indiqué sur le pendule, lorsque la marche de l'horloge doit être accélérée de 15″, 30″ etc. par 24 heures. Les deux colonnes verticales à gauche représentent ces mêmes distances à plus grande échelle, c.à.d., dans la figure de Huygens, en grandeur absolue: il faut supposer la colonne à gauche placée au-dessus de l'autre. Ces colonnes correspondent à deux des trois colonnes (ou parties du pendule) de la Fig. 17, IV de la p. 71.

On lit dans la Fig. 156: ad examinandum calculum — divisio dimidiæ virgæ, posito pondere appenso partium 50, pondere mobili 1, itemque gravitate virgæ 1. — centrum oscillationis — centrum gravitatis appensi plumbi.

[Fig. 159.][4])



Le pied de Paris moins 5 lignes fait le pied de Rijnland. d'ou il s'ensuit que celuy de Paris est a celuy de Rhijnl. comme 144 ad 139.

Le pendule de secondes est de 3 pieds $8\frac{1}{2}$ lignes de Paris. que je pose egal a 3 pedes horarij, d'ou s'en suit que 3 pd. 2 pou. $\frac{3}{10}$ de lign. de Rijnl. font les mesmes 3 pieds horaires.

pd. lig. po

139 —— 144 —— 3. o. $8\frac{1}{2}$ ou 36,708 / 38,029 pollices Rijnl. longitudo penduli fecundorum feu 3 pedum horariorum.

3 ped. chron.

1440 ——— 1444,8 [1]) ——— 432 / 433,44 1,44 lig. diftantia centri ofcillationis a centro gravitatis penduli compofiti [2]).

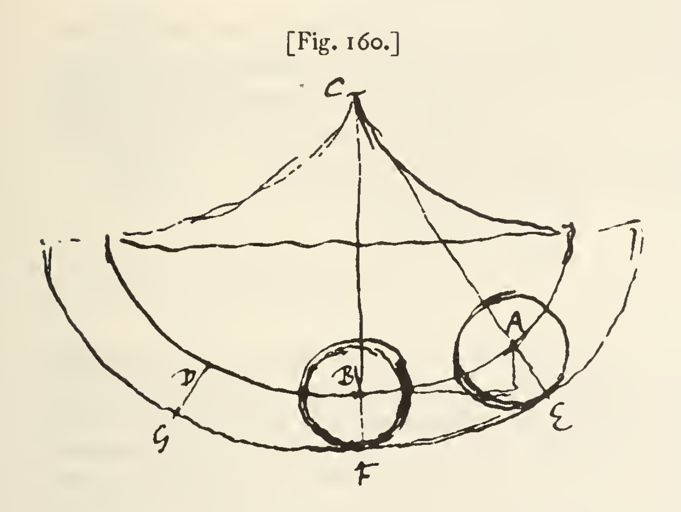
[1]) C'est le rapport de la longueur du pendule isochrone (note 3, p. 429) à celle du pendule réel ou plutôt à celle du pendule idéalisé (considéré comme identique avec le pendule réel) composé d'une verge pondérable et d'un poids punctiforme à son extrémité inférieure, la longueur *a* de ce pendule idéalisé étant la distance du point de suspension au poids punctiforme. La longueur du pendule isochrone est égale par hypothèse à trois „pedes horarii" ou „pedes chronici", comme Huygens écrit ici, c.à.d. à 3 × 144 ou 432 lineæ pedis horarii.

[2]) Cette distance de 1,44 linea pedis horarii du centre d'oscillation au centre de gravité du pendule idéalisé (évidemment dépourvu du poids curseur) est la distance CA dans la Fig. 17, IV de la p. 71. Comme la note précédente l'indique il faut prendre ici *cum grano salis* l'expression „centrum gravitatis penduli compositi". À la p. 115 qui précède Huygens parle à propos de la Fig. 17, IV du „centrum gravitatis ponderis X".

APPENDICE VI

À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1692 ou 1693][1].



[Fig. 160.]

Pendulum pondus cujus centrum gravitatis A [Fig. 160] per Cycloidem delatum AB, acquirit in puncto B infimo celeritatem qua per arcum BD æqualem BA ascendat.

Si vero annulus gravitate præditus, et tamen ut peripheria simplex consideratus volvatur in paracycloide [2]) EF, ita ut centrum ejus describat cycloidis portionem AB, is quoque vim collegit, ubi in B pervenit, qua ascendat revolvendo usque in D.

Sed quia in B transiens æqualis motus quantitas est circa centrum in partibus ipsum constituentibus, ac in ijsdem motu horizontali pergentibus per præcedentem [1]), necesse est dimidium virium acquisitarum revolutione per EF, cessisse in motum circulationis circa centrum annuli, dimidium vero reliquum in motum horizontalem annuli totius [3]).

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 171 (numération de Huygens) du Manuscrit H. Les dates du 18 déc. 1692 et du 31 janvier 1693 se trouvent respectivement aux p. 155 et 172. La feuille 169—170 a été enlevée par Huygens qui a noté sur la p. 171 : „j'ay dechirè icy une feuille". Celle-ci contenait sans doute des considérations ou des calculs relatifs à la présente Pièce puisque les mots „per præcedentem" du troisième alinéa s'y rapportent évidemment.

[2]) La paracycloïde est donc une courbe parallèle à la cycloïde, c.à.d. un lieu de points à égales distances d'elle.

[3]) Apparemment Huygens admet ici que pour un corps donné une chute d'une hauteur déterminée de son centre de gravité produit, lorsque tout frottement ou résistance du milieu fait défaut, une quantité déterminée de „vires" quelle que soit le mouvement du corps. La suite fait voir que les „vires" considérées sont pour toute particule du corps proportionnelles au

Ergo annulus ad B delatus habet in motu horizontali dimidium virium quas haberet si absque ulla revolutione ex filo pendens venisset: hoc est, habet vires quibus ascendere possit per dimidiam altitudinem arcus AB. Quam ob rem celeritatem horizontalem habebit quæ sit ad celeritatem horizontalem descendentis ut pendulum, sicut 1 ad $\sqrt{2}$, ut notum ex legibus ascensus. Sed ijsdem rationibus in quovis loco portionis ABD ostenditur eandem esse rationem lationis centri ex revolutione acquisitæ, ad lationem quem penduli formâ descendens vel ascendens haberet. Ergo tempus totius revolutionis annuli per curvam EG, erit ad tempus vibrationis penduli per arcum AD, quæ $\sqrt{2}$ ad 1, seu proxime quæ 7 ad 5.

Pro pendulo annulo melius accipietur, pondus velut punctum in A centro filo affixum. Nam ipse annulus paulo lentiores vibrationes habebit quam pondus in puncto A collectum, quoniam aliqua particula virium absumpta est in conferendo motu exiguo circa centrum quo radius ex positu AE venit in BF. qui motus juvat rursus in ascensu, quod continuatus conatur disponere radium ex situ BF in DG [1]).

---

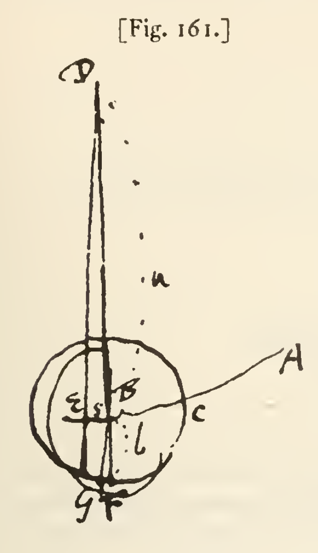
carré de la vitesse. Comparez le passage de 1690 que nous avons cité dans le troisième alinéa de la note 6 de la p. 359 du T. XVI. D'ailleurs Huygens parlait déjà en 1661 de la „vis motus" proportionnelle au carré de la vitesse: voir le troisième alinéa de la p. 376 du T. XVI. Le principe admis ici n'est qu'une forme différente de celui de 1659 (T. XVI, p. 357 et 385—391). La „force ascensionelle" totale du corps doit être telle que lorsque chacune de ses particules s'élève à la plus grande hauteur possible, le centre de gravité de toutes les particules se trouve à la hauteur d'où est descendu le centre de gravité du corps partant du repos.

Huygens commence prudemment par considérer un cas particulier, le plus facile de tous, celui où le corps qui descend en roulant est un cylindre ou plutôt un simple anneau infiniment mince („peripheria simplex"). En effet, il n'est pas de toute évidence que la $\sum mv^2$, où v représente la vitesse totale par rapport à la terre (considérée comme immobile) d'une particule de masse m, peut être décomposée en une somme de deux termes dont l'un représente la „force vive", pour nous servir de l'expression de Leibniz (T. XVI, p. 359, note 6) du mouvement progressif et l'autre celle du mouvement de rotation. Voir la note suivante.

Huygens commence par établir qu'aù point le plus bas la „motus quantitas" de l'anneau est composée de deux parties égales, correspondant aux deux mouvements nommés. Apparemment il désigne ici par „motus quantitas", contrairement à l'usage ancien (T. XVI, p. 359), la somme $\sum mv^2$ et non pas $\sum mv$: pour cette dernière la somme des deux $\sum$ partielles (elles aussi égales l'une à l'autre) ne donne pas la $\sum$ totale. La décomposition de la „force vive" en deux parties égales s'étant montrée possible pour le cas de l'anneau roulant, et cela non seulement au point le plus bas mais aussi partout ailleurs, Huygens en tire la conclusion que le mouvement est $\sqrt{2}$ fois plus lent que lorsqu'il n'est que progressif, ce qui est approximativement le cas lorsque l'anneau est suspendu à un long fil.

[1]) La décomposition de $\sum mv^2$ en deux parties égales s'applique, dans le cas de l'anneau, à un mouvement progressif ou de translation le long d'une partie infiniment petite de la courbe cycloidale, et à un mouvement de rotation autour du centre de l'anneau.

[Fig. 161.]



Ut s [Fig. 161] ad $\frac{sb}{a}$, hoc eſt ut a ad b ita celeritas motus horizontalis impreſſus toti ſimul annuli circumferentiæ, ad celeritatem eidem impreſſam motu circa centrum. ad quos motus imprimendos oportet vires inſumi quæ ſint ut aa ad bb. ac proinde ſi totæ vires deſcenſu arcus acquiſitæ ſint $aa + bb$ erunt inſumtæ vires in motum horizontalem aa. à quibus et aſcenſus producitur aa, ſi totus aſcenſus ad altitudinem arcus ſit $aa + bb$. Hinc celeritas horizontalis annuli in B ad celeritatem penduli ſimplicis DB ut a ad $\sqrt{aa + bb}$. Et rurſus longitudo penduli quod ſit annulo iſochronum erit ad DB ∞ a ut $aa + bb$ ad aa. hoc eſt ut $a + \frac{bb}{a}$ ad a. Eoque iſta longitudo erit $a + \frac{bb}{a}$. Quod convenit cum noſtris de centro oſcillationis. Idque hic obiter examinare volui.

Hinc nova demonſtratio centrorum oſcillationis inveniri poteſt [2]).

Voir encore au sujet de cet Appendice la fin de notre aperçu de la „Controversia" à la p. 466 qui suit.

On a généralement, en désignant par v_x la projection de v sur un axe X:

$$\Sigma m v_x^2 = \Sigma m . v_{o_x}^2 + \Sigma m\left(v_x - v_{o_x}\right)^2;$$

v_{o_x} est la projection sur le même axe de la vitesse v_o du centre de gravité du corps considéré.

En ajoutant les équations de ce genre correspondant à trois axes rectangulaires entre eux, il en résulte

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m . v_o^2 + \Sigma m \left[\left(v_x - v_{o_x}\right)^2 + \left(v_y - v_{o_y}\right)^2 + \left(v_z - v_{o_z}\right)^2 \right],$$

c.à.d. la force vive totale — nous pouvons, suivant la pensée de Huygens, considérer comme „force vive" le produit de $\Sigma m v^2$ par un facteur λ indéterminé, comme nous l'avons fait aux p. 22 et suiv. du T. XVI — est égale à celle du corps considéré comme se mouvant en entier

avec la vitesse du centre de gravité + la force vive résultant du mouvement par rapport au centre de gravité. Huygens avait peut-être établi ce théorème général, sans que la forme de sa démonstration lui plût. Peut-être aussi s'était-il borné au cas où tous les points du corps se meuvent parallèlement à un même plan.

Le théorème implique, comme Huygens le dit, que le mouvement roulant de l'anneau est $\sqrt{2}$ fois plus lent que celui (c'est le cas considéré dans l'Appendice IV qui précède) d'une translation parallèle le long de la courbe cycloïdale. Mais dans le cas de la translation parallèle la $\sum mv^2$ totale reste la même lorsqu'on suppose la masse de l'anneau concentrée en son centre, puisque cette somme ne dépend que de la masse et de la descente du centre de gravité. Or, lorsque le corps est punctiforme on peut tout aussi bien le supposer attaché au fil impondérable de manière à accomplir une oscillation ordinaire, puisque la force vive de la rotation d'un point (comparez la note 2 de la p. 421 qui précède) est négligeable.

[2]) En effet, Huygens eût pu démontrer de cette façon la formule générale de la Pars Quarta, non seulement pour l'anneau mais pour un corps quelconque. Dans le cas de l'oscillation ordinaire sans roulement considérée dans l',,Hor. osc." la formule de la note précédente se réduit, après une division par le carré de la vitesse angulaire, à

$$I = Mb^2 + I',$$

relation déjà considérée à la p. 47 de l'Avertissement. Remarquons que b désigne ici la distance du point de suspension au centre de gravité, laquelle est appelée a dans la Fig. 161. La force vive totale est proportionnelle à I. Elle se compose de la force vive, proportionnelle à Mb^2, de la translation du corps concentré en son centre de gravité et de la force vive, proportionnelle à I', de la rotation du corps autour de ce centre. La force vive totale du mouvement est par conséquent à la force vive de la translation dans le rapport $I : Mb^2$ ou $1 + \frac{I'}{Mb^2} : 1$. Comme dans le cas de l'anneau, le pendule quelconque considéré se meut donc plus lentement que si son poids était concentré en son centre de gravité, auquel cas la force vive totale — comparez la fin de la note 1 — serait une force de translation. Le carré de la période du pendule réel est à celui de la période du pendule simple fictif de longueur b comme $1 + \frac{I'}{Mb^2} : 1$. Il en résulte que la longueur l du pendule simple isochrone avec le pendule réel est à b dans ce même rapport.

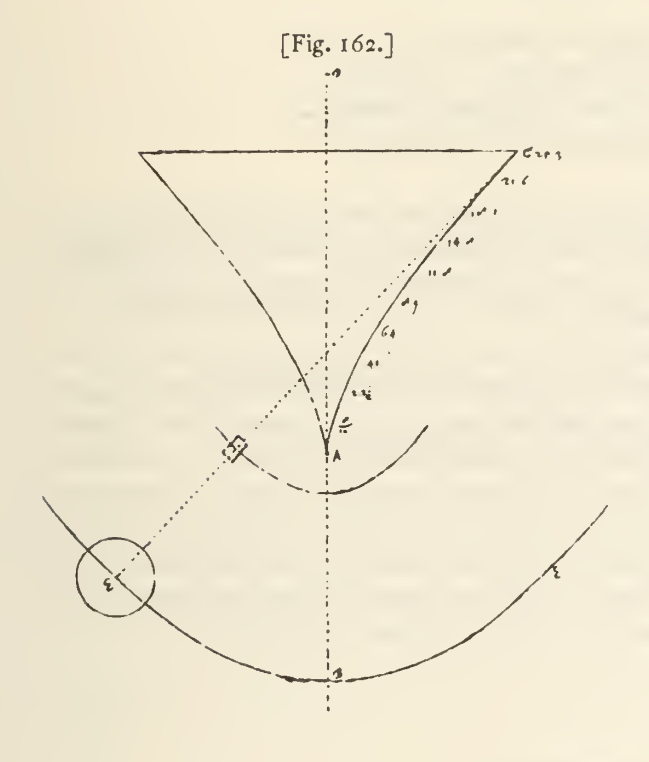
Lorsqu'on prend $I' = M\rho'^2$, la proportion $l : b = 1 + \frac{I'}{Mb^2} : 1$ se réduit à $l = b + \frac{\rho'^2}{b}$, conformément à la formule de la p. 48 de l'Avertissement.

APPENDICE I

À LA PARS QUINTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1667—1668.][1)]

[Fig. 162.]



$\frac{801}{100}$ pollicis, latus rectum paraboloidis.

AB [Fig. 162] ∞ $\frac{8}{27}$ lateris recti paraboloidis AC ∞ $\frac{1}{2}$ latus rectum parabolæ BE.

AD $\frac{1}{2}$ latus rectum paraboloidis AC. divisum in 50 partes.

AB ∞ 2,38 pollicis Rhenolandici. AD ∞ 4 poll. [2)] ∞ $\frac{1}{2}$ l. r. paraboloidis.

[1)] La Pièce est empruntée à la p. 215 du Manuscrit C. Les p. 203 et 231 portent respectivement la date du 5 septembre 1667 et du 25 février 1668.

Nous ne reproduisons pas les calculs numériques. Les chiffres écrits auprès de la „paraboloïde" font bien voir que celle-ci a été construite par points. La figure semble indiquer que les horloges à pendule conique étaient elles aussi pourvues d'un poids curseur (ou „poids coulant" suivant l'expression de Huygens; voir p. e. la p. 155 du Manuscrit C).

[2)] Dans la Fig. 162 originale AD a une longueur d'environ 10,45 cm. Il en résulte pour le pied rhénan une longueur d'environ 31,35 cm, ce qui correspond à la valeur 31,39 adoptée à la p. 280 du T. XVI.

APPENDICE II

À LA PARS QUINTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[?]

Horologij Oſcillatorij Pars V.
Conſtructionem aliam, ex circulari
pendulorum motu deductam, continens;
Et Theoremata de Vi Centrifuga.

[Le texte de ce manuſcrit diffère en quelques endroits du texte imprimé (p. 360—365). Par exemple, au lieu du mot „pertractavimus" de la l. 1 de la p. 361 le manuſcrit a: „exſecuti ſumus". Les autres variantes, aſſez rares d'ailleurs, ſont preſque toutes également inſignifiantes [2]).

Après les mots „conſtructa automata" de la l. 10 de la p. 361 le manuſcrit intercale: „cujus rei gratia [c.à.d. à cauſe de l'abſence de tout bruit] ab aliquibus expetita fuiſſe memini". Au lieu des mots „conſtructa fuere" des l. 6—7 de la page nommée le manuſcrit qui donne la même leçon avait primitivement l'expreſſion „conſtructa vidimus" [3]), ce qui porte à croire que les horloges à pendule conique ne furent pas toutes conſtruites comme celle de 1668 (voir la p. 267 du T. VI citée à la p. 10 qui précède) ſous la direction perſonnelle de Huygens. Toutefois cette expreſſion n'implique pas qu'un autre inventeur aurait trouvé la même choſe indépendamment de lui: comparez le mot „vidimus" de la l. 17 de la p. 63 du T. XVII [4]).]

---

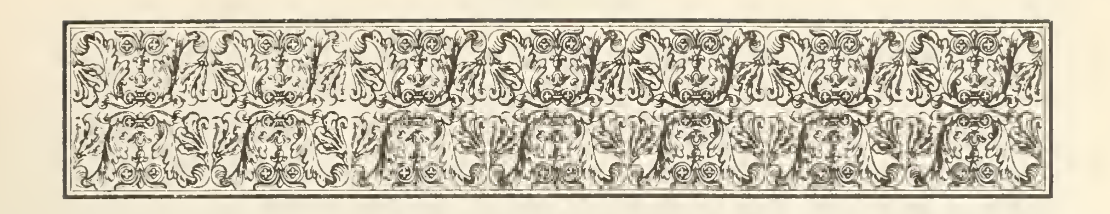
[1]) Cet Appendice est emprunté aux f. 134 et suiv. des Chartæ mechanicæ.

[2]) Notons que le dernier alinéa de la p. 365 qui précède fait défaut dans le manuscrit et que dans la Prop. XII sur la force centrifuge (T. XVI, p. 318) le manuscrit omet à tort les mots „pondere æqualia".

[3]) Toutes les corrections sont, comme le texte primitif, de la main de Huygens.

[4]) Le mot „vidimus" se trouve également dans la l. 2 de la p. 73 du T. XVII; en cet endroit-là il s'agit d'une construction dont le mérite ne revient pas à Huygens mais à S. Coster.

OBJECTIONS DE ROBERVAL CONTRE LES DÉMONSTRATIONS DE L'AUTEUR DE L',,HOROLOGIUM OSCILLATORIUM" ET RÉPONSES DE HUYGENS.



Avertiſſement.

Les principes dont Huygens part dans ſon „Horologium oſcillatorium" donnèrent lieu à de célèbres controverſes.

Parmi les lecteurs compétents beaucoup ſans doute ſe contentèrent d'admirer l'œuvre; témoin les paroles de Viviani citées par Huygens à la p. 51 du Manuſcrit E:

≪ Vinc. Viviani nel ragguaglio delle ultime opere del Galileo. 1674 [1]).

„La medeſima paſſione volle ancora con ſottiliſſimo progreſſo autenticare quel ſublime ingenio di Chriſtiano Ugenio nella opera ſua due anni ſono [2]) publicata e con ſtupor de' Matematici applaudita, trattante del moto de' Pendoli".

C'eſtoit de demontrer que les viteſſes acquiſes par des plans diverſement inclinez, mais d'egale hauteur perpendiculaire, ſont egales [3]) ≫.

---

[1]) Il s'agit de l'ouvrage de Viviani, intitulé „Quinto libro degli Elementi d'Euclide, ovvero Scienza Universale delle Proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo, con nuov'ordine distesa, e per la prima volta pubblicata da Vincenzio Viviani ultimo suo Discepolo. Aggiuntevi cose varie, e del Galileo, e del Torricelli; I Ragguagli dell' ultime Opere loro, con altro, che dall' Indice si manifesta. All' Altezza Sereniss.ma e Reverendiss.ma del Signor Principe Cardinale de' Medici". In Firenze; alla Condotta, MDCLXXIV. Les paroles citées (Viviani écrit: „ingegno" et „pubblicata") s'y trouvent à la p. 100. Huygens reçut le livre de Viviani en 1676; voir les p. 9 du T. VIII, 471 du T. IX et 292 du T. X.

[2]) Comparez sur l'expression *due anni ſono* le deuxième alinéa de la p. 64 qui précède.

[3]) Huygens démontre cette égalité pour un point pesant, dans la Prop. VI de la Pars Secunda (voir

Toutefois la critique elle auſſi — comment en eût-il pu être autrement? — ne tarda pas à ſe faire jour. Ce qui paraît être reſté inconnu à tous ceux qui s'y ſont intéreſſés, p. e. à J. L. Lagrange [1]), ainſi qu'à nous-mêmes [2]), c'eſt que les premières objections furent faites par Roberval. Ces objections, datant déjà de 1670, furent inſcrites par Huygens, avec ſes réponſes, dans le Manuſcrit D. Comme nous l'avons dit à la p. 36 qui précède, une partie des théorèmes avaient été rédigés en 1670. Huygens, rétabli de ſa maladie (p. 36) et n'ayant pas encore quitté Paris, paraît les avoir communiqués à Roberval ainſi que, peut-être, à quelques autres membres de l'Académie. La réponſe à la 7ième objection fait voir qu'il a apporté enſuite un changement au début de la Pars Quarta; il a ſupprimé la deuxième des *trois* hypothèſes qui s'y trouvaient primitivement [3]).

Ces objections amènent le lecteur à ſe demander quelles étaient en général les opinions de Roberval mécanicien. Malheureuſement nous n'en ſommes pas très bien informés, l'ouvrage principal de Roberval ſur la mécanique, qui comme beaucoup d'autres de ſes écrits n'avait pas été imprimé durant ſa vie, étant perdu [4]). Nous

---

la p. 141 qui précède). Nous avons remarqué (troisième alinéa de la p. 39) que Huygens y fait déjà usage de l'Hyp. I de la Pars Quarta, comme il le fait d'ailleurs aussi dans la Prop. IV de la Pars Secunda (dernières lignes de la p. 135).

Aux p. 99 et 100 Viviani raconte qu'en étudiant la „scienza de' moti naturali nuovamente promossa dal Galileo, e che allora appunto era uscita in luce" il s'était demandé s'il n'était pas possible de donner une démonstration du „supposto, che le velocita de' mobili naturalmente descendenti per piani d'una medesima elevazione sieno uguali tra loro". Son instituteur, le P. Clemente di S. Carlo, l'introduisit chez Galilée qui s'appliqua à donner cette démonstration. Galilée la lui dicta et des copies en furent envoyées à plusieurs personnes, e. a. à Benedetto Castelli; voir la lettre du 3 décembre 1639 de Galilée à ce dernier (Ed. Naz. T. XVIII, p. 125). C'est la Pièce, dit Viviani, „che io ... somministrai all' ultima impressione di tutte l'opere di lui fatta in Bologna nel 1656, come quivi si vede a facce 132 del Terzo Dialogo". Il dit ensuite que E. Torricelli „confermò dipoi" cette proposition dans son Trattato de' Moti, quando non aveva avuto notizia ancora di quella di esso Galileo". Après avoir parlé de Huygens, Viviani ajoute finalement qu'une démonſtration fut également donnée par Alessandro Marchetti de Pise.

Comparez sur la démonstration de Galilée la remarque de Huygens et la note 2 à la p. 141 qui précède.

[1]) Voir la Section I de la Seconde Partie de sa „Mécanique analytique" de 1788, citée aussi in extenso dans le travail suivant (note 2).

[2]) „Christiaan Huygens et Jean le Rond d'Alembert" dans le périodique „Janus, Archives internationales pour l'Histoire de la Médecine etc." (Leyde, E. J. Brill) de 1915.

[3]) Comparez la note 1 de la p. 38 qui précède.

[4]) En 1650, Roberval écrit à Hevelius (lettre imprimée dans „Huygens et Roberval, documents

ignorons auſſi, ce qui eſt particulièrement regrettable, ſi Huygens avait reçu en 1665 ou plus tard un „traitè de Roberval des pendules iſochrones" (voir la note 3 de la p. 54 qui précède) et en quelle manière Roberval a parlé en ou vers 1671 à l'Académie des Sciences ſur les centres de percuſſion [5]). Cependant la remarque de Huygens de 1693 (ſeptième alinéa de la p. 402 du T. X) fait voir que fort probablement Roberval n'a rien dit de bien important. Selon P. Tannery en 1666 il était „déjà éteint" [6]). Il eſt vrai que F. Vernon dit de lui en 1670 [7]) qu'il ne publie rien mais qu'à l'Académie il „diſcourſeth much & is a very plauſible ſpeaker and of acute reaſoning".

Roberval, nous l'avons dit à la p. 352 du T. XVI, avait trouvé dès 1646 la place du „centre de percuſſion ou d'agitation" dans le cas d'un ſecteur de cercle tournant dans ſon plan autour d'un axe paſſant par le centre du cercle. Il n'était pourtant pas convaincu, ne voyant apparemment aucune raiſon théorique pour l'admettre, que le centre de percuſſion fût identique avec le centre d'oſcillation. Il inclinait plutôt à croire — ce que ſon ami Merſenne jugeait auſſi poſſible (T. XVI, p. 351) — que cette identité n'exiſte qu'à peu près.

Or, qu'eſt-ce en ſomme que le centre de percuſſion? Nous avons vu (p. 57, note 6) que Fabry dit que lorſqu'un obſtacle arrête le corps au centre de percuſſion, il perd tout ſon mouvement et que ce centre (p. 56) eſt ſitué ſur une droite D telle que les moments de tous les „impetus" ou quantités de mouvement de part et d'autre de cette droite ſont égaux. Cette dernière formule eſt claire dans le cas d'une ſurface plane ſymétrique tournant autour d'une droite ſituée dans ſon plan et perpendiculaire à ſon axe de ſymétrie; d'après les exemples que Fabry (ou Mouſnier) en donne la droite D eſt alors une parallèle à l'axe de rotation et le centre de percuſſion occupe

---

nouveaux" par C. Henry, Leyde, E. J. Brill, 1879; Henry ajoute, p. 35, note 2, que l'original de la lettre a disparu) avoir achevé un traité de mécanique en huit livres; le dernier traitait „de centro percussionis potentiarum mobilium".

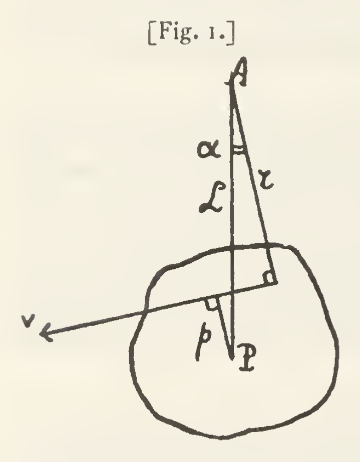
[5]) „Regiæ Scientiarum Academiæ Historia" Sec. ed. Autore J. B. du Hamel, Parisiis, J. B. Delespine, 1701, p. 98 (Cap. II de la Sectio Septima „De his quæ acta sunt annis 1670, 1671, & 1672. quæque ad Mathesim spectant): „Ac primum quidem de centro percussionis quod inter præcipua hujus scientiæ fundamenta numeratur, D. de Roberval fusè & subtiliter disseruit."

[6]) „Les Sciences en Europe 1648—1715", Ch. X (p. 396) du T. VI de l'„Histoire générale du IVe siècle à nos jours" de Lavisse et Rambaud.

[7]) Notre T. VII, p. 8.

évidemment ſur elle une ſituation centrale. Cependant Fabry ſemble vouloir donner une définition *générale*. Formulée correctement, celle-ci devrait être la ſuivante [1]): „Lorſqu'un corps ſuſpendu en un point tourne autour d'un axe paſſant par ce point, le centre de percuſſion ſe trouve ſur une parallèle à cet axe telle que la ſomme algébrique des moments des quantités de mouvement de tous les points du corps autour de la parallèle eſt nulle; on ſuppoſe le corps arrêté par l'obſtacle à l'inſtant où ſon centre de gravité eſt auſſi bas que poſſible; le point de ſuſpenſion, le centre de gravité et le centre de percuſſion ſont alors par hypothèſe ſitués ſur une même ligne droite."

[Fig. 1.]



Suppoſons l'axe de rotation, paſſant par le point de ſuſpenſion A, perpendiculaire au plan du papier [Fig. 1]. Soit p la plus courte diſtance de la parallèle à l'axe A paſſant par le centre de percuſſion P et du vecteur repréſentant la viteſſe v d'un point quelconque ſitué à la diſtance r de l'axe A. Soit AP, ſitué dans le plan du papier $= L$. Il faut ſuivant notre définition que $\Sigma mvp = 0$, m étant la maſſe d'un point; ou bien $\Sigma mrp = 0$, puiſque la viteſſe angulaire eſt, à un inſtant quelconque, la même pour tous les points. Le bras de levier p eſt poſitif pour les moments agiſſant dans un ſens, négatif pour ceux qui agiſſent dans l'autre.

Or, on a pour tous les points du corps

$$p = L \cos\alpha - r.$$

En ſubſtituant cette valeur de p dans la formule précédente, on obtient

$$L = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma mr.\cos\alpha}$$

ou $L = \frac{\Sigma mr^2}{Mb}$, M étant la maſſe totale et b la diſtance du centre de gravité du corps au point A en vertu de l'hypothèſe faite ſur l'inſtant et la place de l'arrêt [2]). Ainſi

---

[1]) On peut supposer avec Fabry (p. 56, note 4) que pour pouvoir arrêter le corps précisément au centre de percussion, on y ait pratiqué une fente ou un canal fort étroit.

[2]) Généralement, si l'on oppose l'obstacle au corps oscillant en un point choisi de telle manière que l'équation $\Sigma mrp = 0$ est vérifiée, $\Sigma mr \cos\alpha$ sera le produit de M par la projection du

défini, le centre de percuſſion coïncide donc avec le centre d'oſcillation. Nous avons remarqué (p. 58) qu'en 1664 — tout auſſi bien qu'en 1690, p. 462 du T. IX — Huygens ſemble admettre généralement cette identité des deux centres [3]) puiſqu'il dit que Fabry, cherchant le centre de percuſſion pour un cercle oſcillant *dans ſon plan*, aurait dû trouver ce centre à une diſtance de $\frac{3}{4}$ du diamètre du point de ſuſpenſion, c.à.d. à l'endroit qu'occupe, ſuivant le calcul de Huygens, le centre d'oſcillation [4]). Il eſt vrai qu'on peut également ſuppoſer qu'en 1664, partant d'une définition telle que celle donnée ici, Huygens n'ait calculé la ſituation du centre de percuſſion que pour le cas du cercle (et peut-être pour quelques autres ſurfaces oſcillant dans leur plan); mais cela paraît plus difficile que d'établir la formule générale et on n'en trouve rien dans les manuſcrits.

Nous ignorons ſi Roberval eſt parvenu, ſoit avant ſoit après avoir vu la formule générale de Huygens pour le centre d'oſcillation, à une formule identique pour le „centre de percuſſion ou d'agitation" [5]). La 13ième et 14ième objection font voir qu'il admet que les propoſitions de Huygens de la Pars Quarta, nommément la Prop. IV, c.à.d. celle qui donne la formule générale pour le centre d'oſcillation, ſont „forſan veræ", mais qu'il les ſuppoſe découvertes par l'expérience et pourvues enſuite de „demonſtrationes qualescunque". Nous croyons pouvoir en conclure que Roberval,

centre de gravité sur le plan passant par l'axe de rotation et le point considéré. Il en résulte que le lieu de tous ces points (on peut dire: de tous ces centres de percussion) dans le corps est un plan passant par le centre principal de percussion (simplement appelé centre de percussion dans le texte) et perpendiculaire à la droite qui joint le point de suspension à ce dernier centre. Remarquons en passant qu'en se heurtant à l'obstacle le corps ne perdrait pas en général tout son mouvement.

[3]) On voit que le calcul du texte est exactement le même soit qu'il s'agisse d'un corps oscillant ou d'une surface oscillant dans son plan.

[4]) Le calcul de Fabry (ou de Mousnier) dans le cas du cercle oscillant ainsi que dans celui des corps n'est pas bien clair. Comparez la remarque de Mersenne à la p. 446 qui suit. Il est évident que s'il était parti de la définition générale donnée dans le texte et s'il avait réussi à faire un calcul correct, il aurait dû trouver dans tous les cas un centre de percussion identique avec le centre d'oscillation de Huygens.

[5]) J. L. Lagrange dans le passage cité dans la note 1 de la p. 442 dit: „les géomètres continuèrent à supposer tacitement que le centre de percussion était le même que celui d'oscillation et Huyghens fut le premier qui envisagea ce dernier centre sous son vrai point de vue; aussi crut-il devoir regarder ce problème comme entièrement neuf, etc.". On a vu que, du moins jusqu' à 1670, Roberval n'était pas convaincu de l'identité des deux centres; comparez la note 2 de la p. 352 du T. XVI.

s'il n'était pas tombé lui-même — rien ne l'indique — ſur la formule générale pour le centre de percuſſion, croyait du moins — après avoir vu la formule de Huygens pour le centre d'oſcillation — à la poſſibilité de trouver pour le centre de percuſſion une formule identique, de ſorte qu'il ſoupçonnait que Huygens avait en réalité établi ſa formule *pour le centre de percuſſion* et que, conſtatant expérimentalement, comme Merſenne et d'autres, que dans quelques cas ce centre coïncide, abſolument ou à peu près, avec le centre d'oſcillation, il avait *enſuite* adroitement choiſi certaines hypothèſes douteuſes afin d'arriver ainſi à une formule du centre d'oſcillation identique avec celle du centre de percuſſion.

Dans les calculs de 1664 (T. XVI) il n'y a abſolument rien qui pourrait faire naître l'hypothèſe que Huygens aurait trouvé une formule générale pour le centre de percuſſion avant de trouver une formule identique pour le centre d'oſcillation. C'eſt excluſivement ſa remarque dans le livre de Fabry qui fait voir que dès 1664 il a eu, paraît-il, la conviction bien arrêtée de l'identité des deux centres. Il eſt impoſſible de ſavoir ſi cette remarque, qui ſemble impliquer la connaiſſance préciſe de la ſituation du centre de percuſſion, date d'avant ou d'après le jour (proche du 10 octobre 1664, voir la p. 462 du T. XVI) où il trouva la formule générale du centre d'oſcillation.

A propos de cette remarque de Huygens nous ajoutons encore l'obſervation hiſtorique que dès 1647 Merſenne (Nov. Obs. phys. math. T. III, p. 119) dit „autorem appendicis Phyſicomathicæ [ſic] de centro percuſſionis [c.à.d. Fabry, ou Mouſnier], in iſto centro reperiendo à prop. 17 & deinceps [c.à.d. à partir de la propoſition où ils commencent à conſidérer les ſurfaces oſcillant *dans leur plan*] aberraſſe; hoc eſt cùm ad læuam & dextram corpora vibrantur, eo teſte qui ſolus ratione vibrationes iſtas definiuit"; à la p. 118 il a nommé Roberval, cependant nous n'oſerions dire s'il parle ici de lui ou, ce qui ſemble plus probable, de Deſcartes: comparez les p. 352—353 du T. XVI [1]).

[1]) En janvier 1647 Mersenne écrivait au père Constantijn à propos du livre de Fabry et de Mousnier (T. I, p. 59) que celui-ci pourrait „servir d'exercice à vostre braue geometre pour long temps". Nous avons dit (T. XVI, p. 178, note 9) à propos de ce même livre que „Fabry a bien les mêmes droits que Descartes à être cité parmi les précurseurs de Huygens dans la science si difficile de la percussion des corps". Nous saisissons cette occasion pour remarquer que c'est encore ce même livre, et non pas les „Dialogi physici" de 1669 de Fabry, qui aurait dû être cité dans la note 6 de la p. 143 du T. III; et nous pouvons ajouter qu'il est quelque peu étrange qu'en 1660 (T. XV, p. 467) dans sa „Brevis Assertio Systematis Saturnii" Huygens parle de

Dans l'objection de Roberval on peut donc distinguer deux éléments de valeur différente. Il se trompe en considérant les fondements du calcul de la Pars Quarta comme douteux aux yeux de Huygens lui-même. Mais il ne dit point d'absurdité en émettant l'hypothèse que Huygens a trouvé la formule générale pour le centre de percussion d'abord. Nous ne pouvons même affirmer certainement — quelqu'improbable que la chose nous paraisse — qu'il n'en a pas été ainsi [2]).

Les autres objections de Roberval ont peu de valeur et portent à croire — voir notamment la 11ième objection, où il compare entre elles des grandeurs incomparables — que la perte de son Traité de Mécanique n'a pas eu de conséquences fort fâcheuses pour le développement de cette science. Nous renvoyons pour ces objections aux notes des p. 451—456 qui suivent. Il est juste d'ajouter que très probablement les objections n'ont pas été faites *en latin:* nous ne les possédons, paraît-il, que dans la forme que Huygens leur a donnée.

Fabry comme d'un auteur à peu près inconnu de lui „quem ferunt alicujus nominis esse". Il est vrai que dans le livre de Mousnier il n'y a des notes marginales de Huygens que dans l'„Appendix phys. math. de centro percussionis" exclusivement et que celles-ci datent d'après 1660, mais ceci ne justifie pas l'expression de Huygens, puisque la composition du Traité „De Motu Corporum ex Percussione" a eu lieu avant ce temps.

[2]) Les manuscrits de Huygens, nous l'avons dit, ne contiennent rien du tout sur le centre de percussion. On peut voir dans le T. XVI comment le calcul du centre d'oscillation dans un grand nombre de cas particuliers, l'a conduit ensuite à l'établissement de la formule générale.

OBJECTIONS DE ROBERVAL CONTRE LES DÉMONSTRATIONS DE L'AUTEUR DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM" ET RÉPONSES DE HUYGENS.

RESPONSA AD OBJECTIONES ROBERVALLIJ CONTRA DEMONSTRATIONES NOSTRAS DE MOTU PENDULORUM [1]).

§ 1. 1. Ad primum poſtulatum [2]). Multa hic æquivoca; et hoc ex præcipuis.
Solutane ſint ab invicem pondera, an invicem allegata.

R. Cum generaliter proponatur poſtulatum æque de ſolutis ac alligatis accipiendum eſt, nec proinde æquivocum dici poteſt.

2. *An ſoluta agant per rectas parallelas, an per convergentes an per divergentes, an convergant vel divergant ab eodem puncto an a diverſis.*

Pondera quævis deſcendere conari ponimus per rectas parallelas ad horizontis planum perpendiculares, quia alias centri gravitatis conſideratio nulla eſt [3]). ac ſingulorum centra gravitatis tantum aſcendiſſe vel deſcendiſſe quantum a plano quodam horizontali diſtantiam mutarint.

3. Obj. *An motus fiat in aere an in quodam alio corpore liquido.*

R. Cum abſque hac diſtinctione proponatur Poſtulatum, apparet univerſaliter accipiendum nec referre in quo medio fiat motus.

4. Obj. An remota intelligantur omnia corporum impedimenta, tanquam ſi motus in vacuo fieret, ut in tertio poſtulato poſtea fieri vult.

R. Hoc etiam perinde eſt quantum ad hoc poſtulatum an remota intelligantur impedimenta an non. quod ſi non remota intelligantur, tunc eo facilius quoque poſtulatum concedi debet.

---

1) P. 266—274 du Manuscrit D. La p. 264 porte la date du 27 mai 1671 et la p. 277 celle du 18 juillet 1671.

Nous avons numéroté les Objections et divisé la Pièce en trois §§.

2) Il s'agit de l'Hypothèse I de la Pars Quarta (voir la p. 247 qui précède).

3) Roberval ne l'ignorait nullement: dans la lettre du 16 août 1636 d'Etienne Pascal et Roberval à Fermat („Oeuvres de Fermat, publ. p. l. soins de P. Tannery et Ch. Henry". T. II Correspondance p. 35) on lit: „Ce centre [de la pesanteur] n'a été démontré que quand la descente des poids se fait par des lignes parallèles". On peut consulter aussi les Manuscrits conservés à la Bibl. Nationale à Paris et intitulés „Proposition de Monsr de Roberval qui sert à trouver le centre de gravité" et „Theorema lemmaticum ad invenienda centra gravitatis mire inserviens a D. D. Roberval anno 1645".

5. Si descenderint qua vi rursus ascendant et quousque, præcipuè in vacuo, in quo cur motus desineret.

R. Qua vi ascendant corpora [1]) non est hujus loci quærere. Quod autem dubitare videtur an non in vacuo altius ascensura sint corpora et cum ipsis centrum gravitatis commune, quam unde descenderat, ad hoc dico vacuum ita poni ut maneat tamen gravitatis actio, ac tantum tollatur resistentia illa aeris manifesta quam sentimus. Videmus jam nunc resistentiam aeris gravitate corporum ita vinci, ut vix quicquam officiat eorum motibus. Videmus etiam arte aerem istum ita eliminari posse antlia pneumatica, ut plumæ nihilo tardius quam plumbum decidant, manente ut apparet gravitatis actione. Itaque et spatium ejusmodi inane concipere licet et motus qui illic fient quam proxime eodem modo se habebunt atque ij qui in aere nostro. Manente autem gravitatis actione corporum ascensum definitum esse ex tractatu superiore de descensu gravium [2]) liquet.

6. Obj. Hæc et plura cum complectatur postulatum nimis distinguendum esset priusquam illi quis assentiatur.

R. Nihil distinguendum sed generaliter accipiendum postulatum. Si vero casus adferantur quibus concessu difficile videatur, ijs responderi facile posse existimo, sicut jam factum est [3]).

7. Ad secundum. Cum materialiter verum sit postulatum non tamen apparet illud ex primo sequi. Quod si inde sequeretur non jam esset postulatum, certè legitimum, sed propositio demonstranda.

Non est hoc secundum postulatum sed consequentia e primo deducta ex quo cum clarissime pateat, non opus est ulteriore demonstratione. Credo tamen posse omitti hanc consequentiam vel si retinenda, oportet scribere. Pendulum quiescens non cœpturum moveri si linea centri et linea perpendiculi in unum conveniant [4]).

8. *Ad tertium* [5]). *Videndus primum Galileus quem citat pro pendulo simplici. Hic enim author a multis non recipitur nec nos authorem sed rationes authoris perpendimus.*

Non cito Galileum sed propositionem meam ex tractatu præcedente de descensu

---

[1]) Voir sur la „vis motus" de Huygens le troisième alinéa de la p. 376 du T. XVI.

[2]) Huygens avait donc montré à Roberval, et peut-être à d'autres académiciens, outre les hypothèses et quelques (?) propositions de la Pars Quarta, le début de la Pars Secunda.

[3]) Il y avait donc probablement eu une discussion orale sur ce sujet.

[4]) Nous ignorons la forme primitive de la deuxième hypothèse; elle fut d'ailleurs entièrement supprimée. Comparez la fin du § 3 qui suit.

[5]) Il s'agit de l'Hypoth. II de la Pars Quarta.

gravium [6]). Quod ſi principium aliquod in hac de motu tractatione quod mihi cum Galileo commune eſt, velut quod corpora ſemel mota moveri pergant eadem perpetuo celeritate ſi nihil aliunde ijs occurrat quod motum deſtruat [7]), ſi hoc inquam non admittat jam non habeo quod dicam contra negantem principia niſi hoc idem à Torricello Carteſio [7]) multiſque alijs ſtatui, vulgoque ab omnibus concedi. Principiorum vero ratio dari non ſolet, ſed in geometria evidentia eſſe oportet in phyſicis experientiæ convenientia. Tolle mihi omnia impendimenta et videbis an non duraturus ſit corporis motus [8]).

9. Obj. Pro pendulo compoſito fruſtra experientiam ſibi favere contendit, quæ contra ipſi ubique refragatur.

R. Non magis in pendulo compoſito quam in ſimplici experientia refragatur. De ſimplici autem demonſtratum eſt ut dixi, remotis impedimentis, ſemioſcillationes ejus æquales eſſe, itaque merito idem in compoſito eventurum ſtatuimus [9]).

10. Obj. Fruſtra etiam aerem ſolum aut tale aliquod corpus accuſat, quandoquidem ipſis remotis, pendulum, naturâ ipſâ, motum ſuum ſenſim amittere poteſt.

R. Cum in aere ipſo agitatum pendulum diutiſſime motum reciprocum continuet, poſſet vel hic ſupponi cujuſque oſcillationis ſemiarcus æquales eſſe, cum inſenſibiliter differant. Minus autem differunt remoto aere ut in vacuo Torricelli ſeu Boiliano. unde tanto melius tunc ponitur eorundem arcuum æqualitas. Nec tamen negare opus fuerit eſſe aliquid aliud præter aerem quod ſenſim penduli motum extincturum ſit [10]), cum ſufficiat id ita inſenſilibus decrementis eum conſumere ut in cujuſque vibrationis ſemiarcubus ſenſibilis non ſit differentia.

11. Obj. Si enim non amitteret, ſed motus ille ex ſe non periret quæro cur ultra non progrederetur pendulum, cujus impetus in ima parte ſui motus multo major fuerit quam ejuſdem penduli pondus [11]), quodque ſi ibi in globum libere jacentem in horizonte perfecte levigato incurriſſet, motum diu et longe duraturum ipſi communicaſſet, atque ex eorum ſententia [8]) perpetuum.

---

[6]) Huygens parle en effet, comme on le voit à la p. 251, de sa Prop. IX de la Pars Secunda.

[7]) Comparez le dernier alinéa de la p. 105 du T. XVI.

[8]) Nous ignorons si Roberval a jamais écrit ailleurs qu'il n'admettait pas le „principe de Galilée". Mais si pour toute vitesse il faut une force (note 11) il est sans doute logique de ne pas admettre ce principe.

[9]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 38 qui précède.

[10]) Voir l'observation 6 à la p. 314 du T. XVII. Huygens songe évidemment à la résistance d'une matière autre que l'air, non pas à une extinction naturelle du mouvement.

[11]) Ceci est évidemment une erreur capitale.

Dans les „Observations sur la Composition des Mouvemens, et sur le Moyen de trouver les

R. Cum tam projecta in altum ad perpendiculum, quam ascendentia per planum inclinatum, aut per arcum circuli ut pendula, non ultra certum terminum ascendant, ex tractatu superiore de descensu gravium manifestum est. Quid sibi velit vero objectionum author cum impetum corporis, vel celeritatem ut postea [1]), gravitate majorem dicit et quam bene hæc inter se comparentur in sequentibus discutiemus [2]).

12. Obj. Sed et quod multi non animadvertunt axis penduli, dum ipsum sustinet, gradus velocitatis illius sensim et continuè suffuratur, quod impedimentum quia per se semper pendulum concomitatur, tolli aut removeri non potest, unde fit ut ipsius penduli cursus et recursus numquam sint æquales, contra postulatum. quod proinde sit invalidum etiam remoto aeris aut alio quovis manifesto impedimento. Axis enim semper aderit sine quo pendulum non datur.

R. Impedimentum ab axe proveniens cogitatione tollitur æque ac in libra. Nam in hac quoque si non amoveatur impedimentum axis, fiet ut brachijs æqualibus inæqualia pondera sustinentibus tamen fiat æquilibrium. Sed et reipsa seu materialiter ita tollitur impedimentum illud tam in pendulo quam in libra, ut semiarcus unius oscillationis quantum ad sensum æquales inveniantur. Itaque omnino justum est postulatum ac nequaquam invalidum. Nam si pendulum non datur sine axe, etiam libra sine axe non datur, sed utrisque mathematicè, seu, ut vocant, in abstracto consideratis, axis ille nullum adfert impedimentum.

13. Obj. Hoc autem corruente postulato corruunt authoris demonstrationes, etiamsi propositiones forsan veræ sint, sed alijs physicis innixæ fundamentis [3]).

Touchantes des Lignes courbes" (ouvrage de Roberval, publié en 1693 à Paris dans les „Divers Ouvrages de Math. et de Phys. par MM. de l'Ac. R. des Sciences") nous lisons (p. 69): „Puissance est une force mouvante. Impression est l'action de cette puissance.... Nous avons défini la puissance en tant qu'elle nous peut servir considérant les diversitez des mouvemens, ce qui n'empesche que dans d'autres speculations, nous n'entendions par le mot de puissance une force capable de soustenir un poids ou de quelque autre effet". Ici il ne songe pas, croyons-nous, à assimiler un „impetus" à un poids, comme il le fait dans la 11ième objection.

Rappelons que Roberval est péripatéticien en ce sens qu'il admet que là où il y a une vitesse (constante p.e.) il y a une force (ou „puissance") dans le sens de cette vitesse. À la même p. 69 de l'édition citée il écrit: „La direction d'une puissance mouvant un mobile, lequel par son mouvement décrit une circonférence de cercle, est la ligne perpendiculaire à l'extrémité du diamétre, au bout duquel le mobile se trouve".

[1]) Nous ne trouvons pas d'objection faite plus tard, où Roberval ait parlé d'une *vitesse* supérieure à un *poids*.

[2]) Nous ne trouvons pas de traces de la discussion générale annoncée ici, si ce n'est dans le § 3 qui suit.

R. Sed ſtante hoc poſtulato, ſicut jam oſtenſum eſt, ſtant quoque authoris demonſtrationes; nam contra illas nihil adfertur niſi levia quædam quibus facile poſtea reſpondebitur. Neſcio autem qui putet propoſitionum noſtrarum demonſtrationes legitimas ex alijs forſan phyſicis principijs deduci poſſe, cum impedimentum axis neceſſario conſiderandum putet, quod impedimentum majus vel minus eſt prout axis affaber ſubtiliterque aut ſecus elaboratus eſt, oleo inunctus vel ſecus [4]).

14. Obj. Itaque apparet propoſitiones illas, ſiquæ veræ ſint, non vi demonſtrationum inventas eſſe ac ſtabilitas; ſed illis experientia detectis, demonſtrationes has qualescunque eſſe affectas. Plura dicemus ad prop. 4 [3]).

R. Quæ hic dicit author objectionum non videtur recte perpendiſſe. Nam primo cum dicat propoſitiones noſtras non eſſe vi demonſtrationum inventas, voluit dicere vi principiorum vel hypotheſium. Cum vero non neget ex poſitis principijs eas rectè demonſtratas, cur non horum vi ſed experientia [5]) potius detectas vult. Nempe ille ita argumentatur. Cum principia falſa ſint, non potuerunt propoſitiones veræ eorum opera reperiri. Ergo aliunde. At melius ſic collegiſſet. Propoſitiones veræ ſunt, et per conſequentias neceſſarias ex poſitis principijs demonſtratæ, ergo et principia illa vera ſunt [6]).

§ 2. Cum in ipſo hoc aere videamus pendulorum arcus quos deſcendendo ac aſcendendo in una oſcillatione conficiunt inſenſibiliter differre neque etiam impedimentum axis vel aliud quodquam, ſi quid eſt, impedire quo minus id ita fiat; Liceret, etiam non remoto aere, vel axis retardatione, hypotheſi iſta uti quæ dictos arcus æquales ſtatuit, quoniam in rebus phyſicis hypotheſes experientiæ convenientes ſumere ſufficit.

---

[3]) Voir sur les objections 13 et 14 l'Avertissement qui précède. Les mots „plura dicemus", de l'Obj. 14 peuvent se rapporter au discours de 1671 (?) de Roberval à l'Académie des Sciences que nous avons mentionné à la p. 443.

[4]) Il eût sans doute mieux valu supprimer la dernière partie („quod impedimentum ..... vel secus") de cette phrase; la remarque est déplacée en cet endroit et fait plutôt partie de la réponse à la 12ième Objection où il est dit que l'„impedimentum ab axe .. materialiter tollitur", du moins à fort peu près.

[5]) C.à.d. par l'expérience directe à la manière de Mersenne (voir aussi la note 3), car il est évident que les „posita principia" ont dû être empruntés à l'expérience. Huygens le dit d'ailleurs clairement dans la réponse à la 8ième Objection: dans la physique il faut „experientiæ convenientia". Le § 2 qui suit fait bien voir qu'il ne fait pas de distinction sous ce rapport entre la mécanique et la physique.

[6]) Il faut pourtant observer qu'il est possible de choisir des hypothèses manifestement fausses telles que des conséquences véritables en découlent logiquement. Mais ce sont là des jeux d'esprit sur lesquels nous n'insisterons pas.

Remotis vero cogitatione impedimentis iſtis (quæ etiam re ipſa fere penitus auferri poſſunt, nam aer quidem penitus ex dato vaſe exhauritur manente eadem quæ fuerat gravitatis actione) tanto facilius jam eadem hypotheſis admittenda eſt. Sed jam ut dixi non niſi ad pendulum compoſitum ipſa opus eſt, cum arcuum æqualitas in pendulo ſimplici demonſtrata ſit, in his quæ de deſcenſu gravium antea tradidimus [1]).

§ 3. Il eſt vray que peuteſtre l'autheur des objections ne voudra pas admettre les demonſtrations de cet autre traitè, parce que je m'y ſers de ce principe de Galilee (lequel pourtant Mr. des Cartes et bien d'autres ont ſuivi depuis), ſcavoir qu'un corps continueroit avec egale viteſſe le mouvement qu'il a conceu une fois eſtant oſtè tous obſtacles de dehors. A quoy je n'ay rien a dire ſinon que ce principe me ſemble, auſſi bien qu'a tous les autres qui l'ont ſuivi, fort convenable a la nature et que l'experience meſme, en tant qu'on a moyen de la faire, le confirme. Ne pouvant empeſcher au reſte que l'autheur des objections n'aye des opinions toutes differentes en ee qui regarde le mouuement, comme par ex. quand il compare la viteſſe des corps avec leur poids, et veut que cette viteſſe puiſſe eſtre ou egale ou moindre ou plus grande que la peſanteur du corps, ce qui a mon avis ne ſignifie rien, parce que ces deux choſes ne ſont pas homogenes pour eſtre comparees entre elles par la quantitè [2]). Ainſi n'eſtants pas d'accord entre nous des principes il ſeroit inutile de reſpondre aux objections qui naiſſent de cette diverſitè, et tout ce que j'ay cru pouuoir faire c'eſt de confirmer mes hypotheſes par l'eclairciſſement que j'y ay adjoutè dans lequel la reſponſe aux autres objections qu'on y a faites eſt contenue. Ce que leur autheur nomme le ſecond poſtulat, eſtoit ſeulement une conſequence de la premiere hypotheſe, laquelle conſequence n'eſtant pas neceſſaire au reſte du traitè on la peut omettre. Et par là ce qu'il appelle le 3e poſtulat, c'eſt la 2e hypotheſe [3]).

On n'a rien trouuè dans les demonſtrations qui ne ſoit legitimement deduit des [hypothèſes].

---

1) Comparez la note 9 de la p. 453.
2) Comparez la note 11 de la p. 453.
3) Comparez la réponse à la 7ième Objection du § 1.

DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA ULTERIOR.

La „De Hugeniana Centri Oſcillationis Determinatione Controverſia", telle qu'on la trouve dans les éditions de 's Graveſande de 1724 et 1751 — nous y ajoutons le mot „ulterior", puiſqu'il s'agit en ſomme d'une continuation de la diſcuſſion entamée par Roberval (objections 13 et 14) — ſe compoſe de douze Pièces qui ont toutes été publiées dans nos Tomes VIII et IX, ſavoir ſix de Catelan, deux de Jacques Bernoulli, une du marquis du l'Hôpital et trois de Huygens[1]). Ces dernières Pièces,

[1]) Ces Pièces sont les suivantes. Ce sont toutes des traductions, excepté la dixieme, déjà écrite en latin.

I. „Observationes Abbatis Catelani in propositionem, quæ fundamentum est 4æ partis tractatus de Pendulis Hugenii" (T. VIII, N° 2260, p. 353). 1681/1682.

II. Domini Abbatis Catelani Examen Mathematicum Centri Oscillationis (T. VIII, N° 2261, p. 356) 1681/1682.

III. Excerpta ex litteris Domini Hugenii, quibus respondet observationi Abbatis Catelani in 4am propositionem Tractatus de Centris Oscillationis (T. VIII, N° 2267, p. 368). 1682.

IV. Exceptio Abbatis Catelani ad responsionem Hugenii (T. VIII, N° 2270, p. 372). 1682.

V. Objectio Abbatis Catelani contra motum Pendulorum in Cycloidibus (T. VIII, N° 2280, p. 395). 1682/1683.

VI. Responsio ad Objectiones Hugenii adversus methodum Abbatis Catelani de determinando Centro Oscillationis (T. VIII, N° 2281, p. 397). 1682/1683.

VII. Excerpta ex litteris D. Bernoulli datis Basileæ ad Autorem Diarii Parisiensis, de Controversia, inter Abbatem Catelanum & Hugenium, de Centro Oscillationis (T. VIII, N° 2332, p. 485). 1684.

VIII. Excerpta ex litteris D.ni Hugenii ad Auctores Diarii Parisiensis, datis Hagæ 8. Junii 1684. quæ continent ejus responsionem ad exceptionem D.ni Abbatis Catelani, de Centro Oscillationis (T. VIII, N° 2341, p. 497). 1684.

IX. Responsio D.ni Abbatis Catelani ad litteras D.ni Bernoulli de Controversia sua cum D.no Hugenio de Centro Oscillationis (T. VIII, N° 2365, p. 537). 1684.

X. Dn. Bernoulli Narratio Controversiæ inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatæ de Centro Oscillationis, quæ loco Animadversionis esse poterit in Responsionem Dn. Catelani (T. IX, N° 2426, p. 80). 1686.

quoiqu'elles affectent la forme de lettres adreſſées à un éditeur, ou de remarques ſur une lettre de ce genre, font évidemment partie des Oeuvres proprement dites de Huygens. Nous pourrions donc, comme nous l'avons fait au T. XVI (p. 169—186) pour l'„Extrait d'une lettre ſur les règles du mouvement dans la rencontre des corps", réimprimer ici les trois pièces de Huygens, auxquelles il faudrait bien joindre les neuf autres [1]) et les pourvoir d'un avertiſſement, de notes et d'appendices. Une treizième Pièce qu'il conviendrait d'y ajouter (pour ne rien dire des N°s 2259 et 2166 du T. VIII et 2580, 2581, 2587, 2594, 2597, 2598, 2600, 2603 et 2604 du T. IX) eſt le N° 2690 (T. X, p. 114, J. B. „Demonſtratio Centri Oſcillationis ex Natura Vectis, etc."), travail de Jacques Bernoulli publié dans les Acta Eruditorum de juillet 1691. Une quatorzième et une quinzième, datant de 8 et 9 ans après la mort de Huygens, viendraient s'y joindre tout naturellement, ſavoir la „Démonſtration générale du centre de balancement ou d'oſcillation, tirée de la nature du levier" que Jacques Bernoulli publia en 1703 dans l'„Hiſtoire de l'Académie des Sciences de Paris" et la „Démonſtration du Principe de Mr. Huygens touchant le centre de balancement", de 1704 (Hiſt. de l'Ac. d. Sc. de Paris) du même auteur. L'addition d'une ſeizième, ſavoir un chapitre du „Diſcours ſur les Loix de la Communication du Mouvement" de 1727 de Jean Bernoulli — comparez la p. 466 qui ſuit — [2]), ne ſerait nullement déplacée. Nous avons déjà parlé (p. 442) d'une ſection de la „Mécanique analytique" de 1788 de Lagrange qui ſe rattache à ces diſputes.

Au lieu de réimprimer les douze Pièces et celles que nous pourrions y ajouter, nous

---

XI. Litteræ D.ni Marchionis de l'Hôpital ad D.um Hugenium, in quibus contendit, se regulam hujus Autoris de Centro Oscillationis penduli compositi demonstrare per causam physicam, & respondere simul D.no Bernoulli (T. IX, N° 2605, p. 457). 1690.

XII. Observationes D.ni Hugenii in litteras præcedentes & in relationem D.ni Bernoulli, cujus in iis fit mentio (T. IX, N° 2606, p. 461). 1690.

[1]) A l'exception peut-être du N° V, dont nous ne dirons rien ici. Cette Pièce se rapporte à la Prop. XXIV de la Pars Quarta de l'„Hor. osc.", mentionnée aussi dans la note 1 de notre Appendice IV à cette Pars (p. 427 du présent Tome). Huygens y répond brièvement, et sans approfondir la question, à la p. 500 (dernier alinéa) du T. VIII.

[2]) Publié à Paris, chez Cl. Jombert, d'après un manuscrit contenant la solution de la première question proposée par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1724. La question était: „Quelles sont les loix suivant lesquelles un corps parfaitement dur, mis en mouvement, en meut un autre de même nature, soit en repos, soit en mouvement, qu'il rencontre, soit dans le vuide, soit dans le plein". L'auteur (p. 1—2) y entreprend de prouver „une verité que M. de Leibnitz lui-même n'a jamais prouvée qu'indirectement; sçavoir, que la force vive d'un corps n'est pas proportionelle à sa simple vîtesse, comme on l'a crû communément, mais au quarré de sa vîtesse . . . Cette théorie ouvre un chemin facile à plusieurs veritez importantes. Elle a fourni à l'Auteur [e.a.] un moyen aisé de trouver le centre d'oscillation dans les Pendules composées".

nous contenterons toutefois d'y renvoyer le lecteur et de ne donner qu'un aperçu de la controverse.

Les mauvaises objections de Catelan, auteur de peu de mérite [3]), ont conduit des savants de plus de valeur, et Huygens lui-même, à considérer dans le cas des pendules linéaires le gain ou la perte de vitesse des différents points pesants qui résulte de leur réunion en un tout, lorsqu'on les attache à une barre, ou à un fil, linéaire et impondérable. De cet assemblage chaque point pesant situé au-dessus du centre d'oscillation se mouvrait plus vite, et chaque point situé au-dessous de lui plus lentement, s'il était seul attaché au point de suspension. En d'autres termes: la partie inférieure du pendule retarde le mouvement de la partie supérieure, cette dernière avance celui de la partie inférieure. Ne serait-il pas possible de calculer la place du centre d'oscillation en partant de la considération de ces gains ou pertes de vitesse? Ne pourrait-on donc pas se passer de l'Hypothèse I de la Pars Quarta appliquée anx points pesants se détachant les uns des autres à un moment donné?

Durant la vie de Huygens les chercheurs engagés dans cette voie — c.à.d. Catelan, Jacques Bernoulli, de l'Hospital et Huygens — se sont bornés à la considération de pendules linéaires. Ce n'est que vers 1703 [4]) que Jacques Bernoulli réussit à s'élever

---

[3]) Après Roberval, mort en 1675, il paraît — c'est Huygens lui-même qui nous l'apprend (T. VIII, p. 350) — que la méthode de la Pars Quarta n'a plus été critiquée avant l'entrée en scène de Catelan. Comme nous ignorons l'histoire antérieure de cet auteur, il nous est impossible de dire si Roberval a pu avoir sur lui quelqu'influence directe ou indirecte.

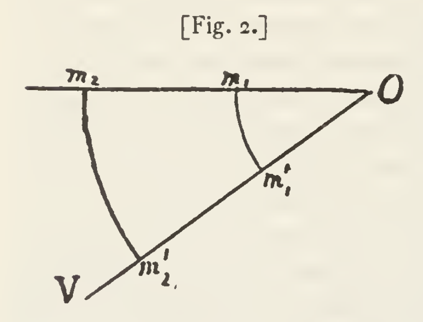
Il est sans doute possible, vu la nature d'une partie des autres écrits de l'abbé — voir la note 3 de la p. 349 du T. VIII — que le désir d'attaquer Huygens provenait surtout de lui-même. Toutefois il paraît plus probable que, ne connaissant pas Huygens personnellement, il ait été influencé par „quelque malintentionné envers Huygens", comme le dit la note 4 de la p. 350 du T. VIII. On eût pu tout aussi bien se servir du pluriel. Il nous semble du moins que notre ignorance des motifs de Catelan est trop profonde pour accuser uniquement, ou même peut-être pour accuser, N. Hartsoeker (voir, outre la note 4 nommée, la lettre N° 2265), d'autant plus que la mauvaise pratique des éditeurs d'Amsterdam se renouvela (note 1 de la p. 397 du T. VIII) et qu'il est donc incertain si Catelan dit vrai (T. VIII, p. 364) en alléguant de n'avoir pas su qu'on insérerait son premier article dans la contrefaçon d'Amsterdam du Journal des Sçavans. Ces questions personnelles seraient oiseuses si les objections de Catelan étaient moins insignifiantes et que par conséquent le désir d'attaquer Huygens s'y manifestait moins nettement.

Outre les écrits de l'abbé nommés dans le T. VIII, le catalogue de la Bibliothèque Nationale à Paris mentionne encore le „Témoignage que rendent les mathématiques à la gloire du roi" (par l'abbé Catelan), Paris, F. Muguet, in 8°, 1681; les „Inscriptions en vers latins et françois pour les basreliefs de la statue du Roy (par l'abbé Catelan et par Mlle Catelan la cadette), in 4°, 1686; et l'ouvrage „Principe de la science générale des lignes courbes ou principaux élémens de la géométrie universelle" (par l'abbé Catelan), Paris, L. Roulland, in 12°, 1691.

[4]) Dans l'article mentionné à la p. 458.

à celle des corps oſcillants de forme quelconque. Durant la vie de Huygens l'Hypothèſe I de la Pars Quarta eſt donc reſtée la ſeule qui permît de trouver la formule générale pour le centre d'oſcillation.

[Fig. 2.]



Dans ſon article de 1681, Pièce I de la note 1 de la p. 457, Catelan conſidère deux points peſants égaux (m_1 et m_2) formant deux pendules ſimples ayant O [Fig. 2] pour axe d'oſcillation. Ces points, réfléchis ſans perte de viteſſe par le plan OV, remontent à la hauteur d'où ils ſont tombés; il en ſera donc de même de leur centre de gravité commun. Mais il n'en ſera plus de même, penſe-t-il, lorſqu'on forme un pendule compoſé en réuniſſant les deux points peſants par un lien rigide et impondérable. Les viteſſes des deux points, arrivés dans la poſition m'_1 m'_2 ſeront alors proportionnelles à leurs diſtances du point O; de plus, penſe-t-il, la *viteſſe moyenne* ſera la même que dans le cas précédent. On a donc deux équations permettant de calculer les viteſſes. Et ſi l'on ſuppoſe qu'à l'inſtant où le pendule compoſé atteint le plan OV, le lien ſe rompt, et que les points réfléchis s'élèvent juſqu'à ce que leurs viteſſes ſoient épuiſées, on peut calculer que le centre de gravité atteint une hauteur ſupérieure à celle dont il était tombé.

L'hypothèſe gratuite d'après laquelle la viteſſe moyenne des deux poids, lorſqu'ils atteignent le plan OV, eſt la même dans les deux cas conſidérés, provient peut-être de ce que l'auteur ſongeait à la conſtance que le produit Σmv (donc auſſi Σv pour des quantités de matières égales) poſſède d'après Deſcartes dans le cas de colliſions de différents corps. Il eſt vrai que ſuivant Deſcartes lui-même ce principe n'eſt nullement applicable dans le cas conſidéré. Mais nous pouvons avec de l'Hoſpital conſidérer Catelan comme „abuſant de la penſée de Mr. Des Cartes, que la meſme quantité de mouvement ſe conſerve toujours dans la nature". (T. IX, p. 402).

Dans ſa première réponſe de 1682 (Pièce III) Huygens ſe borne à faire remarquer que l'expérience ne confirme pas tous les réſultats qu'on peut tirer de la théorie de l'abbé de Catelan. C'eſt dans ſa deuxième réponſe de 1684 ſeulement (Pièce VIII) qu'il obſerve que le réſultat du calcul de Catelan eſt „contre le grand Principe des mechaniques", et il ajoute: „& ſi Mr. l'Abbé peut faire en ſorte que [ſon Principe] ſoit vray, il aura trouvé le mouvement perpetuel. Son Principe eſtant donc faux puiſqu'il meine à une fauſſe concluſion, il n'en peut rien inferer contre ma propoſition qui ne ſoit faux auſſi".

Jacques Bernoulli, qui était déjà intervenu en 1684 dans le débat (Pièce VII) tâcha, ſans beaucoup de ſuccès, de préciſer la queſtion des gains et pertes de viteſſe (Pièce X de 1686). Il remarque que dans le cas de la Fig. 2 le pendule (dans la poſi-

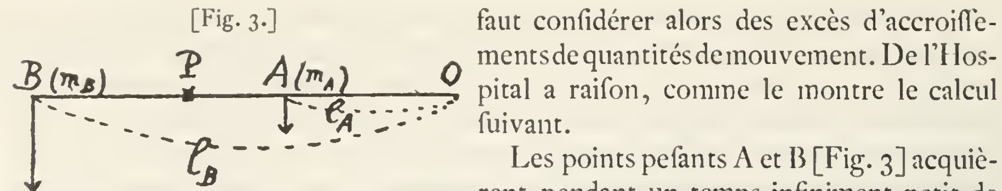
tion horizontale p.e.) peut être confidéré comme une balance qui n'eft pas en équilibre et que les poids attachés au fléau impondérable doivent confumer une partie de leur viteffe „in premendo axe". Les excès de viteffe, penfe-t-il, pourraient fe diftribuer fuivant une loi analogue à celle du levier. Il exhorte donc les favans „ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum obfervent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcimento, ex altera alio corpore itidem fed tardius moto". Penfe-t-il vraiment qu'il n'eft pas certain que le centre de gravité, dans les conditions du problème [Fig. 2], doit monter à une hauteur auffi grande que celle dont il eft defcendu? Il femble bien qu'oui, car il propofe, provifoirement il eft vrai, une folution différant de celle de Catelan mais conduifant également, comme il le fait voir, pour les poids réfléchis à une hauteur du centre de gravité non égale à la hauteur primitive.

Pour pouvoir foutenir la poffibilité de folutions différant de celle de Huygens tout en niant celle du mouvement perpétuel, il a recours à l'argument fuivant: „Antequam finiam, in favorem Dn. Catelani hoc monebo, quod etiamfi commune gravitatis centrum juxta illum altius afcendere deberet, quam defcendit, nondum tamen fequatur repertum fore motum perpetuum, ut fibi perfuadet Ill. Hugenius, quoniam in iftis abftrahi folet ab aëris refiftentia, a diminutione celeritatis, quæ neceffario fequitur difruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli aliorumque obftaculorum". Objection à laquelle Huygens répond avec beaucoup de fens (Pièce XII): „Mr. Bernoulli ne demeure pas d'accord de cette confequence, à caufe de l'obftacle de l'air et quelques autres, qui en empêcheroient l'effet. Mais il devroit avoir confidéré, que la hauteur qu'acquiert le centre de gravité par deffus celle qu'il avoit, eftant toûjours une quantité determinée, & l'effet des obftacles n'eftant pas determiné, & fe pouvant diminuer de plus en plus, on pourroit facilement faire une machine, où l'avantage du rehauffement du centre de gravité furpafferoit l'empêchement des obftacles. Mais c'eft de quoy affurément on ne fera jamais obligé de venir à l'épreuve".

Confultez auffi, à propos de la queftion du mouvement perpétuel, le Pièce de Huygens qui fuit fur la confervation des forces (p. 477), ainfi que notre Avertiffement fur ce fujet.

Le marquis G. F. de l'Hofpital répondit en 1690 à l'appel de Jacques Bernoulli par une lettre (Pièce XI) où il approuve fon idée fondamentale et montre qu'il ne ferait pas, dans fa confidération d'une „balance" chargée de deux points pefants, arrivé à un réfultat erroné — car de l'Hofpital confidère la formule de Huygens pour la longueur du pendule ifochrone comme certainement correcte — s'il avait parlé des *accroiffements* infiniment petits des viteffes, et non pas des viteffes acquifes après un temps fini. De l'Hofpital le fait voir en confidérant deux poids égaux. Il ajoute toutefois que le même raifonnement eft applicable au cas de deux poids inégaux; il

[Fig. 3.]



faut confidérer alors des excès d'accroiffements de quantités de mouvement. De l'Hospital a raifon, comme le montre le calcul fuivant.

Les points pefants A et B [Fig. 3] acquièrent pendant un temps infiniment petit de durée déterminée les quantités de mouvement infiniment petites $m_A v$ et $m_B v$ refpectivement, lorfqu'ils ne font pas réunis l'un à l'autre. Lorfqu'ils le font, le poids A n'acquiert que la quantité de mouvement $m_A v_A$, où v_A eft inconnue. L'excès qui doit être diftribué fur le poids B et fur l'axe O, eft donc $m_A (v - v_A)$.

B en obtiendra la part $\frac{l_A}{l_B} m_A (v - v_A)$ s'il eft vrai que les excès fe diftribuent fuivant la loi du levier. B aura donc la quantité de mouvement

$$m_B v_B = m_B v + \frac{l_A}{l_B} m_A (v - v_A).$$

Or, en vertu de la liaifon $v_A : v_B = l_A : l_B$.

On a donc $v_A = l_A v \frac{\sum_{AB} ml}{\sum_{AB} ml^2}$ et $v_B = l_B v \frac{\sum_{AB} ml}{\sum_{AB} ml^2}$.

Le centre d'ofcillation P, fitué à une diftance L_{AB} de l'axe O, doit être tel qu'en ce point la barre impondérable acquiert précifément la viteffe v. Il faut donc qu'on ait $v_A : v = l_A : L_{AB}$.

Donc $L_{AB} = \frac{\sum_{AB} ml^2}{\sum_{AB} ml}$ ou $\frac{\sum_{AB} ml^2}{M l_Z}$; M y repréfente la fomme des quantités de matière m_A et m_B, et l_Z la diftance à l'axe de leur centre de gravité.

S'il y a trois points pefants A, B et C, il faut, dit de l'Hofpital, confidérer deux d'entre eux comme réunis dans leur centre d'ofcillation. L'exemple numérique qu'il propofe fait voir que cette règle doit être entendue comme fuit.

Le poids C donne un excès de quantité de mouvement $m_C (v - v_C)$. Il faut, pour calculer v_C, diftribuer cet excès fur l'axe O et fur le point P, centre d'ofcillation des points A et B. Le centre P reçoit donc la quantité $\frac{l_C}{L_{AB}} m_C (v - v_C)$ et lorfqu'on

ajoute cette quantité à celle que les points A et B possédaient déjà d'après le calcul précédent (c.à.d. $m_A v_A + m_B v_B$ ou $\frac{v}{L_{AB}} \sum_{AB} ml$), on obtient la quantité totale

$$\frac{v}{L_{AB}} \sum_{AB} ml + \frac{l_C}{L_{AB}} m_C (v - v_C).$$

Les points A et B ont maintenant, grâce à la liaison, les vitesses $v_A = \frac{l_A}{l_C} v_C$ et $v_B = \frac{l_B}{l_C} v_C$ respectivement.

On a donc l'équation $m_A \frac{l_A}{l_C} v_C + m_B \frac{l_B}{l_C} v_C = \frac{v}{L_{AB}} \sum_{AB} ml + \frac{l_C}{L_{AB}} m_C (v - v_C)$

$$\text{ou } v_C \left[\frac{m_A l_A + m_B l_B}{l_C} + \frac{m_C l_C}{L_{AB}}\right] = v \left[\frac{m_C l_C}{L_{AB}} + \frac{\sum_{AB} ml}{L_{AB}}\right] = v \frac{\sum_{ABC} ml}{L_{AB}}.$$

On en peut tirer $v_C = l_C v \frac{\sum_{ABC} ml}{\sum_{ABC} ml^2}$, d'où résultent aussi les vitesses v_A et v_B.

On en conclut, en raisonnant comme dans le cas de la Fig. 2, que $L_{ABC} = \frac{\sum_{ABC} ml^2}{\sum_{ABC} ml}$.

Et l'on obtient une formule analogue — c'est toujours la formule générale de Huygens pour le cas des pendules linéaires — en ajoutant encore un quatrième poids, etc. De l'Hospital dit donc à bon droit „que cette methode est generale, quel que soit le nombre des poids, & quelque inégalité qu'ils ayent entre eux".

Mais quel lecteur, de nos jours, considérera ce raisonnement comme convaincant? Quelle raison de l'Hospital peut-il avoir eue de croire à la justesse du résultat obtenu, si ce n'est que ce résultat s'accorde avec celui trouvé suivant la méthode de Huygens? C'est cette concordance seule qui lui permet de dire: „Il est aisé de conclurre de tout cecy, que le principe de Mr. Bernoulli est veritable". Considéré en lui-même ce principe, tel que de l'Hospital le formule, est si peu évident qu'avant d'avoir fait le calcul on le jugerait plutôt erroné.

Huygens dans ses „remarques sur la lettre précédente & sur le récit de Mr. Bernoulli dont on y fait mention" (Pièce XII, de 1690) a la politesse de ne point attirer l'attention sur la plus grande généralité de sa propre solution. Quoi que la démonstration du marquis, dit-il, „ne laisse pas de comprendre plusieurs choses qui peuvent

d'abord faire de la peine aux Lecteurs", il l'appelle „bonne & bien fondée". Il rappelle cependant ſon principe et ſe contente de dire: „Je croy que c'eſt *autant* en cela que conſiſte la cauſe phyſique, de ce que dans le pendule compoſé les poids A & B eſtant deſcendus conjointement au bas de leur vibration, n'acquierent pas enſemble autant de viteſſe, que s'ils eſtoient tombez ſeparément des mêmes hauteurs; qu'en ce que le poids A conſume une partie de ſon mouvement en agiſſant ſur le point fixe, ſuivant la demonſtration de Mr. Bernoulli & de Mr. le Marquis de l'Hoſpital".

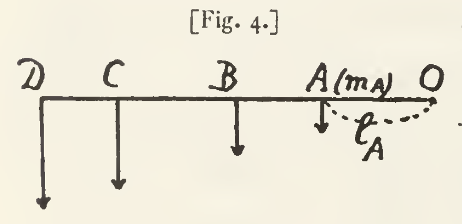
„Cette analyſe", dit Lagrange [1]), „fit revenir Jacques Bernoulli ſur la ſienne, et donna enfin lieu à la première ſolution directe et rigoureuſe du problème des centres d'oſcillation".

La ſolution de Huygens n'était-elle donc pas directe et rigoureuſe?

Bernoulli d'ailleurs, lorſqu'il recommença ſes efforts, ſuivit d'abord une méthode fort inférieure à celle de Huygens, et nullement plus parfaite que celle de l'Hoſpital. C'eſt ſans doute pour cette raiſon que Huygens n'a plus jugé néceſſaire de prendre part à la diſcuſſion.

Dans les Acta Eruditorum de 1691 (notre T. X, p. 214) Bernoulli propoſe de diſtribuer, lorſqu'il y a plus de deux points peſants, l'excès de l'accroiſſement de la quantité de mouvement de chaque point entre l'axe et le poids extrême! [2]). Ce ſingulier principe conduit encore une fois au réſultat exact — pour une ſérie de points ſitués en ligne droite bien entendu — mais c'eſt uniquement le ſuccès, nous ſemble-t-il, qui le juſtifie dans une certaine meſure.

[Fig. 4.]



Conſidérons un pendule [Fig. 4] chargé de quatre poids m_A, m_B, m_C, m_D.

Soit g l'accélération de la peſanteur, j_A, j_B, j_C, j_D les accélérations que les quatre poids ont réellement en partant du repos dans la ſituation indiquée. Par unité de temps le point A doit céder l'excès $m_A(g - j_A)$. Suivant l'hypothèſe le poids extrême D en reçoit la quantité $m_A \frac{l_A}{l_D}(g - j_A)$.

Ce poids reçoit donc en tout la quantité $\frac{g}{l_D} \sum\limits_{ABC} ml - \frac{l}{l_D} \sum\limits_{ABC} mlj$, et cet accrois-

[1]) Dans la ſection de la „Mécanique analytique" de 1788, citée à la p. 458 qui précède.

[2]) „... malo rem invertere, & pondus duntaxat extimum habere loco fulcri, quod ferat reliqua pondera omnia suis quæque locis vectem urgentia".

fement de quantité de mouvement par unité de temps doit être égal à l'accroiffement $m_D (j_D - g)$. Egalant ces deux expreffions, on trouve $\sum_{ABCD} ml(g-j) = 0$.

Cette équation exprime que la fomme des moments des excès des accroiffements des quantités de mouvement (difons plus brièvement: la fomme des moments des excès des forces) autour du point O eft nulle; mais une équation ou un énoncé de ce genre ne fe trouve pas encore dans l'article de Bernoulli.

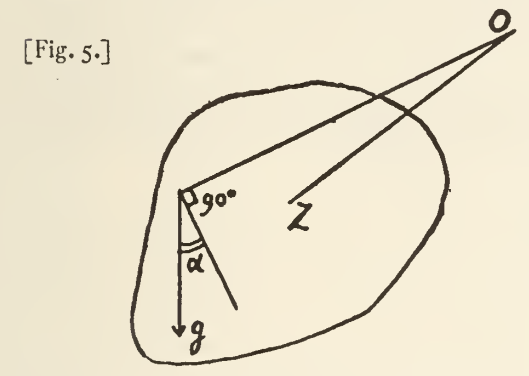
En vertu de la liaifon, j doit être proportionnelle à l. Donc $j = Cl$, où C eft une conftante. L'équation trouvée devient $\Sigma vml(g - Cl) = 0$, donc $C = g \frac{\Sigma ml}{\Sigma ml^2}$.

Mais la diftance L du centre d'ofcillation à l'axe doit être telle qu'on ait $g = CL$. Il en réfulte encore une fois $L = \frac{\Sigma ml^2}{\Sigma ml}$.

L'auteur a abfolument tort, nous femble-t-il, en ajoutant: „Hæc vero centri ofcillationis demonftratio fic reformata, uti generalis eft et facilis, inque Geometrica exactitudine Hugenianæ neutiquam cedit, fic eidem in eo præferenda videtur, quod principium vectis, quo nititur, indubitatum eft ac evidens, cum Hugeniana hypothefis obfcura fere fit, nec aliam ob caufam pro vera habeatur, quam quod nihil in contrarium afferri poteft, intellige in folidis corporibus" [3]).

Leibniz en janvier 1692 (T. X, p. 229) dit à bon droit que „Mr. Bernoulli a des penfées un peu embaraffées fur le centre d'ofcillation".

[Fig. 5.]



Ce n'eft que dans fon article de 1703, déjà cité à la p. 458 qui précède, que Jacques Bernoulli parvint à formuler généralement le principe qui ramène, en un certain fens, le problème confidéré à un problème de ftatique, préparant ainfi la voie à d'Alembert. Suivant ce principe $\Sigma\, ml\,(g \cos \alpha - j) = 0$ [Fig. 5], où la fomme ou intégrale des moments eft étendue à tous les points du pendule. Nous défignons par j l'accélération réelle dans le fens du mouvement. Quoique Bernoulli n'applique ce principe qu'au cas d'un pendule de forme fymétrique, on doit dire

3) L'auteur exprime enfuite fon doute fur la vérité du principe dans le cas des corps liquides. Il penfe — comme fon frère Jean — qu'à l'aide de corps liquides on peut conftruire un „perpetuum mobile".

qu'il a trouvé cette fois une méthode menant à la folution complète et qu'on peut juger équivalente à celle de Huygens. Mais en nous étendant fur cette matière, nous franchirions les limites qui conviennent à cette publication.

Le lecteur a déjà fait connaiffance avec les réflexions de Huygens de 1692 ou 1693 qui conftituent notre Appendice VI à la Pars Quarta de l'„Hor. ofc." (p. 433 qui précède). Dans cette Pièce qui n'a pas vu le jour, les „vires acquifitæ", proportionnelles au carré de la viteffe, jouent un plus grand rôle que dans la Pars Quarta.

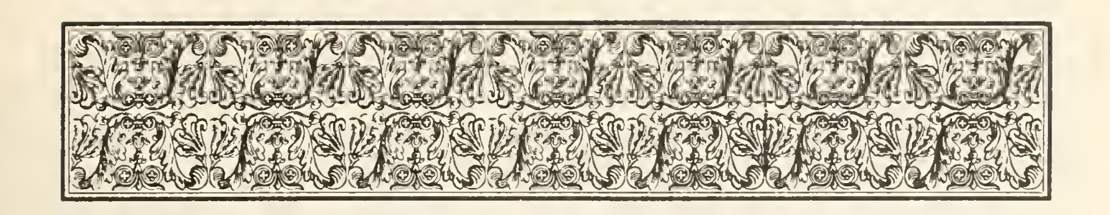
Dans le Chap. XIV de fon travail de 1727 (voir la note 2 de la p. 458 qui précède) — ce n'était d'ailleurs pas la première fois qu'il s'occupait de ce fujet — Jean Bernoulli trouve la place du centre d'ofcillation — en fe bornant an cas du pendule linéaire, ce qui n'était nullement néceffaire — en partant du principe que „la pefanteur produit dans la fomme des poids une quantité déterminée de force vive, de quelque manière qu'ils defcendent", en d'autres termes „que la fomme des forces vives des poids eft le même après que les poids font defcendus auffi bas qu'ils le peuvent, foit que ces poids defcendent conjointement attachés à une même ligne inflexible [difons plus généralement: foit que ces poids, ou points pefants, foient réunis en un affemblage rigide], foit que chacun de ces poids defcende librement, comme un pendule fimple". Ceci peut aifément être déduit du principe de Huygens et n'eft en fomme qu'une autre manière d'exprimer ce principe. Jean Bernoulli nous paraît avoir tort en difant „que le principe qu'employe M. Huygens, & qu'il propofe comme un axiome, étoit un peu trop hardi", mais qu'on ne fe fert nullement de „principes qui ne paraiffent pas toujours affez naturels" lorfqu'on „déduit de la feule confervation des forces vives, la détermination du centre d'ofcillation".

LA CONSERVATION DES FORCES.

I. Le „perpetuum mobile" du Marquis de Worcester.

II. La non-existence du mouvement perpétuel suivant Stevin.

III. La conservation des forces suivant Huygens.



Avertiſſement.

Huygens formule clairement la théorie de la conſervation des forces dans la Pièce III (p. 477) datant de février 1693. D'ailleurs il avait déjà dit en 1690 (T. IX, p. 456): „la loy eſt que les corps gardent la force qui faſſe monter leur centre commun de gravité à la hauteur d'ou il eſt deſcendu". Dans ce dernier énoncé il eſt apparemment queſtion de la „vis motus" ou „force vive", ſur laquelle on peut conſulter les p. 341, 359, 376 et 417 du T. XVI. Dans la Pièce III le ſens de l'expreſſion „vis" ou „vires" eſt un peu plus général: elle déſigne la „potentia", quelle qu'elle ſoit, capable d'élever un poids donné à une hauteur déterminée. Chez Deſcartes (T. XVI, p. 342) on trouve le mot „force" dans le même ſens.

Il faut donc une force déterminée pour élever un poids donné à une hauteur déterminée. Comparez le § 7 (datant de 1673, ou 1674) de la p. 493 qui ſuit. L'élévation du poids eſt l'„effectus" de la force. Huygens ne donne pas le nom de force à l'„altitudo ducta in gravitatem", c.à.d. au produit de la hauteur par le poids (T. XVI, p. 358, note 5 et p. 417) lequel meſure la force qui a produit l'élévation. Cependant, on peut dire que chez lui, quoiqu'il n'emploie pas cette expreſſion (T. XVI, p. 341, notes 4 et 5), la force, lorſqu'elle élève le poids, ſe conſerve potentiellement. En effet, le verbe „gardent" (l. 3 qui précède) indique que la force qu'un corps acquerra en deſcendant peut plus ou moins être conſidérée comme déjà exiſtante.

Dans ſa lettre de juillet 1690 (T. X, p. 439) Huygens n'accorde pas à de l'Hoſpital que ſon hypothèſe ſur le centre de gravité „ne ſoit pas aſſez ſimple ni aſſez evi-

dente pour être ſuppoſée ſans preuve [1]). Je n'en ſcay pas (dit-il) de plus certaine en mécanique". La raiſon de cette certitude, c'eſt que, ſi cette hypothèſe était fauſſe, le mouvement perpétuel ſerait poſſible [2]).

Ceci conduit naturellement à poſer la queſton de ſavoir juſqu'à quel point la non-exiſtence du mouvement perpétuel — on peut auſſi parler avec P. Duhem [3]) de la non-exiſtence des moteurs perpétuels, car il ne s'agit pas ici d'un mouvement périodique qui ſubſiſterait grâce à l'abſence abſolue de tout frottement, mais bien plutôt d'un mouvement périodique produiſant un certain travail — était pour Huygens une certitude.

Il paraît poſſible que, s'il dit, même après la controverſe avec Jacques Bernoulli et de l'Hoſpital (plus préciſément: en janvier 1693, dans une lettre à Leibniz) — comparez la note 7 de la p. 243 du T. XVII —, qu'il y a „touſjours quelque eſperance" de réaliſer le mouvement perpétuel „phyſico-mechanice . . . comme en emploiant la pierre d'aimant", c'eſt qu'il penſe qu'on pourrait peut-être ſe ſervir utilement des courants de matière magnétique [4]) qui circulent partout. Le ſyſtème conſidéré ne ſerait donc pas un ſyſteme fermé. Mais n'inſiſtons pas trop ſur cette idée: on pourrait objecter que dans ce cas il aurait dû enviſager également la poſſibilité d'utiliſer dans le même but les courants de matière ſubtile (cartéſienne) qui, ſelon lui, produiſent la peſanteur [5]).

Quoi qu'il en ſoit, dans le cas de la peſanteur Huygens n'admet aucunement la poſſibilité d'un moteur perpétuel: comparez ce qu'il dit à la p. 251 qui précède ſur les „novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur". Comme nous l'avons dit à la p. 45, en compoſant l'„Horologium oſcillatorium", il parlait et ſentait apparemment en phénoménologue bien plus qu'en partiſan des théories corpuſculaires.

---

[1]) Lagrange, à l'endroit cité plus haut (p. 442, note 1), parle au contraire d'un „principe précaire" qu'„il restait toujours à démontrer pour le mettre hors de toute atteinte".

[2]) Comparez la p. 461 qui précède.

[3]) P. Duhem „Les Origines de la Statique" (Paris, A. Hermann, 1905), I, p. 52: „La recherche du mouvement perpétuel est le nom générique par lequel on désigne deux utopies distinctes, la recherche du *perpétuel moteur* et la recherche du *perpétuel mobile*".

[4]) T. XVII, p. 270.

[5]) Voir la note 5 de la p. 45.

Notre Pièce II, de 1676, reproduit la célèbre démonſtration de 1586 de Stevin qui part de l'hypothèſe de la non-exiſtence du mouvement perpétuel pour déterminer la condition de l'équilibre de deux poids liés à une même corde et placés ſur deux plans inclinés. Il eſt remarquable que Huygens dit que cette démonſtration eſt la meilleure qu'on poſſède quoiqu'il en eût trouvé lui-même en 1659 une autre (T. XVI, p. 380) que nous avons cru pouvoir appeler (T. XVI, p. 333) „plus directe". Il eſt vrai que la démonſtration de Stevin eſt beaucoup plus ſimple et que celle de Huygens prouve au fonds la même choſe, ſavoir que par un mouvement compatible avec la liaiſon le centre de gravité du ſyſtème reſte à la même hauteur.

Cette Pièce ſuffirait à elle ſeule pour faire voir que, ſuivant Huygens, partir de la non-exiſtence du mouvement perpétuel — ou, ſi l'on veut, du principe de la conſervation des forces — eſt parfois, du moins juſqu'à nouvel ordre — remarquez dans la Pièce II les mots „nondum" et „hucusque" —, la meilleure méthode pour faire voir la raiſon d'être d'un phénomène connu, ou même pour trouver des vérités nouvelles. Nous avons dit (p. 460) que de ſon vivant l'Hypothèſe I de la Pars Quarta eſt reſtée la ſeule qui permît de trouver généralement la place du centre d'oſcillation.

Il en fut autrement dans la ſuite. Suivant la mécanique claſſique, ce monument merveilleux du dix-huitième ſiècle, la loi de la conſervation des forces eſt plutôt un corollaire qu'un principe[6]). C'eſt en nous plaçant au point de vue de la mécanique claſſique que nous avons pu dire (T. XVI, p. 21, note 7), que „le Principe de la conſervation de l'énergie" a pris à un moment donné „ſa forme définitive".

Comme on peut le voir à la p. 477 qui ſuit, Huygens en février 1693 déſigne ſa thèſe de la conſervation des forces par „axioma noſtrum". En ce moment il lui donne donc une place éminente, comme il avait ſongé parfois (voir la note 5 de la p. 221 du T. XVI) à le faire pour la thèſe de la conſervation de la quantité de mouvement dans une direction donnée, dont il dit en 1669 (T. XVI, p. 181) ne pouvoir donner la démonſtration que dans un cas particulier bien que cette loi „ſemble eſtre generale".

Cette déſignation de la thèſe de la conſervation des forces par le mot „axioma" eſt *peut-être* due en partie à l'influence de Leibniz: voyez la note 6 de la p. 359 du T. XVI, et conſultez auſſi la lettre de décembre 1692 de Leibniz — T. X, p. 382 —,

---

[6]) Voir la note 1 de la p. 470.

à laquelle celle de Huygens de janvier 1693, citée à la p. 470 qui précède, sert de réponse. Observons qu'en général la philosophie de Leibniz, là où elle prend un caractère métaphysique, est restée sans influence sur Huygens. Nous avons déjà fait (T. XVII, p. 353) une remarque analogue pour la métaphysique de Descartes.

La Pièce I ne consiste que dans une figure de 1667, qui illustre les „irritos conatus" des „machinatores" dont nous venons de parler. Elle nous paraît remarquable puisqu'elle représente un „conatum" du Marquis de Worcester[1]), que Huygens ne semble pas avoir connu, mais dont le nom se trouve dans son Journal de Voyage de 1663, comme on peut le voir à la p. 474 qui suit.

---

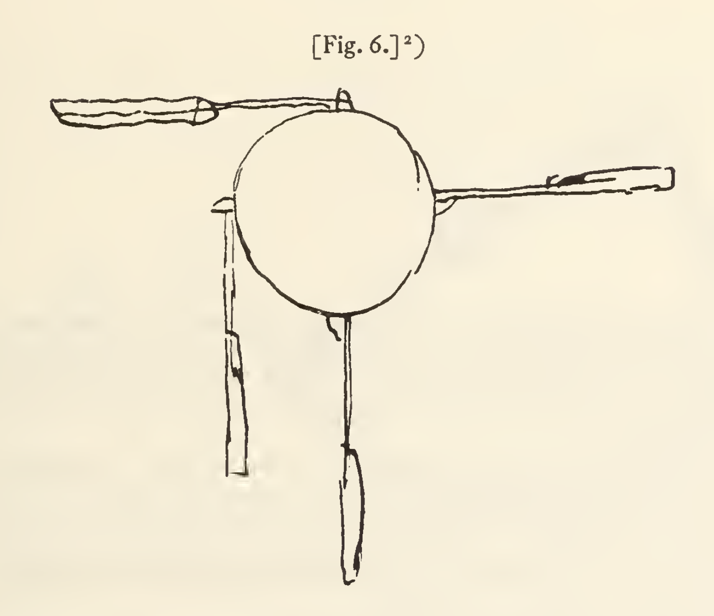
[1]) A moins que d'autres inventeurs n'aient eu la même idée indépendamment de lui, ce qui est fort possible.

I.

LE PERPETUUM MOBILE DU MARQUIS DE WORCESTER.

[1667.][1]

[Fig. 6.][2]



[1]) La figure 6 a été empruntée à la p. 147 du Manuscrit C. Elle n'est accompagnée d'aucun texte. Cette page date de 1667, puisqu'on trouve les dates de février 1667 et de mars 1667 respectivement sur les pages 143 et 149.

[2]) Le N°. 56 de „A Century of the Names and Scantlings of such Inventions as at present I can call to mind to have tried and perfected etc." par E Somerset, Marquis of Worcester (London, J. Grismond, 1663) décrit le *perpetuum mobile* suivant, qui part du même principe que celui figuré ici; il est vrai que chez Worcester le nombre des poids est beaucoup plus grand. Inutile de dire, que le marquis se vante à tort d'avoir inventé un véritable mouvement perpétuel. Si la machine a marché, il doit y avoir eu, nous semble-t-il, de la part de ceux qui la construisirent, quelque supercherie.

„To provide and make that all the Weights of the descending side of a Wheel shall be perpetually further from the Centre, then those of the mounting side, and yet equal in number and heft to the one side as the other. A most incredible thing, if not seen, but tried before the

late king (of blessed memory) in the Tower, by my directions. The Wheel was 14 Foot over, and 40 Weights of 50 pounds apiece... They all saw, that no sooner these great Weights passed the Diameter-line of the upper-side, but they hung a foot further from the Centre, nor so sooner passed the Diameter-line of the lower side, but they hung a foot nearer. Be pleased to judge the consequence".

Suivant H. Dircks „The Life, Times and Scientific labours of the second Marquis of Worcester, to which is added a reprint of his Century of Inventions, 1663, with a Commentary thereon" (London, B. Quaritch, 1865) la liste des personnes présentes fait voir que la machine a été montrée au Roi Charles I en 1641 environ. Ajoutons que Dircks a interverti sans aucune raison les mots „upper" et „lower"; il n'a apparemment pas compris l'auteur dont les explications sont d'ailleurs en général fort obscures.

Rien indique que Huygens ait lu le „Century of Inventions", mais il connaissait — consultez notre T. XVII — Caspar Calthoff (Kaltoff) appelé par Worcester dans la „Dedication to the Century": „the unparallel'd Workman both for trust and skill ... who hath been these five-and-thirty years as in a school under me imployed, and still at my disposal". Nous avons fait voir dans l'article de 1932 „De rol van den Nederlander Caspar Calthoff bij de uitvinding van het moderne stoomwerktuig", cité à la p. 550 du T. XVII, que ce fut ce même Calthoff qui résida à Dordrecht de ± 1645 à ± 1660.

Dans son Journal de Voyage de 1663 Huygens, se trouvant alors à Londres, écrit: „Calthoff besocht, daer d'inventie stont van Mil. of Woodster die misluckte", c.à.d. „Visité Calthoff, où se trouvait l'invention de Mil. Woodster [lisez Worcester], qui n'avait pas réussi". Comme il continue: „Op den houten toorn van het waterwerck geweest, etc." — c.à.d.: „monté sur la tour de bois de l'ouvrage-à-eau" —, il parle peut-être, probablement même, d'une invention différente. Mais Calthoff — qu'il connaissait au moins depuis 1655 — doit avoir causé avec lui sur d'autres sujets aussi.

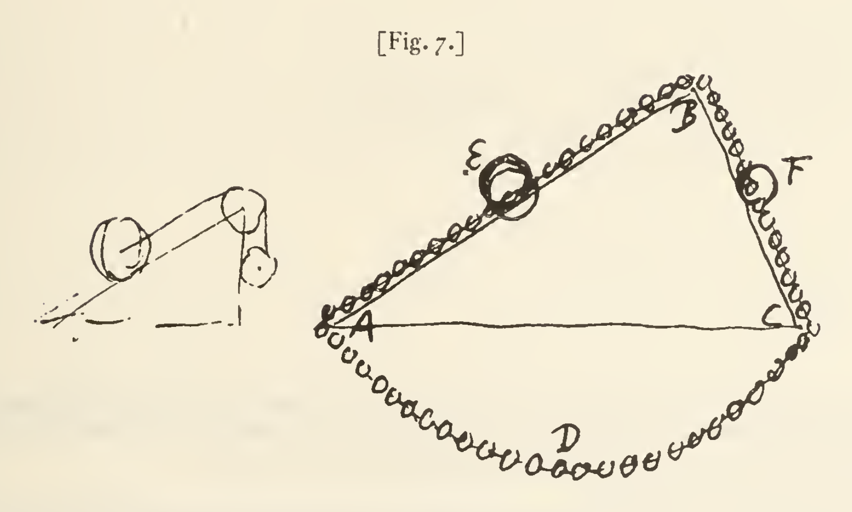
Le marquis de Worcester est sans doute une des personnes, évidemment nombreuses, visées par Huygens à la p. 251 qui précède dans le passage sur les inventeurs que nous venons de citer (p. 470).

II.

LA NON-EXISTENCE DU MOUVEMENT PERPETUEL SUIVANT STEVIN.

1676.[1]

[Fig. 7.]



À la p. 62 du Manuscrit E Huygens dit à propos du plan incliné:

Hujus vero nondum [2]) æque evidens demonſtratio reperta eſt ac noſtra illa libræ, quam explicuimus academicis Pariſinis [3]). Optima hucusque [2]) videtur illa Stevini [4]) qua catenam triangulo circundat; velut hic triangulo ABC [Fig. 7], cujus baſis AC horizonti parallela, injecta eſt catena ABCD. Hanc enim ſatis apparet ultro in neutram partem commovendam, eo quod, etiamſi moveatur, eodem loco maneat catena, neque hilum deſcendat, quatenus ex infinita multitudine particularum æqualium conflata intelligitur. Atqui pars catenæ ADC non magis attrahit partem BA quam BC.

---

[1]) La Pièce a été écrite (p. 61 du Manuscrit) Hagæ 1676 Oct.

[2]) Comparez sur ces mots l'Avertissement qui précède (p. 471).

[3]) Il s'agit de la démonstration contenue dans le mémoire dont nous avons parlé dans la note 6

Ergo cum catena immota maneat, ſequitur partium quoque BA et BC æquale eſſe momentum [5]); quamobrem et ablata parte ADC, partes AB, BC æquiponderabunt. Harum vero gravitates abſolutæ ita ſunt inter ſe ut ipſæ longitudines AB, BC. Ergo quando gravitates ponderum per plana AB, BC ſe mutuo trahentium ſunt inter ſe ſicut ipſorum planorum longitudines, apparet fieri æquilibrium.

Nihil autem intereſt an pondus lateris AB per totam ejus longitudinem diviſum ſit, an totum collectum in E; ſimiliterque pondus catenæ BC in F [6]).

de l'Appendice I à la Pars Quarta de l'„Hor. osc." Cet Appendice fait voir que Huygens avait d'abord l'intention, à laquelle il renonça, de fonder la démonstration de l'équilibre de la balance sur l'hypothèse de la non-existence du mouvement perpétuel.

[4]) Comparez la p. 333 du T. XVI.

[5]) Quoiqu'on puisse prendre ce mot dans le sens précis que nous lui donnons aujourd'hui — comparez la p. 341 du T. XVI —, il semble bien plus probable qu'il ait ici son sens général d'inclinaison au mouvement.

[6]) On sait que Stevin orne ses „Beghinselen der Weeghconst" de l'adage „Wonder en is geen wonder", ce qu'on peut traduire, nous semble-t-il, par: „Merveille n'est pas miracle" („en... geen" = „ne ... pas"). Dans la note 3 de la p. 79 du T. III nous avons généralement parlé de „la devise de Simon Stevin". En effet, son fils H. Stevin, en parlant en cet endroit du „spreeckwoort mijns Vaders", semble considérer cet adage comme l'énoncé d'une conviction bien arrêtée. Aux yeux de S. Stevin, pensons-nous, l'existence d'un vrai *eeuwig roersel* ou *perpetuum mobile*, quel qu'il fût, n'aurait été rien moins qu'un miracle. Son fils (T. III, p. 77) entreprend de prouver généralement la non-existence du mouvement perpétuel. Voici la traduction de la réponse de Huygens à sa lettre datant de 1660: „C'est une choſe de grande importance que votre entreprise de démontrer, dans cette brochure, l'impossibilité du *perpetuum mobile*. Je suis, moi aussi, fermement persuadé que le *perpetuum mobile* ne peut être trouvé *ratione mechanica*; de plus cela est en contradiction avec les principes que j'ai toujours suivis dans cet art. Mais il ne semble pas possible d'en donner une démonstration assez claire pour qu'il ne se trouve toujours des personnes recherchant cette chose impossible et tâchant de tromper la Nature".

III.

LA CONSERVATION DES FORCES SUIVANT HUYGENS.

[1693][1].

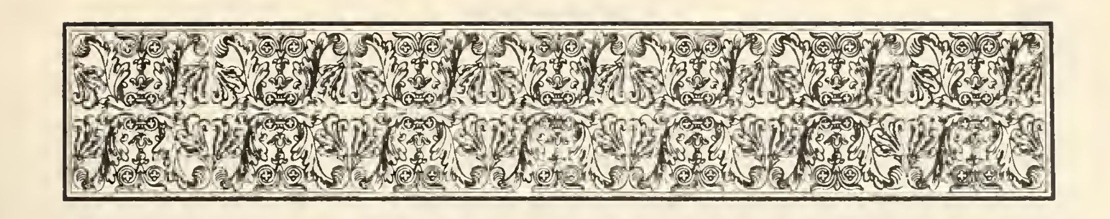
In corporum motibus quibuscunque, nihil virium perditur aut interit nisi effectu edito et exstante ad quem producendum tantundem virium requiritur quantum est id quod decessit. Vires voco potentiam extollendi ponderis. Ita dupla vis est quæ idem pondus duplo altius extollere potest.

[1]) Cette Pièce est empruntée à la p. 175 (numération de Huygens) du Manuscrit H. La p. 172 porte la date du 31 janvier 1693 et la p. 176 celle du 12 février suivant. À la p. 182 il parle de son *axiome* de la p. 175 („Ex axiomate nostro pag. 175 in margine vires corporum non interire nisi edito effectu &c.").

Ces pages du Manuscrit H traitent d'une horloge marine. On les trouve plus loin dans le présent Tome.

PRINCIPE DE L'INCITATION DONNÉE AUX CORPS PAR UN AGENT EXTÉRIEUR OU PAR UNE CAUSE INCONNUE, ET DÉCOUVERTE DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ISOCHRONISME DES VIBRATIONS.





Avertiſſement.

Dans un programme, datant d'avant 1673, que nous avons déjà mentionné dans la note 6 de la p. 247 du T. XVII (il eſt intitulé: „Ordre qu'on pourra tenir a traiter des Mechaniques") Huygens parle comme ſuit de la Statique et de la Dynamique [1]:

„Je voudrois traiter en ſuite de la Statique des corps ſurnageans à l'eau, et de leur poſitions ſuivant les diverſes figures, de quoy a eſcrit Archimede, l'on pourroit examiner ſon traitè, et auſſi celuy que j'en ay fait [2].

Je mettrois icy la ſtatique des poids ſuſpendus par pluſieurs cordes diverſement tirees, mais nous en avons traitè ſuffiſamment cy devant en noſtre Aſſemblee [3].

Il reſte les matieres qui regardent particulierement le mouvement qui ſont d'une contemplation plus difficile que toutes les autres et comme elles participent de la Phyſique, auſſi ſervent elles autant a cette partie de la Philoſophie qu'aux uſages de la Mechanique.

Il y a en premier lieu a eſtablir la theorie du mouvement des corps qui tombent, dans laquelle je crois qu'il faut ſe ſervir des hypotheſes qui menent aux propoſitions

---

[1]) Ce programme date probablement de 1668, puisqu'on trouve à la p. 218 du Manuscrit C une liste du même genre des „Parties des Mechaniques". Nous reviendrons sur ces programmes, lorsque nous traiterons, avec Huygens, de quelques questions techniques.

[2]) T. XI, Traité „De Iis quæ liquido supernatant".

[3]) Voir les p. 332—333 et 379 du T. XVI. Nous reviendrons sur cette question, à laquelle sont encore vouées plusieurs pages des Manuscrits.

qui s'accordent le mieux avec l'Experience [1]). D'icy dependent auſſi les mouvements des corps jettez et des boulets de canon fleſches &c.

De la meſme theorie depend le mouvement des pendules et la maniere de le rendre parfaitement egal, dont je donneray la demonſtration [2]).

La meſme ſert encore a demonſtrer les centres d'agitation [3]) que je pourray donner enſuite et par les quelles on peut determiner exactement une meſure univerſelle et inalterable a jamais [4]).

Il y a en fin a examiner les effects du mouvement circulaire et ſa force a rejetter du centre, dont j'ay a propoſer une Theorie qui s'accorde parfaitement avec les experiences [5]). Et duquel depend auſſi une belle experience qu'il y a a faire pour prouver que la terre tourne [6])".

Les Pièces I et II qui ſuivent ſe rapportent à la „contemplation" des „matieres qui regardent particulierement le mouvement" et „participent de la Phyſique, partie de la Philoſophie", en ſervant en même temps „aux uſages de la Mechanique". Comparez ſur ce „double but" les p. 32 et 76 qui précédent.

La Pièce II de 1675 contient des réflexions ſur le mouvement d'un corps ſous

---

[1]) T. XVII, p. 125—137, T. XVIII, p. 124—149.

[2]) T. XVI, p. 344—349 et p. 392—413, T. XVII, p. 95—96 et p. 139—141, T. XVIII, p. 150—203.

[3]) Au début de la Pars Quarta de l'„Hor. osc." Huygens parle des „centra oscillationis seu agitationis". Le sens précis de l'expression „centrum agitationis" pourrait être celui d'un point tel que la somme totale des moments des quantités de mouvement autour de ce point est nulle. C'est là p. e. le sens du mot „centre d'agitation" chez Mariotte lorsqu'il dit (Prop. XIX de la deuxième Partie du „Traitté de la Percussion ou Choc des Corps" — p. 93 des Oeuvres de Mr. Mariotte, T. I, Leide, P. van der Aa, 1717): „Les Centres de vibration [ou oscillation], agitation, & percussion sont un même point dans un triangle qui se meut sur sa base". Cependant nous n'oserions affirmer, puisque Huygens ne parle plus nulle part de cette question dans son livre, s'il a voulu indiquer que le centre d'oscillation jouit de la propriété dont nous venons de parler et sur laquelle on peut consulter les p. 443—445 qui précèdent.

On peut voir à la p. 454 du T. IX ce que Huygens dit en 1690 du Traité de Mariotte, sur lequel on peut aussi consulter les p. 207—209 du T. XVI.

[4]) T. XVI, p. 354—356, T. XVII, p. 120, T. XVIII, p. 58—59 et 348—355.

[5]) T. XVI, p. 235—328, T. XVII, p. 91, note 4, p. 153, 244 et 277, T. XVIII, p. 44—46 et 366—368.

[6]) T. XVI, p. 376—377, T. XVII, p. 247 et 285—286, T. XVIII, p. 46, troisième alinéa. Voir aussi ce qui est dit plus loin dans le présent Tome sur l'expédition de 1686—1687 au Cap de Bonne Espérance. L'avant-dernier alinéa de la p. 224 du T. XVI se rapporte au même sujet.

l'influence d'un agent matériel extérieur ou d'une caufe inconnue. C'eft d'une force qu'on peut appeler „newtonienne" — quoique Newton n'ait rien à y voir — qu'il s'agit ici, non pas de la force cartéfienne confidérée à la p. 469 qui précède. Le corps confidéré eft, peut-on dire, un point pefant. Suivant Huygens — ce qui n'était pas l'opinion de tout-le-monde; voir le troifième alinéa de la note 11 de la p. 453 qui précède — il ne faut pas de force pour qu'un mobile continue fon mouvement uniforme. Il eft apparemment queftion d'un mouvement uniforme *en ligne droite*. Lorfqu'une force agit fur un corps, elle lui donnera „continuellement de l'accélération".

Lorfque la force agiffant fur le mobile provient d'un moteur, elle n'eft pas toujours — même lorfqu'elle agit dans le fens du mouvement, ce qui a lieu ici par hypothèfe — la force totale de ce moteur, c.à.d. la force qu'il exercerait fi le corps était en repos dans la fituation confidérée; c'eft pourquoi il convient de diftinguer la force exercée de la force totale en l'appelant „incitation".

Le mot „incitatio" fe trouve d'ailleurs déjà dans la Pièce I de 1673[7]), dans laquelle il n'y a pas lieu de diftinguer à caufe du mouvement que le point pefant poffède déjà, la force exercée de la force totale. *Incitatio* y eft toujours la force agiffante, celle qui donne l'accélération, c.à.d. *la compofante de la force agiffante dans le fens du mouvement*. Il eft vrai qu'on peut auffi confidérer cette „incitatio" comme inhérente au corps (voir dans la quatorzième ligne de la p. 490 l'expreffion „incitationem quam haberet").

Huygens développe dans la Pièce I la théorie des vibrations harmoniques (pour employer ce terme) en les comparant — heureufe trouvaille — à des ofcillations cycloïdales; comparaifon d'où réfulte leur ifochronifme pour différentes amplitudes; il comprenait que les incitations provenant de caufes différentes (pefanteur, élafticité, etc.) font équivalentes, comme le dit l'avant-dernier alinéa de la p. 497, ainfi que l'Hypothèfe de la page fuivante par laquelle fe termine la Pièce II.

Jufqu'à préfent les hiftoriens n'ont pas fignalé Huygens comme le premier favant qui ait développé la théorie des vibrations harmoniques. Nous ignorons d'ailleurs s'il a jamais fait part de fa trouvaille à qui que ce foit[8]). Il a certainement caufé avec Leibniz

---

[7]) Ou 1674.

[8]) Comparez la note 2 de la p. 246 du T. XVII.

fur ce fujet, puifque ce dernier écrit dans fa lettre du 2 mars 1691 (T. X, p. 52): „M. Newton n'a pas traité des loix du reffort; il me femble de vous avoir entendu dire autres fois que vous les aviés examinées, et que vous aviés demonftré l'ifochronifme des vibrations". C'eft donc pendant le féjour de Leibniz à Paris, c.à.d. bientôt après fa découverte [1]), que Huygens en a fait part au philofophe allemand; mais fans entrer dans les détails. Dans fa réponfe du 26 mars 1691 Huygens fe contente d'écrire: „J'ay une demonftration de l'fochronifme des vibrations du reffort, eftant fuppofè qu'il cede dans la mefme proportion de la force qui le preffe, comme l'experience l'enfeigne conftamment [2])".

En 1691 Huygens n'eût cependant trahi aucun fecret en difant de quelle façon il avait paffé de la confidération de la vibration cycloïdale à celle de la vibration harmonique quelconque, puifqu'on trouve la même chofe dans les „Philofophiæ naturalis Principia mathematica" de 1687 de Newton: fuivant le Corollaire à la Prop. II, Theor. XVIII du Liber Primus de ce dernier, dans le cas du mouvement cycloïdal la compofante de la force agiffant dans le fens du mouvement eft proportionnelle à l'arc que le point pefant doit parcourir pour atteindre le point le plus bas; d'où réfulte, comme le dit déjà l'énoncé du théorème, que „ofcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora" [3]). La différence effentielle c'eft que Huygens, dans fon „Hor. ofcill.", avait prouvé d'une autre façon le tautochronifme de la cycloïde, et que, conftatant enfuite que la force agiffante eft proportionnelle à l'écart, il en avait conclu à l'ifochronifme des vibrations harmoniques quelconques; tandis que Newton, après avoir remarqué la proportionnalité de la force à l'écart dans le même cas fpécial, en déduifit par un raifonnement fur les accélérations et les viteffes, le tautochronifme de la cycloïde ainfi que la propriété analogue des vibrations quelconques où la force eft proportionnelle à l'écart [4]). Il eft de toute évidence que c'eft la lecture de l'„Hor. ofc." qui a amené Newton à confidérer l'ofcillation cycloïdale, mais fon idée de

---

[1]) Comparez la note 9 de la p. 195 du T. XVI.

[2]) T. X, p. 58. Dans la lettre il ne fait pas mention, comme dans la minute (p. 55), de Robert Hooke.

[3]) Newton considère une oscillation cycloïdale — nous dirions hypocycloïdale — dont celle de Huygens est un cas particulier. Comparez la fin de la note 2 de la p. 399 qui précède.

[4]) Attendu que l'hypocycloïde, comme Newton le remarque, peut dégénérer en une ligne droite, l'isochronisme des vibrations harmoniques suivant une droite résulte immédiatement de celui des oscillations hypocycloïdales.

prouver de cette façon le tautochronifme peut fort bien avoir été originale [5]): rien n'indique — quoique cela foit évidemment poffible — que la penfée de Huygens ait été divulguée, ni avant, ni après 1687.

Il eft vrai que 's Gravefande écrit dans fes „Phyfices Elementa mathematica Experimentis confirmata, five Introductio ad Philofophiam Newtonianam" de 1742 que dans le cas de la cycloïde la force agiffante eft proportionnelle à l'arc [6]) et que les vibrations d'une lame élaftique font ifochrones puifqu'on peut dire „laminam agitari juxta Leges Penduli in Cycloide ofcillati" [7]), à quoi il ajoute: „Hugenius detexit laminæ elafticæ vibrationes effe æquè diuturnas" [8]), mais ces remarques éparfes ne font nullement voir qu'il s'agit ici d'une théorie dont Huygens fut l'auteur. Nous ne croyons donc pas que 's Gravefande ait remarqué la „Pièce I" dans les manufcrits de Huygens; de fait, comme nous l'avons déjà obfervé à la p. II du T. I, il s'eft borné, en fa qualité d'éditeur de Huygens, à reproduire les ouvrages déjà imprimés, fans tenir compte en aucune façon des manufcrits, dont le contenu femble lui être refté abfolument inconnu.

Il eft donc à peu près fuperflu de dire que ni 's Gravefande ni, fauf erreur, aucun autre auteur, n'indique que Huygens eft le premier favant qui ait entrepris de donner une théorie mathématique des cordes vibrantes [9]). Cette théorie, il eft vrai, n'eft qu'une ébauche, mais c'eft une ébauche méritoire [10]).

---

[5]) D'aileurs, dans la Prop. XXXVIII, Theor. XII du Liber Primus, Newton avait déjà démontré d'une autre façon l'isochronisme des vibrations harmoniques suivant une droite. Il y considère la droite comme la limite d'une ellipse; or, suivant la Prop. X, Probl. V du même livre les périodes de toutes les ellipses qu'un mobile peut décrire sous l'influence d'une force émanant d'un centre et proportionnelle à la distance du mobile à ce centre (lequel est en même temps celui des ellipses), sont les mêmes.

[6]) N°. 414, Lib. I, Cap. XX, p. 111.

[7]) N°. 1335, Lib. II, Cap. XIII, p. 384.

[8]) Nous citons d'après la troisième édition, celle de 1742 (Leidæ, apud Joh. Arn. Langerak, Joh. et Herm. Verbeek). La dernière phrase citée est empruntée à la p. XXVIII de la Præfatio de cette édition. Elle ne se trouve pas dans les préfaces des deux éditions antérieures, lesquelles sont reproduites dans la troisième.

Il semble bien que s'Gravesande, en mentionnant „Hugenius" et la „lamina elastica", ne parle que de résultats expérimentaux.

[9]) Voir cependant ce que nous disons plus loin du Père I. G. Pardies.

[10]) On trouve dans les Philos. Transact. de 1713 („The Philosophical Transactions from the Year MDCC to the Year MDCCXX, Abrig'd etc. by Benj. Motte", London, R. Wilkin etc. 1721,

Dans le § 6 de la Pièce I, Huygens parle auſſi de ſes expériences ſur ce ſujet. Il ne dit pas ſi c'était chez lui ou bien à l'Académie qu'il les avait priſes.

Avant lui, Merſenne en avait pris un grand nombre, comme on peut le voir dans ſes „Harmonicorum libri, in quibus agitur de ſonorum natura, cauſis, & effectibus: de Conſonantiis, Diſſonantiis, Rationibus, Generibus, Modis, Cantibus, Compoſitione, orbisque totius Harmonicis Inſtrumentis" [1]). Il avait établi expérimentalement un grand nombre de théorèmes. La Prop. XXIX de la p. 24 p.e. dit que les vibrations de différentes amplitudes d'une même corde, ayant une tenſion donnée, ſont iſochrones. En effet, la hauteur des ſons forts et faibles eſt la même: il ſuffiſait donc de comprendre que ce qui fait la hauteur du ſon, c'eſt le nombre des vibrations. La Prop. IX de la p. 12 dit que les vibrations de deux cordes du même genre de longueurs inégales ſont iſochrones lorſque les tenſions ſont entre elles comme les carrés des longueurs. Etc.

C'eſt de la conſidération des cordes vibrantes — qui formaient déjà dans l'antiquité le ſujet des recherches de Pythagore [2]) et de Ptolémée — que l'auteur de l'„Harmonie Univerſelle" [3]) paſſa à celle d'autres mouvements oſcillatoires [4]). C'eſt lui qui avait dirigé (T. XVI, p. 349, T. XVIII, p. 243) les regards du jeune Huygens ſur le mouvement périodique des pendules. Grâce à Huygens nous voyons ici, par un juſte retour, la théorie des cordes vibrantes profiter des réſultats obtenus dans le domaine des pendules.

Vol. I, p. 53) l'article théorique de Brook Taylor „Of the Motion of a stretcht String", où l'auteur établit, en s'inspirant de l'ouvrage de Newton, que „vibrationes omnes, tam maximæ quam minimæ, peragentur in eodem tempore periodico, & puncti cujusvis motus similis erit oscillationi corporis Funependuli in Cycloide". C'est croyons-nous, la première théorie mathématique sur la corde vibrante après celle, restée inconnue, de Huygens de 1673. Voir encore, dans les Additions et Corrections, un passage de Leibniz qui se rapporte à ce sujet.

Le résultat du calcul est que la corde est isochrone avec un pendule de longueur $\frac{d^2}{c^2} \cdot \frac{N}{P} \cdot L$, où $\frac{c}{d} = \pi$, tandis que P est la tension, N le poids et L la longueur de la corde. Il en résulte pour le temps d'une vibration simple $t = \sqrt{\frac{mL}{P}}$, m étant la masse de la corde, conformément à la dernière formule de la note 3 de la p. 494 qui suit.

[1]) Lutetiæ Parisiorum, G. Baudry, 1648. C'est la deuxième édition latine amplifiée, la première étant de 1636.

[2]) Ou des Pythagoriciens.

[3]) De 1627. Le titre de cet ouvrage exprime la connexion avec l'ouvrage („Harmonika") de Ptolémée.

Cependant il y a une réserve à faire sur la priorité de Huygens. Il est juste d'ajouter qu'il connaissait dès 1673 l'ouvrage de I. G. Pardies, apparu simultanément avec l'„Horologium oscillatorium" et dont l'auteur, professeur à Paris au „Collège de Clermont", décéda immédiatement après cette publication. Nous parlons de „La Statique ou Science des Forces mouvantes" (citée e.a. dans la note 4 de la p. 304 du T. VII). Dans sa Préface Pardies se dit „résolu de faire tout un corps de Mécanique". Il parle de six „discours", dont „La Statique" est le deuxième. „Le cinquiéme discours", dit-il, „est du mouvement de Vibration, c'est à dire, de tous les corps qui font un mouvement réciproque allant & venant, comme font les pendules, les cordes tendues, les ressorts, & plusieurs autres corps. L'on y décrit une pendule, dont toutes les vibrations sont d'une égale durée; l'on démontre aussi que toutes les vibrations d'une corde tendue durent également; que les vibrations de deux cordes d'égale grosseur, & également tendues, sont en raison réciproque des longueurs des cordes, au lieu que dans les pendules elles sont seulement en raison sous-doublée; que dans les cordes égales, les vibrations sont en raison sous-doublée des forces ou des poids qui les tendent; que les vibratîons sont encore en raison sous-doublée des grosseurs des cordes d'égale longueur, & également tendues. Desorte que l'on démontre par les causes tout ce que l'expérience nous fait remarquer dans les sons & dans l'harmonie des cordes tendues".

On ne sait ce que sont devenus les manuscrits de l'auteur, ni s'il avait déjà rédigé ce cinquième discours en tout ou en partie. Son programme fait voir que probablement, comme Huygens, il passa, d'une façon ou d'une autre, de la considération des pendules à celle des vibrations harmoniques; ce qui est d'autant plus croyable qu'il avait trouvé, et publié à la fin de „La Statique", une ingénieuse démonstration du tautochronisme de la cycloïde. Il n'est pas impossible — quoiqu'on n'en trouve rien chez lui — qu'il ait remarqué, en réfléchissant sur cette démonstration, que la composante de la pesanteur qui agit dans le sens du mouvement est proportionnelle à l'arc, ce que nous avons appelé plus haut (p. 483) la trouvaille de Huygens [5]).

Vers la fin du premier chapitre du „Traité de la Lumière" de 1690 Huygens parle,

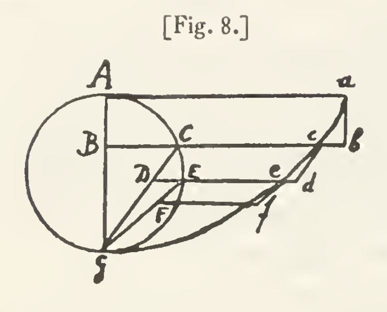
---

[4]) Nous ne parlons pas ici de l'influence de Galilée qui — soit dit en passant — était le fils d'un musicien distingué.

[5]) En 1673 Huygens écrit à Oldenburg à propos de cette démonstration (T. VII, p. 314) que

à propos du fixième difcours de Pardies qui eft du mouvement d'Ondulation etc., de fon Traité „dont il me fit voir une partie et qu'il ne put achever, étant mort peu de temps après". (Il ignore „fi fon écrit s'eft confervé"). Il eft donc poffible que Pardies ait auffi caufé avec Huygens fur les fujets du cinquième difcours, ou même qu'il lui en ait fait voir une partie déjà rédigée.

[Fig. 8.]



„ce n'est pas grande chose .... d'avoir fait la démonstration d'une proposition desia trouvée". Cependant la démonstration de Pardies nous paraît assez remarquable. Il suppose (en observant aussi qu'on peut perfectionner le raisonnement en enfermant le temps total dont il s'agit entre deux limites) que le point pesant parcourt successivement [Fig. 8] les droites *ab*, *cd*, *ef*, etc. — tangentes à la courbe — égales et parallèles à AB, CD, EF, etc., où $AB = \frac{1}{n} AG$, $CD = \frac{1}{n} CG$, $EF = \frac{1}{n} EG$, le nombre arbitraire *n* pouvant être pris fort grand. Un mobile M_1 partant de *a* parcourra l'élément *ab* dans le même temps qu'un mobile M_2, partant de *c*, parcourra *cd*, ou un mobile M_3, partant de *e*, l'élément *ef*. De plus M_1 parcourra ensuite *cd* dans un temps égal à celui nécessaire à M_2 pour parcourir *ef*, etc. Tous les mobiles, de quelque point qu'ils partent, finiront par se rejoindre au point G.

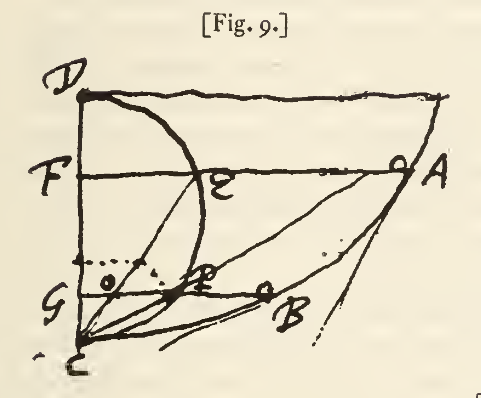
Dans l'exécution de ce calcul il faut faire usage de ce que l'accélération avec laquelle un élément tel que *cd* est parcouru, est proportionnelle à CG, donc aussi à la longueur de l'arc cG, double de CG, ou du moins d'un raisonnement qui suppose implicitement cette proportionnalité.

I.

DECOUVERTE DE LA THEORIE GENERALE DE L'ISOCHRONISME DES VIBRATIONS.

[1673 ou 1674][1])

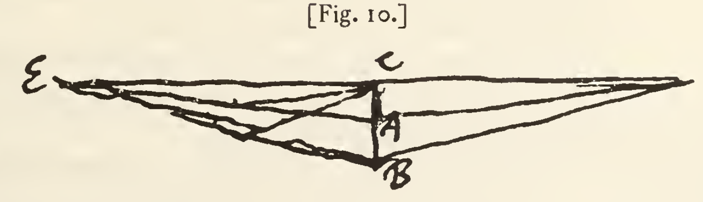
[Fig. 9.]



§ 1. Si arcus cycloidis AC [Fig. 9] dividatur utcunque in B, erit gravitas ponderis in A ad gravitatem ejusdem in B positi ut arcus AC ad arcum BC.

Eſt enim gravitas in A ad gravitatem in B ut gravitas ſuper plano EC ad gravitatem ſuper plano PC. hoc eſt ut PC ad OC, hoc eſt ut EC ad PC, hoc eſt ut arcus AC ad arcum BC [2]). quod erat demonſtrandum.

[Fig. 10.]



§ 2. CB eſt ∞ 2CA [Fig. 10] [3]).

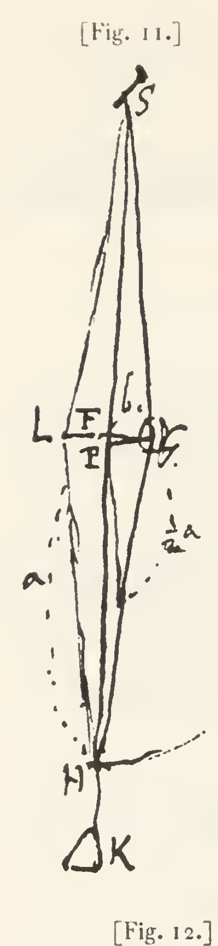
---

[1]) La Pièce, que nous jugeons être de 1673, est empruntée aux p. 411—415 du Manuscrit D. La p. 391 porte la date „ult. Jul. 1673". La première date du Manuscrit E est le 19 décembre 1674. Nous divisons la Pièce en §§.

[2]) Huygens savait depuis longtemps (voir la p. 367, datant de 1659, du T. XIV) que l'arc CB [Fig. 9] est le double de la droite CP parallèle à la tangente en B; mais il ne paraît avoir remarqué qu'après la composition de l'„Hor. osc." le théorème qu'il énonce ici, savoir que la composante du poids qui produit l'accélération est, dans le cas de la cycloïde, proportionnelle à l'arc correspondant se terminant au sommet. Or, comme il avait démontré l'isochronisme des vibrations dans le cas de la cycloïde, il put en conclure — voir le § 3 qui suit — que dans d'autres cas aussi où la force accélérante est proportionnelle à l'écart, la période doit être indépendante de l'amplitude.

[3]) Huygens considère ici une corde horizontale impondérable portant au milieu un point pesant

[Fig. 11.]



S'il demeure en B en tournant, il n'a que faire de faire le tour en si peu de temps que quand il demeure en A, c'est à dire qu'il ne luy faut pas double vitesse, puis qu'un moindre poids que double de celuy qui tient la corde en A est capable de la tenir en B. Donc les plus grands tours sont plus lents que les moindres. Mais en tant que les cordes EA, EB sont censees egales, les tours par B et par A sont isochrones.

§ 3. Ponatur pondus *G* æquale *K* [Fig. 11]. quæritur ratio temporis per GF ad tempus casus perpendicularis per FH [1]).

AD [2]) ∞ $\frac{1}{2}b$. Unde arcus AE ∞ FG ∞ b [Fig. 12]. Atqui ut tempus per arcum cycloidis EA sit æquale tempori per GF [Fig. 11] oportet esse CA + AD − b + $\frac{1}{2}a$ ∞ $\frac{1}{2}$GH nam GH censetur æqualis FH quia FG minima. Iamque incitatio ponderis in *G* [3]) erit ad incitationem quam haberet in perpendiculari descendens ut FG ad $\frac{1}{2}$GH. ex legibus mechan.

Ergo et AD + AB − b + $\frac{1}{2}a$

− $\frac{1}{2}b$ + $\frac{1}{4}a$

Sed AD est $\frac{1}{2}b$. Ergo BA ∞ $\frac{1}{4}a$.

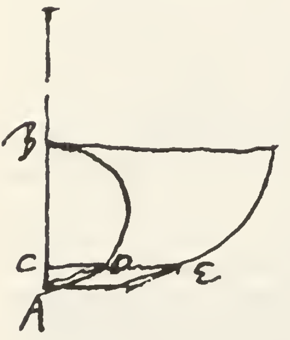
Est autem tempus per EA ad tempus per BA ut semicircumferentia BDA ad BA. Et tempus per BA ad tempus per FH ut 1 ad 2, quia dictum est BA esse $\frac{1}{4}a$ sive $\frac{1}{4}$FH.

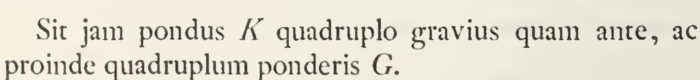
Ergo ex æquo, tempus per EA seu per GF ad tempus per FH ut semicircumferentia BDA ad duplam BA, sive ut quadrans circumferentiæ ad diametrum BA.

Ergo vibrationis integræ GL tempus ad tempus par FH ut semicircumferentia ad diametrum.

Ergo tempus vibrationis integræ GL æquale tempori semioscillationis [4]) penduli longitudinem duplam FH habentis. hoc est tempori semioscillationis penduli SH.

[Fig. 12.]





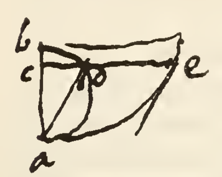
Sit jam pondus *K* quadruplo gravius quam ante, ac proinde quadruplum ponderis *G*.

Jam quadruplo etiam, quam ante, majori pondere opus esset ad tenendam chordam inflexam angulo SGK.

Ergo pondus *G* jam quadruplo majori vi quam ante incitatur, tam in principio lineæ GF, quam in singulis ejus punctis proportionaliter.

A ou B décrivant autour du point C des circonférences de cercle: la tension est si grande qu'il

[Fig. 13.]



Ergo percurrit GF eodem tempore quo arcum *ea* [Fig. 13] cycloidis alterius æqualem ipſi FG, in cujus arcus principio *e* quadruplo magis incitetur quam in principio arcus EA prioris cycloidis.

Oportet igitur *ac* quadruplam eſſe AC [Fig. 12] et *ad* ∞ AD. ſic enim arcus *ea* æqualis fiet arcui EA, et incitatio in *e* ſive per rectam *da* erit quadrupla incitationis in E ſive per rectam DA. Jam vero cum *ca*, *ad*, *ab* ſint proportionales apparet *ba* eſſe $\frac{1}{4}$BA. Ideoque arcum *ea* percurri dimidio temporis quo percurritur arcus EA.

Ergo et GF, exiſtente pondere *K* quadruplo ponderis *G*, duplo minori tempore peragetur quam ante cum pondus *K* ipſi *G* æquale eſſet.

Igitur qualicunque poſita ratione ponderis *K* ad *G*, habebit tempus ſemioſcillationis penduli SH ad vibrationem integram GL rationem ſubduplicatam ponderis *K* ad *G* [5]).

Ergo etiam ſi viciſſim velimus ut manente eodem pondere *K* vibrationes duplo celeriores fiant, oportet in *G* unam quartam prioris ponderis relinqui.

§ 4. Quæritur proportio temporis ambitus circularis per circumferentiam cujus

---

n'est besoin de tenir compte que de la force centrifuge (et centripète). Si cette force etait absolument proportionelle à l'écart, il y aurait isochronisme des vibrations de différentes amplitudes d'après les Prop. I et III sur la force centrifuge (voir la p. 366 qui précède).

1) La corde tendue SGH est supposée impondérable; ou, si l'on veut, c'est une corde dont le poids, fort considérable, est supposé concentré en son point milieu. La corde étant verticale, la tension de la partie SG est supérieure à celle de la partie GH. Dans le § 1 Huygens ne tient pas compte de cette circonstance; il suppose la force agissant sur le poids *G* dirigée vers le centre du mouvement F. Mais dans le § 6 il revient sur ce sujet pour apporter la correction nécessaire. Le poids se meut ici, par hypothèse, suivant la droite GFL.

2) La corde (Fig. 12).

3) C.à.d. la composante, dans le sens du mouvement, de la force agissant sur le poids *G*. Comparez l'Avertissement qui précède.

4) Il s'agit de la moitié d'une oscillation simple.

5) Il résulte de ce calcul que dans le cas considéré — lorsqu'on ne tient pas encore compte de la correction nécessaire; voir les notes 1 de la p. 491 et 5 de la p. 493 — le temps de la vibration simple, de G à L, est $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{G}{K}}$, où g est l'accélération de la pesanteur et $l = 2a$ la longueur de la corde. *K* est la tension de la corde, et *G* son poids concentré en son point milieu. En appelant — ce que Huygens ne fait point; comparez la note 5 de la p. 230 du T. XVI — m la masse du poids *G*, on peut écrire $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{ml}{K}}$.

diameter minima GL, ad tempus casus per FH. vel potius ad tempus semioscillationis penduli SH.

Si incitatio ponderis in G esset æqualis gravitati ipsius G vel K, deberet tempus circuitus in circulo GL esse æquale duabus oscillationibus penduli longitudinis FG. per theorema . . .[1]) nostrum de vi centrifuga. Nunc autem incitatio in G est ad pondus absolutum G ut FG ad $\frac{1}{2}$GH, hoc est ut b ad $\frac{1}{2}a$. (nam GH censetur æqualis FH). Ut igitur fiat vis centrifuga æqualis incitationi seu pressioni chordæ flexæ super pondus G. debet fieri sicut b ad mediam proportionalem inter b et $\frac{1}{2}a$, hoc est, sicut b ad $\sqrt{\frac{1}{2}ab}$ ita tempus duarum oscillationum penduli FG ad tempus circuitus per circulum GL. Sit tempus oscillationis unius penduli FG, ∞ n. Ergo $\frac{2n\sqrt{\frac{1}{2}ab}}{b}$ ∞ tempus circuitus per circulum GL.

Verum ut b ad $\sqrt{2ab}$ ita tempus oscillationis penduli FG ad tempus oscillationis penduli SH. Ergo hoc tempus erit $\frac{n\sqrt{2ab}}{b}$.

Erat autem tempus circuitus per circulum GL ∞ $\frac{2n\sqrt{\frac{1}{2}ab}}{b}$ seu $\frac{n\sqrt{2ab}}{b}$.

Ergo hoc tempus circuitus æquale tempori oscillationis penduli SH. ac proinde per ea quæ pag. præced. [2]) duplum temporis vibrationis GL [3]).

§ 5. Poteram pagina præced. [2]) brevius sic rationem colligere.

Est autem tempus per EA æquale tempori semioscillationis penduli duplam longitudinem BA habenti[s], hoc est longitudinem $\frac{1}{2}a$, nam BA est $\frac{1}{4}a$. Ergo et tempus per GF æquale eidem semioscillationi penduli 2BA sive $\frac{1}{2}a$.

Sed hæc semioscillatio est ad semioscillationem penduli SH ut 1 ad 2. Ergo tempus per GF æquale dimidio semioscillationis penduli SH. Ergo tempus totius vibrationis GL æquale semioscillationi penduli SH. vel oscillationi penduli dimidiæ longitudinis FH.

---

[1]) Voir le théorème X à la p. 367 qui précède, ou bien la Proposition identique du Traité „De Vi Centrifuga" à la p. 291 du T. XVI.

[2]) C.à.d. par le § 3.

[3]) Huygens ne calcule ici la période d'une vibration circulaire que pour le cas où la tension K et le poids G sont égaux. Il est évident qu'il eût pu tout aussi bien considérer le cas où cette égalité n'existe pas et qu'alors aussi il serait arrivé à la conclusion que le temps d'une vibration circulaire — c'est le cas déjà considéré dans le § 2 — est le double de celui de la vibration simple dans le cas du § 3. Cette période est donc, d'après ce théorème et la note 5 de la p. 491, $T = 2t = \pi\sqrt{\frac{ml}{K}}$.

§ 6[4]). Si experimentum capiatur hujus rei, non ſuccedet ſi filum SH perpendiculari ſitu tendatur, quia pondus *G* præter incitationem à tenſione quam facit *K*, incitatur etiam velut pendulum a perpendiculari SF extractum, hoc eſt velut ſi in plano inclinato, ad SG perpendiculari, jaceret.

Ad inſtituendum ergo experimentum deberet SH horizontali poſitu jacere, et pondus *G* alio præterea filo perpendiculari longiſſimo ſuperne diſtineri, ut ne infra rectam SH deſcendere poſſet. pondus autem *K* ipſi *G* æquale ſuper trochleam appendendum.

Si tamen manente SH perpendiculari ſcire libeat tempus vibrationis GL, addenda eſt incitatio quæ ponderi *G* ex ratione penduli SG advenit ad incitationem a flexu SGH ac pondere *K* effectam, et ſicut ſumma hæc ad mediam proportionalem inter hanc ſummam et incitationem a pondere *K* ita erit tempus vibrationis GL ſupra definitum ad tempus verum vibrationis GL.

Incitationum rationes inter ſe ſic colliguntur. Sit GP perpendicularis GS [Fig. 11]. Ergo incitatio ponderis *G* quatenus SG penduli vicem obtinet, eſt ad pondus abſolutam *G* ut PF ad PG, ſeu ut FG ad GS ſive FS, nam hæ æquales cenſentur. Sed incitatio ex pondere *K* erat ad pondus abſolutum *G* ut FG ad $\frac{1}{2}$FH vel $\frac{1}{2}$FS. Ergo incitatio ex ratione penduli dimidia eſt incitationis ex pondere *K*.

Ergo ſumma duarum incitationum ad incitationem ex pondere *K* ut 3 at 2. Eſtque inter 3 et 2 media proportionalis $\sqrt{6}$.

Ergo ut $\sqrt{6}$ ad 2, ita tempus vibrationis GL ante inventum ad tempus verum vibrationis GL.

Sed tempus vibrationis GL ante inventum æquale erat oſcillationi penduli dimidiæ longitudinis FH.

Cujus penduli oſcillatio eſt ad oſcillationem penduli quod $\frac{2}{3}$ habeat ſuæ longitudinis, ſeu $\frac{2}{3}$FH, ſicut $\sqrt{6}$ ad 2. Ergo pendulum cujus longitudo $\frac{1}{3}$FH iſochronas oſcillationes habebit vibrationibus GL veris[5]). Quod cum experimentis prorſus conſentit.

7[6]). Sit celeritas puncti gravis A [Fig. 14], cum ex A in B venerit x. celeritas

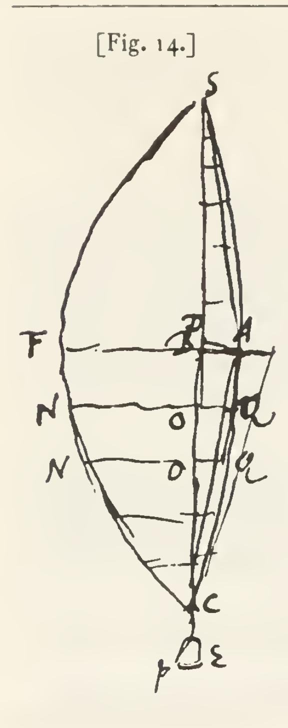
---

[4]) Voir la fin de la note 1 de la p. 491. Nous ne possédons pas la relation des expériences dont il est question dans ce §. Comparez, sur des expériences de ce genre, le premier alinéa de la p. 265 du T. XVII.

[5]) Le temps d'une vibration simple dans le cas de la Fig. 11, les poids *G* et *K* étant égaux, n'est donc pas $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ — comparez la note 5 de la p. 491 —, mais $\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

[6]) Apparemment, Huygens considère ici une corde vibrante: ce n'est pas seulement le point ou élément A dont la „gravitas" est θ, mais tous les autres éléments ont le même poids, ou, si l'on veut, la même masse; c'est ce qu'indique le mot „catena". Comme dans le § 3 (p. 490), Huygens commence par considérer le cas où $n\theta$ (poids de la corde divisée en n éléments) est égal au poids p qui tend la corde.

[Fig. 14.]



autem quæ acquireretur casu ex altitudine AB, sit *c*. Et linea AB sit *b*. AC ∞ *a*. pondus E ∞ *p*. gravitas puncti A sit θ. Et divisa intelligatur catena SAC in tot partes ut una sit ad omnes sicut pondus θ ad pondus *p*.

Jam ut qu. *cc* ad qu. *xx* ita erit AB ∞ *b* ad $\frac{bxx}{cc}$ altitudinem ad quam ascenditur celeritate *x*. Sit ista $\frac{bxx}{cc}$ æqualis BF [1]).

Jam si curva SFC sit ejus naturæ ut applicatæ FB, NO sint inter se ut quadrata applicatarum AB, QO [2]), (ponitur autem SAQC parabola a qua insensibiliter differt [2])) referent omnes NO altitudines ad quas ascenditur per celeritates acquisitas punctis singulis catenæ SAC cum erit in recta SC.

Itaque singulæ NO in singulas gravitates θ ductæ, summa productorum omnium debebit æquari producto ex pondere *p* in descensum ponderis E, qui descensus æquatur $\frac{4}{3}$BD bis hoc est $\frac{8}{3}$BD. quia parabolam SAC eodem modo hic metimur ac si arcus circuli foret [3]).

---

[1]) Puisque $c = \sqrt{2gb}$ — g étant l'accélération de la pesanteur — on a BF $= \frac{x^2}{2g}$. De même ON $= \frac{x'^2}{2g}$, si nous appelons x' la vitesse avec laquelle l'élément Q atteint le point O.

[2]) Huygens fait apparemment, outre l'hypothèse que la forme de la corde vibrante, dans sa position extrême, est à peu près une parabole, celle que tous les éléments de la corde exécutent des vibrations harmoniques: les vitesses x, x' etc. avec lesquelles ils atteignent les points B, O, O, sont alors entre elles comme AB, QO, QO. D'après la note 1 BF : ON $= x^2 : x'^2$; donc aussi BF : ON $=$ AB^2 : QO^2.

Comme Huygens ne rend pas compte de ces hypothèses, nous ne tâcherons pas non plus de le faire. Il est possible qu'il ait songé à une forme sinusoïdale de la corde: voir la p. 528 qui suit, où il dit que la „linea sinuum" diffère peu de la parabole.

[3]) C'est, peut-on dire, une application de la loi de la conservation des forces (comparez le deu-

xième alinéa de la p. 471 qui précède), le produit du „poids" p par le carré de sa vitesse étant supposé trop petit pour être pris en considération. Il est dommage que Huygens n'ait pas exécuté le calcul qui suppose évidemment les longueurs NO non seulement *proportionnelles*, mais *égales* aux plus grandes hauteurs que les différents éléments de la corde pourraient atteindre en s'élevant séparément avec les vitesses x, x', etc.

S'il avait entrepris d'exécuter le calcul, il aurait peut-être été amené à considérer nettement la question des unités; il aurait pu dire qu'en formant le produit des „singulæ NO [proportionnelles aux carrés des vitesses, d'après la note 2] in singulas gravitates θ ductæ", il faut prendre $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ — voir le deuxième alinéa de la note 6 de la p. 359 du T. XVI —, où m est le poids divisé par l'accélération g de la pesanteur.

En appelant t le temps d'une vibration simple, l la longueur et M la masse de la corde, et en répresentant par u le plus grand écart d'un élément de la corde de sa position d'équilibre — écart qui est égal à b pour le milieu de la corde —, on a $v = \frac{\pi u}{t}$

et $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}l} v^2 \frac{M}{l}\, dy = \frac{M\pi^2}{lt^2}\int_0^{\frac{1}{2}l} u^2 dy$. Or, la valeur de cette intégrale est, pour une forme parabolique de la corde, $\frac{4}{15} b^2 l$. La „vis motus" est donc $\frac{4\pi^2}{15}\frac{Mb^2}{t^2}$. En l'égalant à l'„altitudo ducta in gravitatem", c.à.d. au produit du poids p qui est Mg — puisque le poids tendeur est ici supposé égal à celui de la corde —, on a $\frac{4\pi^2}{15}\frac{Mb^2}{t^2} = Mgh$, h étant la différence entre la longueur de la corde vibrante considérée dans sa position extrême et celle de la corde géométrique qui la soustend. Cette différence est d'après Huygens $\frac{4}{3}[\sqrt{l^2 + 4b^2} - l]$ — comparez la p. 107 qui précède — ou $\frac{8}{3}\frac{b^2}{l}$, puisqu'elle est supposée fort petite. Substituant $h = \frac{8}{3}\frac{b^2}{l}$ dans l'équation précédente, on en peut tirer $t = \frac{\pi}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

En supposant le poids tendeur (ou la tension) K — nous écrivons K au lieu de p pour nous conformer aux formules de la note 5 de la p. 491 et de la note 3 de la p. 492 — quelconque, nous aurions obtenu $t = \frac{\pi}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{Ml}{K}}$, ce qui s'accorde fort bien avec la valeur actuellement considérée comme correcte $t = \sqrt{\frac{Ml}{K}}$. Comparez la fin de la note 10 de la p. 485.

Le calcul de la „vis motus" du poids tendeur fait voir que celle-ci est en effet négligeable lorsque l'écart b est fort petit en comparaison de la longueur l.

II.

PRINCIPE DE L'INCITATION DONNEE AUX CORPS PAR UN AGENT EXTÉRIEUR OU PAR UNE CAUSE INCONNUE.

[1675 ou 1676][1])

Un corps qui a acquis une certaine viteſſe de mouvement, continue d'aller avec cette meſme viteſſe, s'il n'y a rien qui agiſſe a diminuer ſon mouvement, ni rien qui l'incite de nouveau.

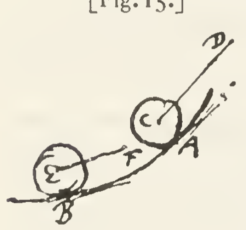
Si quelque choſe agit continuellement a diminuer le mouvement d'un corps, qui eſt en mouvement, il perdra peu a peu de ſa viteſſe.

Et au contraire ſi quelque choſe agit continuellement ſur un corps en le pouſſant du coſtè vers le quel il ſe meut deſia, ſon mouvement recevra continuellement de l'acceleration.

La force qui agit ſur un corps pour le mouvoir quand il eſt en repos ou pour augmenter ou diminuer ſa viteſſe quand il eſt en mouvement, je l'appelleray incitation.

Quand on conſidere la viteſſe du moteur qui cauſe l'incitation, comme infiniment grande en comparaiſon de la viteſſe qui eſt dans le corps meu ou a mouvoir, alors la quantitè de l'incitation a chaſque inſtant de ſon mouvement ſe meſure par la force qu'il faudroit emploier pour empeſcher le corps de commencer a ſe mouvoir, a l'endroit ou il ſe trouve, et dans la direction qu'il a. Soit par ex. une boule [Fig. 15] qui deſcende par une ſurface courbe AB, moins inclinée à l'endroit A qu'en B. L'incitation de cette boule en A ſera egale a la force qu'il faut pour la retenir a cet endroit par la corde CD parallele a la tangente de la ſurface A qui eſt dans le plan vertical. Et l'incitation de la meſme boule en B, ſera egale a la force qu'il faut

[Fig. 15.]



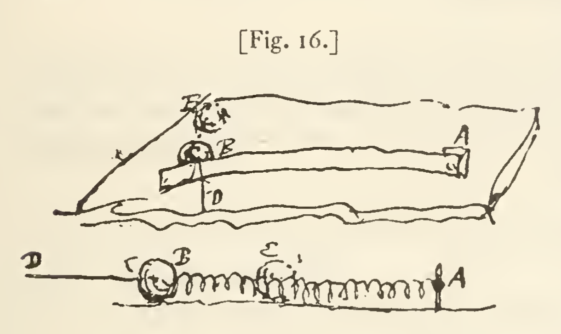
[1]) La Pièce est empruntée aux p. 41—42 du Manuscrit E. Les p. 36 à 39 portent toutes des dates de février 1675, et la p. 58 celle de décembre 1675; mais la p. 40 contient la phrase: „En quitant Paris le prem. Jul. 1676, pour aller en Hollande . . ." (déjà imprimée à la p. 416 du T. VII).

Les trois premiers alinéas ont été biffés par Huygens, sans raison apparente.

pour la retenir a cet endroit par la corde EF parallele a la tangente en B. Et ces incitations ſont les meſmes ſoit que la boule commence a ſe mouvoir ou qu'elle ſoit deſia en mouvement, parce que la gravitè agit comme par une viteſſe infiniment grande en comparaiſon du mouvement que l'on ſuppoſe dans la boule.

J'appelleray incitation parfaite celle qui eſt ainſi cauſée par un principe d'infinie viteſſe. Ce qui cauſe la reſtitution des reſſorts, *agit auſſi par une viteſſe extremement grande* [2]), comme il paroit par le mouvement ſoudain des reſſorts qui ſe debandent [Fig. 16], et par la viteſſe de leur vibrations qui ſeroit comme infinie ſi ce n'eſtoit le poids des reſſorts meſmes qui la diminue. C'eſt pour cela que le reſſort de l'air comprimè eſt plus prompt qu'aucun autre, parce que le poids de l'air eſt tout a fait petit.

[Fig. 16.]



Lors donc qu'un corps et [3]) pouſſè ou tirè par un reſſort pour le mettre en mouvement, ou pour accelerer celuy qu'il a deſia acquis, ſon incitation a chaque point de ſon chemin ſe meſure auſſi par la force qu'il faudroit a cet endroit pour l'empeſcher de commencer à ſe mouvoir dans la direction que luy imprime le reſſort. Soit [Fig. 16] le reſſort AB attachè en A, et forcè hors de ſa poſition naturelle, et qu'il pouſſe ou tire le corps C. L'incitation de ce corps en B ſera egale a la force qu'il faudroit pour l'arreſter a cet endroit directement contre l'effort du reſſort [4]). Et cette incitation eſt la meſme ſoit que le corps C commence a eſtre mis en mouvement ou qu'il en ait deſia acquis; pourveu toutefois que l'on conte [5]) pour rien le poids du reſſort comparè au poids du corps. car autrement il faut conſiderer que c'eſt l'incitation du compoſè du corps et du reſſort enſemble.

Il eſt manifeſte par ce qui eſt dit juſqu'icy que les incitations d'un corps quoyque cauſees par differentes cauſes, comme peſanteur reſſort vent attraction d'aimant ou autre, peuvent eſtre egales l'une a l'autre.

L'incitation parfaite d'un corps qui demeure conſtamment egale comme celle de la peſanteur ſur un corps qui deſcend perpendiculairement ou par un plan inclinè je l'appelleray incitation uniforme.

---

[2]) Leçon alternative: „est de cette mesme nature".

[3]) Lisez: „est".

[4]) Expression équivoque: ce n'est pas pour *arrêter* le corps contre l'effort du ressort qu'il faut une force déterminée; mais c'est pour le *maintenir*, *dans la situation considérée*, *dans l'état de repos*. Comparez la Fig. 15 où une force égale à l'incitation retient la boule déjà immobile.

[5]) Lisez: „compte".

L'incitation parfaite, mais qui s'augmente continuellement je l'appelleray incitation croiſſante. Et celle qui diminue continuellement decroiſſante.

incitations differentes uniformes et corps egaux.
quel temps par des eſpaces egaux.
incitations egales ſur des corps inegaux [1]).

Hypothèſe.

Deux corps eſtant poſez egaux, et parcourant des lignes egales avec des incitations qui ſoient egales entre elles a chaque deux points egalement avancez dans les deux lignes, quoyque les incitations des corps vienent de cauſes differentes, les deux lignes ſeront parcourues en des temps egaux.

[1]) Si Huygens avait pris la peine de développer le programme contenu en ces trois lignes, il aurait pu parvenir à distinguer nettement l'un de l'autre le poids et la masse d'un même corps, et plus généralement à dire que les incitations agissant sur des mobiles libres sont entre elles comme les produits des quantités de matière par les accélérations. Comparez les 7 dernières lignes de la p. 45 qui précède.

APPLICATION PRATIQUE AUX HORLOGES DE DIFFÉRENTS MOUVEMENTS VIBRATOIRES PLUS OU MOINS ISOCHRONES.

I. L'application de janvier 1675 du ressort spiral régulateur aux balanciers des montres.

II. L'application de décembre 1683 des vibrations de torsion aux horloges marines (pendulum cylindricum trichordon).

III. Premier projet, de 1683 ou 1684, du „balancier marin parfait" de 1693.

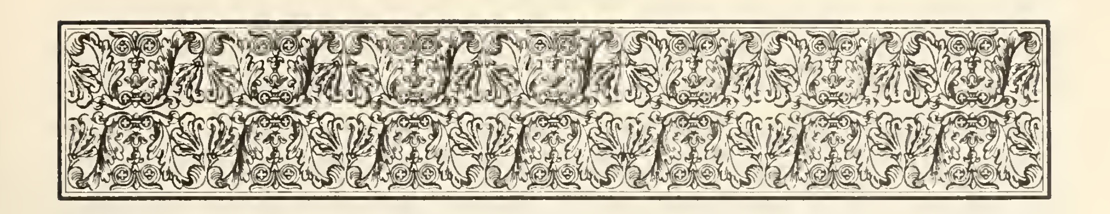
IV. L'application du pendule triangulaire, datant déjà de 1671, à une horloge marine, construite vers 1685, cette dernière étant un remontoir à ressorts.

V. Le „balancier marin parfait" de janvier-février 1693.

VI. La „libratio isochrona melior præcedente" de mars 1693.

VII. La „libra isochronis recursibus" de mars 1694.

VIII. La dernière horloge marine de 1694.



Avertiffement.

Nous avons vu (p. 483 et fuiv.) que bien peu de temps après la publication de l'„Horologium ofcillatorium" Huygens comprit que, fi la cycloïde a le pouvoir de rendre ifochrones les ofcillations du pendule fimple, elle ne poffède pas cependant le monopole du tautochronifme. Le poffède-t-elle pour le cas du point matériel ofcillant fous l'influence de la pefanteur conftante et agiffant fuivant des droites parallèles? C'eft une queftion que Huygens ne s'eft pas pofée, paraît-il, en ce temps [1]). Ce qu'il aperçut clairement en 1673 c'eft que dans *tous* les cas où, comme dans celui de la cycloïde, l'incitation (comparez la p. 483) qui tend à ramener le mobile vibrant vers fa pofition d'équilibre, eft proportionnelle à l'écart, la période fera également indépendante de l'amplitude. Témoin les cordes vibrantes des inftruments muficaux (p. 490)

[1]) En juillet 1691 les frères Bernoulli parlent (T. X, p. 119) d'une infinité de courbes, autres que la cycloïde, „per quas descendens grave oscillationes peragat isochronas", et Huygens écrit en novembre 1691 (T. X, p. 191) qu'il n'y voit „pas d'impossibilité". Quoiqu'il ne soit pas absolument certain que les Bernoulli et Huygens entendent parler ici du cas de la pesanteur constante et agissant suivant des lignes parallèles — puisqu' à la p. 119 nommée Jacques Bernoulli cite Newton; comparez la note 5 de la p. 168 du T. IX — il est fort possible que Huygens ait cru devoir admettre la possibilité d'oscillations isochrones aussi dans des cas, inconnus à-lui-même, où la force ramenant le mobile vers la position d'équilibre ne serait *pas* proportionnelle à l'écart. Voir cependant à la p. 584 qui suit, le passage de 1693 où il dit que pour que les oscillations soient „exactè isochronæ", elles *doivent* être comme il résulte des considérations sur le „motus in cycloide".

dont le tautochronisme s'expliquait désormais par l'analogie de leur mouvement avec celui du pendule cycloïdal. Or, des cordes vibrantes aux ressorts (p. 497), il n'y a qu'un pas (p. 487).

Les ressorts étaient fort connus comme moteurs des horloges. L'idée de s'en servir aussi pour régler leur mouvement se présenta tout naturellement à l'esprit de Huygens lorsqu'il eut découvert la raison d'être du tautochronisme de plusieurs genres de vibrations — évidemment en admettant, pour les vibrations élastiques, la loi formulée par R. Hooke dans un écrit de 1678 par les mots „ut tensio sic vis" [1]) —, et qu'il put donc abandonner la cycloïde sans en abandonner le principe. C'est apparemment à sa découverte théorique qu'il fait allusion, sans se trahir, en disant dans son article de février 1675 dans le Journal des Sçavans (T. VII, p. 424) que le „mouvement [des montres à ressort spiral régulateur] est réglé par un principe d'égalité, de même qu'est celui des pendules corrigé par la Cycloïde". On pourrait objecter qu'il n'est pas absolument évident ce qu'il faut entendre par l'incitation censée proportionnelle à l'écart, lorsqu'il s'agit du mouvement *rotatoire* d'un balancier dû à un ressort spiral (figure de la p. 425 du T. VII): dans le cas de la cycloïde il n'est question que d'un point matériel se mouvant suivant une *ligne*. Il était pourtant fort naturel de supposer que l'expérience ferait voir généralement, entre certaines limites, le tautochronisme non seulement des ressorts droits, c.à.d. hélicoïdaux (p. 497), mais aussi des ressorts spiraux, et que ce tautochronisme admettrait une explication théorique analogue à celle donnée pour les vibrations harmoniques linéaires du point matériel. Voir à ce sujet la p. 512 qui suit.

Il y avait une autre considération également forte qui induisit Huygens à tourner en janvier 1675 ses regards vers le ressort régulateur des balanciers: c'est que l'idée de régler leur mouvement par des ressorts n'était nullement nouvelle. Nous l'avons déjà dit à la première page du présent Tome (p. 3), en renvoyant le lecteur à la note 7 de la p. 159 du T. XVII, où il est question d'une invention française. Dans son mémoire de juillet 1674 adressé à l'Académie des Sciences J. de Hautefeuille parle aussi, en faisant mention de Pardies (ligne 5 d'en bas de la p. 459 du T. VII; comparez la p. 487 qui précède), de l'application d'un ressort au balancier des mon-

---

[1]) Voir la note 24 de la p. 525 du T. VII, le troisième alinéa de la p. 94 du T. IX et la note 2 de la p. 484 du présent Tome.

[2]) T. VII, p. 517. En 1675, après la publication de Huygens, il parle (p. 518) de son idée „of

tres. En Angleterre R. Hooke dit en 1675 avoir eu depuis longtemps cette idée qu'il conſidéra toujours comme ſienne par excellence [2]).

En parlant d'une „conſidération également forte", nous diſons d'ailleurs plus que nous ne ſavons, plus même que Huygens n'a pu ſavoir: qu'il s'agiſſe d'autrui ou de nous-mêmes, ni la force des motifs qui déterminent à l'action, ni celle des idées qui en engendrent d'autres, ne peuvent être meſurées par nous, quel que ſoit notre déſir d'être objectifs. La découverte théorique de Huygens ne vint peut-être qu'ὀτρύνειν ſa penſée πάρος μεμαυῖαν [3]): il eſt poſſible que déjà avant 1673 il ait ſongé à s'occuper lui-même de la queſtion du reſſort régulateur, puiſqu'il dit en ſeptembre 1675 (T. V, p. 486) que dès 1660 — voir la note ſuivante — il ne trouvait pas bonne la manière d'appliquer le reſſort qu'il avait vue en France et qu'il en ſavait déjà en ce temps „de beaucoup meilleures".

Ce que nous croyons comprendre, c'eſt qu'après ſa découverte théorique — reſtée, paraît-il, inconnue en ce moment à tout-le-monde; comparez les dernières lignes de la p. 483 — il était enclin à conſidérer le reſſort ſpiral régulateur du balancier comme une invention due entièrement à lui-même. D'ailleurs, il ſemble — quoique nous ne ſachions pas au juſte de quoy s'occupait en 1660 l'horloger Martinot inſpiré par le duc de Roanais et Bl. Paſcal [4]), ni ce que d'autres horlogers français [5]), ou R. Hooke, ont pu concevoir — que juſque là on n'avait guère ſongé à régler le mouvement du balancier des montres qu'à l'aide de reſſorts hélicoïdaux, ce qui eſt autre choſe: ſi de Hautefeuille [6]) avait eu connaiſſance de l'application d'un reſſort ſpiral

---

applying Springs *to the arbor* [comme Huygens: nous soulignons] of the Ballance of a Watch".
Voir sur la priorité de Huygens les remarques de Leibniz citées dans la note de la p. 454 du T. VII. Ces „Remarques sur le discours de Mr. H[enry] S[ully] touchant la manière de gouverner les Horloges à Pendule et les montres à spirale" se trouvent dans le livre de Sully „Regle artificielle du Temps, ou Traité de la division naturelle & artificielle du Temps: Des Horloges & des Montres de differentes Constructions: De la maniere de les connoître & de les regler", Paris, 1717. Comme Sully le dit dans cet ouvrage, il l'avait montré à Leibniz, à Vienne, avant l'impression (Leibniz mourut en 1716). Voir sur Huygens et Sully la p. 520 qui suit.

3) Homère, l'Iliade, Livre XXII, v. 186. Comparez la note 1 de la p. 516 qui suit.

4) Voyez la note 7, déjà mentionnée dans le texte, de la p. 159 du T. XVII. Dans son Journal de Voyage, dont il est aussi question dans cette note, Huygens écrit: „11 [Nov. 1660]. Martinot l'horloger me vint veoir, parla de l'invention du ressort au lieu de pendule". Martinot faisait grand cas de sa construction (T. IV, p. 264—265).

5) Voir la fin de l'avant-dernier alinéa de la p. 442 du T. VII.

6) J. de Hautefeuille se servait de ressorts hélicoïdaux (voir la figure de la p. 449 du T. VII). Comparez la p. 413 du T. VII (horloge de d'Alesme). L'histoire du „ressort en spirale appliqué par un bout à la pendule" (T. VII, p. 412) n'est pas claire.

aux balanciers avant 1675, il aurait dû le dire dans le „Factum" des p. 439 et fuiv. du T. VII. Le 30 janvier (T. VII, p. 400) Huygens envoya l'anagramme de fon invention à Oldenburg. Nous pouvons nous figurer fon indignation lorfque Thuret, à qui était due la réalifation pratique de l'échappement (p. 407 et 410 du T. VII) — Huygens n'avait pas conftruit de modèle, comme il le faifait en d'autres occafions [1]) — eut la prétention d'y avoir eu quelque part [2]). Dans fa lettre du 20 février 1675 à Oldenburg (T. VII, p. 422) Huygens lui donne l'explication de l'anagramme, puifque, dit-il, par „la mauvaife foy" de Thuret „le fecret ne s'en eft pas bien gardé".

Huygens obtint le 15 février 1675 (T. VII, p. 419) pour la France un privilège pour les horloges portatives tant fur terre que fur mer, qu'il avait demandé dix jours auparavant (T. VII, p. 401), mais il dut renoncer à le faire enregiftrer (T. VII, p. 416). Les Etats de Hollande et de Weft-frife lui accordèrent le 25 feptembre 1675 pour 15 ans un octroi pour les horloges marines nouvellement inventées, mais pas encore conftruites; voir la p. 523 qui fuit. Fort probablement (voir les premières lignes de la p. 411 du T. VII, et comparez les p. 7 et 20 du préfent Tome) fon père a fait valoir fon influence auprès des Etats. Les mêmes Etats lui accordèrent le 27 feptembre (p. 524) un octroi, également pour 15 ans, pour les horloges de poche. Les termes de cet „appointement" reffemblent beaucoup à celui du 4 octobre fuivant des Etats-Généraux fur le même fujet, que nous avons déjà publié à la p. 507 du T. VII [3]).

Le défir de conftruire des horloges exactes — principalement en vue de la détermination des longitudes — était fi vif que les concurrents fe paffionnaient tout naturellement [4]). D'autre part nous comprenons que le père Conftantijn, toujours maître

[1]) Comparez la note 9 de la p. 32 qui précède.

[2]) Nous regrettons pourtant de ne pouvoir appliquer ici le fameux précepte: „Audi et alteram partem"; car, quant à la lettre de Thuret de septembre 1675 (T. VII, p. 498), où il dit n'avoir eu aucune part à l'invention, il est assez évident qu'il n'avait pas la liberté de ne pas l'écrire. Voir sur les prétentions de Thuret le deuxième alinéa de la p. 408, le quatrième alinéa de la p. 412, le deuxième alinéa de la p. 415, le deuxième alinéa de la p. 421, ainsi que la p. 435 du T. VII.

À la p. 484 du T. VII Huygens parle de certaines relations entre Thuret et de Hautefeuille.

[3]) Nous ne pensons pas que Huygens ait demandé dans les diverses provinces l'„attache" dont il est question à la fin de ce document. L'archiviste d'Arnhem nous a fait savoir que l'attache n'a apparemment pas été accordée (ni demandée) en Gueldre. Comparez sur les attaches la p. 78 du T. XVII.

[4]) Voir sur les réclamations de R. Hooke la note 1 de la p. 422, la note 7 de la p. 423, ainsi que

de lui-même, annota ſur la lettre de ſon fils où celui-ci, parlant de Thuret, donne libre carrière à ſa colère [5]) — Conſtantijn eût pu donner le même conſeil à R. Hooke dont il appréciait également les grands mérites [6]) — les paroles claſſiques bien appropriées à la circonſtance: „Ne ſævi, magne ſacerdos" [7]).

Après le mois de novembre 1675, où il fait ſon éloge [8]), Huygens ne parle plus jamais de Thuret [9]).

À la Haye S. Ooſterwyck fabriqua en 1676 des montres à reſſort *droit* (c.à.d. ſans doute hélicoïdal) que Huygens (T. VIII, p. 11) appelle „les ouvrages de la plus nouvelle façon". Mais nul n'ignore que le reſſort ſpiral a fini par prévaloir.

L'application du reſſort ſpiral régulateur au balancier des montres peut avoir lieu de pluſieurs manières différentes. On peut attacher les palettes, qui frappent la roue

---

les p. 427, 455, 468—472, 475, 477, 481, 482, 489, 499, 506, 510, 513, 514 et 516—552 du T. VII. Comparez aussi le Chap. X („The Balance Spring") de „The Evolution of Clockwork" par J. Drummond Robertson, cité e. a. à la p. 60 qui précède.

5) Lettre d'août 1675 à Constantijn frère (T. VII, p. 484).

6) Voir sa lettre anglaise du 8 août 1673 à R. Hooke („De briefwisseling van Const. Huygens", éd. J. A. Worp, T. VI, la Haye, 1917, p. 330). Comparez la p. 432 du T. VII (lettre de mars 1657 de Const. H. à H. Oldenburg).

7) Virgile, l'Enéïde, Livre VI, v. 544: „Ne sævi, magna sacerdos".

8) Voir la p. 542 du T. VII.

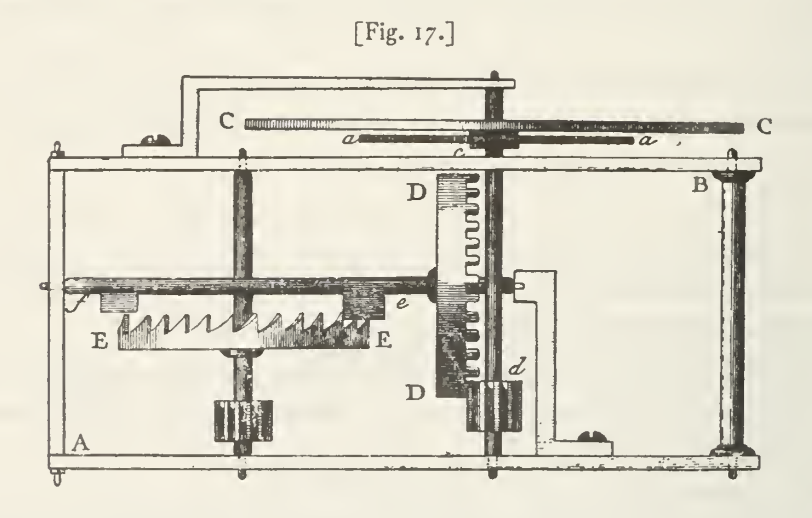
9) Isaac Thuret est mentionné plusieurs fois dans les „Comptes des Bâtiments du Roi, sous le règne de Louis XIV (1664—1687)", Paris, Imprimerie nationale, 1881 (2 vol.), publiés par J. Guiffrey. Son nom apparaît pour la première fois en 1669, où il est question des „ouvrages qu'il a fait à l'Académie des Sciences". En 1672 et dans les quinze années suivantes il est „retenu pour entretenir toutes les pendules de l'Académie des Sciences, tant celles qui sont à l'Observatoire que dans ladite Académie". En 1687 nous apprenons qu'il occupe une partie des galeries du Louvre. En décembre 1680 il est payé de la somme la plus forte qu'on trouve à son compte, soit 8000 livres, „pour une machine du mouvement des planettes". En mai 1682 il est question d'une machine „qu'il a faite pour les éclipses" et en août 1687 d'„une machine paralactique servant aux observations".

La machine planétaire est celle de Roemer, mentionnée à la date du 27 août 1680 par J. B. du Hamel à la p. 192 de sa „Regiæ Scientiarum Academiæ Historia" de 1701: du Hamel dit que cette machine avait été construite par Thuret. Il en fut de même de la „machina Lunæ motibus dimetiendis" dont Roemer présenta le projet le 30 août suivant: elle fut achevée „brevi post tempore ab eodem artifice"; c'est évidemment la machine „pour les éclipses" de 1682.

Nous ajoutons que P. Horrebow, dans sa „Basis astronomiæ" de 1735 — citée aussi à la p. 600 qui suit — dit que la machine planétaire de Roemer était mue à la main, et qu'elle représentait le mouvement du soleil et des planètes suivant le système géocentrique de Tycho Brahé (p. 132 et Pl. XI).

de rencontre, directement à l'axe du balancier, auquel eſt également attaché — comparez la note 2 de la p. 502 — une des extrémités du reſſort ſpiral; c'eſt le diſpoſitif de la deuxième figure de la p. 408, de la première de la p. 409 et de la deuxième de la p. 414 (toutes empruntées au manuſcrit E) du T. VII. On peut auſſi, comme l'indique la troiſième figure — datant du 23 janvier, c.à.d. du lendemain de la conſtruction du premier modèle par Thuret — de la p. 409 du T. VII, monter ſur l'axe de la verge à palettes, auquel eſt attaché ici auſſi une des extrémités du reſſort ſpiral, une roue qui engrène dans une autre montée ſur l'axe du balancier. Plus cette dernière

[Fig. 17.]



roue eſt petite (dans la figure de Huygens elle n'eſt pas plus petite que l'autre), plus le balancier fera de larges oſcillations. On peut en troiſième lieu conſtruire l'échappement comme l'indiquent la figure, publiée en février 1675 par Huygens, de la p. 425 du T. VII, et la Fig. 17, empruntée à la Pl. XIV de l'„Hiſtoire de la Meſure du Temps par les Horloges" de 1802 de F. Berthoud (voir la p. 31 du T XVII), où *CC* eſt le balancier et *aa* le reſſort ſpiral. Ici ſurtout le balancier fait de larges oſcillations, d'où le nom d'*échappement à pirouette*. Berthoud écrit (T. I, p. 143): „On voit que les palettes, et l'axe qui les porte, parcourant un petit arc, la roue de champ *DD* fait décrire au pignon [*d*] une grande partie de ſa révolution et par conſéquent auſſi au balancier; et on peut varier, à volonté, l'étendue des arcs du régulateur, ſelon que la roue de champ *D* porte un plus grand ou plus petit nombre de dents, et que le pignon a plus ou moins de diamètre et par conſéquent de dents." C'eſt à bon droit, puiſque les deux figures s'accordent, que Berthoud parle de „la montre à pirouette d'Huygens", de „la diſpoſition que Huygens a donnée à l'échappement en

appliquant le ſpiral au balancier". Il ſemble toutefois poſſible que ce ſoit Thuret qui ait donné à l'échappement cette forme-là, puiſque nous ſavons (T. VII, p. 406) que Thuret montra le 23 janvier à Huygens „un autre modelle du meſme balancier", et que Huygens crut plus tard que „des lors il avoit le deſſein de s'attribuer cette invention". Ce deuxième modèle n'était donc évidemment pas identique avec le premier. À la p. 407 du T. VII Huygens l'appelle „un pareil modelle ou un peu deguiſè" [1]), et il avoue (p. 410) que Thuret a „contribuè beaucoup de ſon induſtrie a l'execution".

En quatrième lieu, on pourrait appliquer le reſſort ſpiral régulateur à *deux* balanciers égaux [2]) dont les pignons s'engrènent, ou qui s'engrènent eux-mêmes, comme Huygens le propoſe (deuxième figure de la p. 409 du T. VII). Nous renvoyons le lecteur, pour cette conſtruction comme pour quelques détails hiſtoriques, à la Pièce I qui ſuit (note 2 de la p. 522) [3]).

En admettant — voir ce que nous diſons plus loin ſur les horloges de juillet 1683 — qu'il ait été poſſible dès les jours de Huygens de conſtruire, en ſe ſervant du reſſort ſpiral régulateur, des horloges marines marchant bien, comme Huygens le dit dans ſa requête du 5 février 1675 (T. VII, p. 401), — nous voulons dire: marchant bien dans la chambre d'un obſervateur — on ne peut pas cependant avoir été dès lors en poſſeſſion d'inſtruments de préciſion permettant de déterminer exactement les longitudes: l'influence de la température ſur les reſſorts doit y avoir mis un obſtacle regardé ſans doute en ce moment comme inſurmontable. En 1666 Huygens avait parlé lui-même de cette difficulté dans le cas des reſſorts moteurs (premier alinéa de la p. 9 qui précède). En 1675, lorſque d'autres firent la même obſervation à propos des reſſorts régulateurs [4]), il ſe montra d'abord plus ſanguin [5]). Mais plus tard (1683)

---

[1]) Comparez la note *a* de Huygens à la p. 499 du T. VII.

[2]) Plus tard (voir la p. 525) Huygens remarque expressément que dans ce cas il vaut probablement mieux se servir d'un seul ressort que d'en appliquer un à chaque balancier.

[3]) Il est d'ailleurs évident que, pour être mieux renseigné sur les différentes applications qu'on peut faire du ressort spiral régulateur, le lecteur devrait consulter des ouvrages d'horlogers ou s'adresser à des spécialistes compétents.

[4]) T. VII, p. 427, 433.

[5]) T. VII, p. 457.

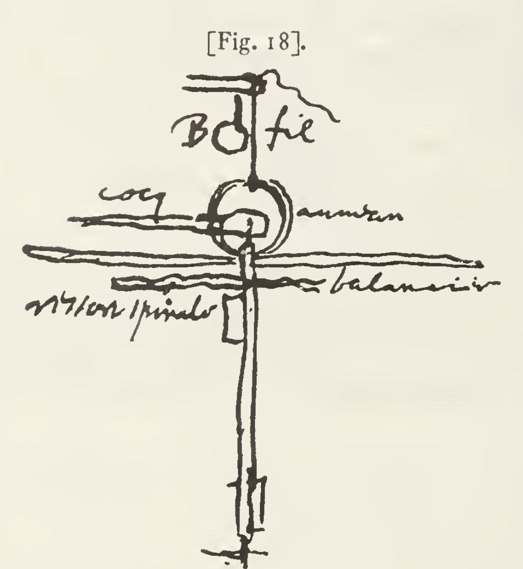
il dut reconnaître que l'influence de la température eſt indéniable [1]). Rien n'indique que, par ſuite de la déciſion des Etats de Hollande et de Weſtfriſe du 25 ſeptembre 1675 (p. 523), les „Gecommitteerde Raden" et les „Collegien ter Admiraliteyt" aient fait faire des expériences menant à cette concluſion. De telles expériences ne pourraient d'ailleurs dater que de 1681, 1682 ou 1683: voir la note 1. Rappelons auſſi qu'en août 1679 [2]) Huygens écrit qu'„il y a plus d'eſperance de reuſſir avec des balanciers avec un reſſort ſpirale, mais conſtruits en grand volume" et qu' „il vaudroit la peine de faire cette eſpreuve". Ce qui ſemble le plus probable c'eſt qu'il ait conſtaté lui-même l'influence de la température [3]).

Forcé de chercher autre choſe il conſtruiſit le modèle d'un „pendulum cylindricum trichordon" ſans reſſort [4]) (Pièce II, p. 527), où les vibrations provenant d'une eſpèce

---

[1]) Voir à la p. 527 qui suit le début du § 1, datant de décembre 1683. Vers le 1 janvier 1681 Huygens écrit (Manuscrit F. p. 46; la p. 45 porte la date du 27 décembre 1680): Suspendre le balancier [Fig. 18] par un fil de ſoye, mais en ſorte que les deux pivots ne puiſſent ſortir de leur trous lors qu'on voudra coucher la machine [il s'agit ici de l'horloge destinée à mouvoir le planétaire]. le fil 3 ou 4 fois plus long qu'il n'eſt repreſentè icy. un petit contrepoids B qui ſoit egal a la peſanteur du balancier. En faiſant ce balancier grand, j'auray un eſſay de la juſteſſe de ces horologes a reſſort ſpirale". En ce moment la question de la justesse de ces horloges était donc encore indécise.

[Fig. 18].



Le ressort spiral de l'horloge du planétaire, exécuté par van Ceulen en 1682, est représenté avec son balancier à la p. 525 [Fig. 21].

[2]) T. VIII, p. 197.

[3]) Toutefois nous ne pensons pas qu'il ait fait sur ce sujet un grand nombre d'expériences précises. Dans ses „Remarques" citées dans la note 2 de la p. 502 Leibniz écrit: „Par rapport aux Ressorts à spirale, dont on se sert dans les montres de poche, il seroit important d'examiner, combien l'Air a de l'influence sur les Vibrations d'un tel Ressort, et particulierement, combien le froid et le chaud en changent l'égalité".

[4]) C.à.d. sans ressort régulateur. Il y avait encore dans l'horloge des ressorts moteurs: voir les notes 8 et 11 de la p. 533.

de torsion sont à fort peu près isochrones, puisque le moment qui agit sur le pendule est à peu de chose près proportionnel à l'angle de torsion (note 1 de la p. 528). Il peut donc dire qu'il y a ici l'effet d'un ressort, sans ressort, de même qu'il eût pu dire en introduisant le ressort spiral dans les montres qu'il y a ici, sans cycloïde, l'effet d'une cycloïde (ce qu'il dit en effet — deuxième alinéa de la p. 502 — en termes quelque peu différents). C'est toujours le même principe qui subsiste. Et en supposant la longueur des fils invariable (voir la p. 544 du T. XVII), le défaut des horloges à ressort régulateur se trouvait ainsi corrigé.

Les horloges construites d'après ce modèle à la Haye par l'horloger J. van Ceulen (§ 4 à la p. 532) [5]) paraissent être celles qui furent essayées en 1685 par Huygens sur le Zuyderzee. En effet, comme cela ressort d'une lettre de J. Gallois à Huygens (T. VIII, p. 405), ce dernier avait écrit vers la fin de 1682 qu'il se proposait de faire de nouveau l'épreuve du „secret des longitudes"; en juillet 1683 (T. VIII, p. 429) il se dit „requis par la Cie des Indes Orientales" — les „Resolutiën vande Bewindhebbers vande O.I. Cie ter Camer tot Amsterdam" (Archives de l'Etat à la Haye)

---

[5]) D'après un registre que nous avons consulté aux Archives communales de la Haye, Johannes van Ceulen, le célèbre horloger bien connu des collectionneurs, acheta en janvier 1677 une maison „aen 't Pleijn", donnant sur la Heerestraat, donc vis-à-vis de la maison de Constantijn Huygens père, où Christiaan H. demeurait en 1677 (note 6 de la p. 4) et ensuite de 1681 à 1687. Il est fort naturel que Huygens s'adressa à cet horloger-là, et qu'une collaboration active s'ensuivit. Huygens parle de lui pour la dernière fois en octobre 1684 et Hudde en septembre 1685 (voir le texte).

Van Ceulen devint membre de la Corporation des Horlogers de la Haye en 1688 et fut plusieurs fois „hooftman" ou „deken" dans les années suivantes.

Les nos 1270 et 1279 des Archives notariales de la Haye contiennent son testament et toutes les pièces du notaire qui se rapportent à la succession. Il mourut le 7 décembre 1715 dans la maison du Plein, laissant e. a. à son fils homonyme, également maître-horloger, son „groot staende Horologie genaemdt 't Correctorium". Ce „Correctorium" peut avoir été une horloge à pendule de 12 pieds: dans un passage biffé de la p. 218 du Manuscrit F Huygens dit que van Ceulen a construit plusieurs horloges de cette espèce: en dan noch sal moeten op landt 2 draeden in de meridiaen spannen en een teycken doen doen [il s'agit d'un coup de mousquet ou de canon; voir la l. 24 de la p. 58 et les p. 579 et 580 du T. IX]. dit sal in 't toekomende konnen beter verricht werden als men een horologie met een langh pendulum van 12 voet gelijck van Ceulen er [?] verscheyden gemaeckt heeft aen land sal hebben verordineert ontrent de plaets daer de schepen leggen die op reijs gaen, want dit horologie gestelt sijnde sal men het daghelyx verschil der zee pendula daer aen konnen bekennen". Comparez la p. 288 du T. IX.

difent en effet (p. 526 qui fuit) que Huygens fut invité le 31 décembre 1682 à s'occuper de la queftion des longitudes — et fa lettre du 12 décembre 1683 à Fullenius (T. VIII, p. 475) fait voir que c'eft à la fuite de cette inftigation que fut inventé le „pend. cyl. trichordon". Les deux horloges conftruites par J. van Ceulen, dont Huygens parle en juillet, août et feptembre 1683 (T. VIII, p. 429, 439, 453) — nous les mentionnons de nouveau dans le premier alinéa de la p. 513 qui fuit — furent changées par lui „de cette façon" vers la fin de décembre 1683 (§ 4 à la p. 532). D'après les „Refolutiën" déjà mentionnées une lettre de Huygens que nous ne poffédons pas et dont il n'a pas été fait mention dans la Correfpondance, fut lue (p. 526) dans l'affemblée des Directeurs de la Cie le 28 février 1684: il y déclare être parvenu à faire accorder les deux horloges fi bien entre elles que la différence journalière n'eft que de 1 ou 2 fecondes, à quoi il croit encore pouvoir remédier. Voir cependant, à la p. 533 § 6, ce qu'il écrit, également en 1684, fur l'impoffibilité d'obtenir la „derniere egalitè". Le 30 août 1685 il fut décidé, d'après les „Refolutiën" (p. 534), de mettre un galliot à la difpofition de Huygens qui avait propofé de faire lui-même l'effai des horloges fur mer. Voir la lettre du 3 feptembre 1685 de J. Hudde à Huygens (T. IX, p. 24), où il faut lire „van Ceulen" au lieu de „van Teilen". Voir encore fur cette expédition les p. 25—32 du T. IX. D'après les „Refolutiën" Hudde fit le 17 feptembre fur ce fujet un rapport oral, où il dit que les expériences étaient à refaire (p. 539). Quoique Huygens (T. IX, p. 31) écrive encore le 3 octobre être „affeurè que [les horloges] fouffriront facilement le mouvement des grands vaiffeaux, dans quelque temps qu'il faffe", le rapport de Hudde a apparemment amené les intéreffés à ne plus faire ufage du „pend. cyl. trichordon" dans les expériences fuivantes. Les minutes de la p. 37 du T. IX font voir qu'en octobre Huygens refta en correspondance avec Hudde. P. van Dam — mentionné aux p. 37, 579 et 580 du T. IX et 80 du T. X —, dans fa „Befchrijvinge van de Ooft-Indifche Compagnie" préfentée aux Directeurs en 1701 et publiée en 1927—1929 par F. W. Stapel [1]), écrit dans le chapitre des „Nieuwe Inventiën" [2]) que Huygens fe fervit dans l'expédition de 1685 de deux horloges non fufpendues: „twee leggende horologies" (expreffion qui conviendrait à des horloges à reffort fpiral régulateur, mais qui s'applique auffi fort

[1]) Rijks Geschiedkundige Publicatiën, la Haye, M. Nijhoff.
[2]) Ch. 49, p. 679.

bien à des „pend. cyl. trichorda", en ſuppoſant les fils aſſez courts) qui ne ſe montrèrent pas aſſez exactes („maar die men heeft bevonden niet te kunnen weſen van ſodanige accurateſſe en onveranderlijckheyt, als tot die uytvindinge nootſaeckelijk ſoude werden vereyſcht") de ſorte qu'on renonça à s'en ſervir („dat daarvan allmede niet is geworden"). Nous ignorons les détails de la conſtruction de l'habile [3]) van Ceulen. Voir cependant le § 6 à la p. 533 qui ſuit.

Les pages ſur le „pend. cyl. trichordon" (p. 527—533) ſont intéreſſantes à un point de vue ſcientifique.

D'abord puiſqu'il y eſt queſtion de la „linea ſinuum" (ou „ſinusoïde", pour employer un terme plus moderne), obtenue par le développement ſur un plan de l'interſection d'un cylindre avec une ſphère, dont le centre ſe trouve ſur le cylindre et dont le rayon eſt égal à ſon diamètre; autrement dit, par le développement ſur un plan d'une ligne cyclocylindrique, comme s'exprime A. Lalovera, ou cycloï-cylindrique, ſuivant la terminologie de Bl. Paſcal [4]). On obtient la même ligne par le développement ſur un plan de la ſection elliptique obtenue en coupant un cylindre par un plan incliné à 45°, développement dont Huygens s'était ſervi en 1658 (note 4 de la p. 529) [5]). Lalovera apprit de Paſcal que ſa ligne cyclocylindrique ſpéciale étendue ſur un plan, n'eſt autre que la „petite cycloïde" ou „compagne de la roulette" conſidérée déjà auparavant par Roberval [4]).

---

[3]) T. VIII, p. 342. En octobre 1682 Huygens écrit qu'il n'aurait pas pu trouver à Paris „un ouvrier aussi habile" (T. VIII, p. 393). Il est intéressant de comparer cette opinion à celle exprimée par Huygens en 1667 (T. XVIII, p. 19, deuxième alinéa).

[4]) Voir à ce sujet les „Oeuvres de Bl. Pascal", éd. L. Brunschvicg, P. Boutroux et F. Gazier, T. VIII, 1914, p. 24, 121 et suiv., 203 et suiv., et l'article „Pascal et Lalouvère" par P. Tannery dans les „Mém. de la Soc. d. Sciences phys. et nat. de Bordeaux", 3e Série, T. V. Paris, Gauthier-Villars, 1890. Lalovera parle de la ligne cyclocylindrique — Fermat avait attiré son attention sur cette courbe; comparez les p. 209—210 du T. I de 1891 des Oeuvres de Fermat, édition de P. Tannery et Ch. Henry, Paris, Gauthier-Villars — dont celle considérée dans le texte est un cas particulier, la „cyclocylindrique primaire de premier ordre" de Lalovera, le rayon et le centre de la sphère qui coupe le cylindre pouvant en général être quelconques. Ce n'est d'ailleurs que dans le cas considéré dans le texte que Lalovera trouva la quadrature de la courbe d'après son ouvrage „Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris", de 1660. Voir encore sur Lalovera la note 6 de la p. 246 du T. II, déjà citée à la p. 204 qui précède (note 2).

[5]) Comparez la note 9 de la p. 337 du T. X, se rapportant à une Pièce de 1692. En rédigeant cette note, nous n'avions pas encore remarqué que Huygens s'était servi de la courbe en question en 1658 et en 1683.

Ce qui eſt plus important, c'eſt qu'il s'agit ici des lois du mouvement d'un ſyſtème qui tourne, comme le pendule conſidéré dans l',,Horologium oſcillatorium", autour d'un axe fixe — vertical cette fois — ſous l'influence de forces déterminées, le moment des forces autour de l'axe étant proportionnel à l'écart angulaire, vu que l'amplitude des oſcillations dans l'un et l'autre cas eſt petite par hypothèſe. La proportionnalité inverſe de la période d'oſcillation avec la racine carrée du moment de ces forces autour de l'axe (T. XVI, p. 341; T. XVII, p. 188, note 2), eſt admiſe par Huygens comme une choſe évidente[1]), le coëfficient de proportionnalité n'étant autre, à un facteur numérique près, que la racine carrée de ce que nous appelons le moment d'inertie (T. XVI, p. 378). L'équation, pour employer ce terme, reconnue vraie par Huygens dans le cas du pendule compoſé[2]), peut apparemment ſervir auſſi ſelon lui dans des cas analogues. Il y a ici une généraliſation remarquable. D'ailleurs nous avons vu (deuxième alinéa de la p. 502) que dejà en 1675 il conſidérait comme évident que l'indépendance de la période de l'amplitude de la vibration, démontrée pour le cas de mouvements linéaires accomplis ſous l'influence d'une force proportionnelle à l'écart linéaire, ſubſiſte lorſqu'il s'agit d'une vibration due à des forces dont le moment autour de l'axe de rotation eſt proportionnel à l'écart angulaire.

Les affirmations du § 3 de la p. 530 dont nous parlons, réſultent, peut-on dire, des formules $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (T. XVI, p. 410) et $l = \frac{I}{Mb}$ (p. 33 qui précède).

En effet, on peut en tirer, pour des oſcillations du pendule phyſique aſſez petites et pouvant donc être conſidérées comme iſochrones, la formule $T = \pi \sqrt{\frac{I}{Mgb}}$; et l'on peut admettre par analogie que dans le cas du ,,pendulum cylindricum trichordon"

$$T = C \sqrt{\frac{I}{\text{Moment des forces pour un écart angulaire déterminé}}},$$

C étant une conſtante.

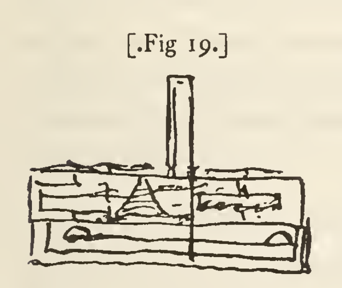
---

[1]) Comparez les notes 4 et suiv. de la p. 531 qui suit, et aussi les notes 6 de la p. 565 et 4 de la p. 567.

[2]) C. à. d. l'équation $T = \pi \sqrt{\frac{I}{Mgb}}$ qui suit.

Huygens a certainement éprouvé de la satisfaction en constatant dans le cas considéré l'accord de la théorie avec l'observation. Mais pratiquement, comme nous l'avons dit, la nouvelle horloge n'eut pas de succès. Vers la fin de 1685 Huygens et van Ceulen revinrent donc [3]) au remontoir à ressorts déjà construit en 1658, quoique sans remontage *fréquent*, par S. Coster (et Cl. Pascal), ainsi que par J. Fromanteel (p. 182 du T. XVII) et plus tard par I. Thuret, comme Huygens écrit à Chapelain l'avoir fait également (même endroit). La fusée, supprimée par Coster dans les horloges de chambre à ressort moteur, et dont Huygens ne s'était pas servi dans son horloge marine de 1672 (T. XVIII, p. 15), qui n'était pas un remontoir, fut réintroduite par lui dans l'horloge de 1685 [4]). Nous ignorons s'il y en avait une dans la construction de Thuret. Quant aux horloges marines à ressort spiral régulateur — on en a certainement fabriqué quelques-unes: les horloges de van Ceulen mentionnées e. a. en juillet 1683 (T. VIII, p. 429—430; nous avons déjà cité ce passage à la p. 510), dont Huygens parle aussi en octobre 1682 (T. VIII, p. 394) étaient apparemment de cette espèce — il paraît probable qu'elles avaient des fusées, comme elles en ont encore aujourd'hui, d'autant plus que les horloges de poche à spiral régulateur (Fig. 19, empruntée à la p. 43 du Manuscrit E) en avaient, tout comme les œufs de Nuremberg du seizième siècle, et qu'il y a aussi une fusée dans l'horloge construite par J. van Ceulen en 1682, faisant partie du planétaire de Huygens, dont nous avons déjà parlé dans la note 1 de la p. 508.

[.Fig 19.]



Huygens ne nous a laissé aucune description de l'intérieur des l'horloges de 1685. Mais dans ses remarques sur l'expédition de 1690—1692 il nous apprend (note 2 de la p. 650 qui suit) qu'elles provenaient des horloges précédentes, celles-ci ayant été „tournées sens dessus-dessous". Voir aussi le § 6, datant de 1684 ou 1685, de la p. 533. Les seuls renseignements que nous possédions en outre sont ceux contenus dans certains paragraphes de l'Instruction de décembre 1685 pour J. de Graaf et Th. Helder [5]), imprimée aux p. 55—76 du T. IX. Ce n'est que grâce à cette Instruction — ainsi qu'au rapport de Huygens d'avril 1888 [1]) sur le journal de

[3]) Voir cependant le deuxième alinéa de la présente page.

[4]) Comparez la note 12 de la p. 31 du T. XVII et la note 1 de la p. 541 qui suit.

[5]) Manuscrit F, p. 334: In d'oude Keyser op 't Speuy. Tom. Helder.

de Graaf dont nous avons dit en 1901 qu'une copie a été conſervée [2]) — que nous ſavons que l'horloge de 1685 était un remontoir [3]). En ce temps le remontoir à reſſorts à remontage fréquent était ſans doute généralement connu, puiſque Huygens parle (N° XXVII à la p. 542 qui ſuit) du „double déclenchement, comme diſent les horlogers". La Fig. 36 (p. 540) et le texte de la Pièce IV font voir que le poids du pendule triangulaire était globulaire, comme dans la Fig. 7 de 1671 (p. 13 qui précède). Nous ignorons s'il y avait encore des arcs cycloïdaux (voir ſur eux la note 5 de la p. 17). D'après le N° IV de la p. 541 le pendule était partiellement rigide; cependant, d'après le N° XXXV, il était ſuſpendu à des fils. Fort probablement les arcs cycloïdaux étaient donc toujours là. Il n'y avait apparemment plus de poids curſeurs comme en 1671 [4]).

Il était évidemment poſſible de remonter l'horloge ſans qu'elle s'arrêtât: voir à la p. 621 qui ſuit la Pièce III ſur la „maniere de faire qu'en montant l'horloge elle ne diſcontinue point ſon mouvement; dont les horlogers ſe ſervent ſans en ſcavoir rendre raiſon". Conſultez auſſi, à la p. 604, la fin de l'Avertiſſement correſpondant.

Cette horloge-là — ou plutôt les deux horloges de ce genre dont il eſt queſtion dans le N° I de la p. 539 — ont eu un grand ſuccès dans le voyage du Cap de la Bonne Eſpérance à Texel: elles ont ſervi à démontrer la diminution de la peſanteur due à la rotation journalière de la Terre. Voir plus loin dans le préſent Tome le Chapitre ſur les réſultats des expéditions maritimes.

Le ſuccès partiel de l'expédition de 1686—1687 induiſit les Directeurs de la Cie des Indes Orientales à faire — ſur l'avis de B. de Volder [5]) — une nouvelle expérience, celle de 1690—1692, dont le réſultat fut hélas bien peu ſatisfaiſant, comme nous l'avons déjà fait reſſortir dans le dernier alinéa de la p. 11 du T. XVII. Cette expérience fut faite avec les mêmes horloges que la précédente (T. IX, p. 467), quelques légères corrections y ayant été apportées conformément aux obſervations de Huygens et aux remarques de l'horloger van der Duſſen qui avait pris part à la première expé-

---

[1]) Voir le troisième alinéa de la p. 290 du T. IX.
[2]) Voir la note 3 de la p. 266 du T. IX.
[3]) Comparez la note 2 de la p. 17 du présent Tome. Le ressort du petit tambour était en cuivre (T. IX, dernières lignes de la p. 289).
[4]) Voir la note 3 de la p. 542 qui suit.
[5]) Voir la fin du deuxième alinéa de la p. 343 du T. IX.

dition (T. IX, p. 288—290, 418—419, 467, 528)[6]). Il eſt vrai que Huygens, après avoir examiné le journal de J. de Graaf (qui paraît ne pas avoir été conſervé, voir la note 1 de la p. 341 du T. X), dit le 6 mars 1693 que les réſultats ne ſont pas auſſi mauvais qu'on l'avait cru (T. X, p. 422—424). Voir auſſi ſa correſpondance avec de Volder dans le même Tome et ſes remarques citées à la p. 513.

Il avait pourtant fort bien compris qu'il fallait chercher autre choſe que l'horloge de 1685. Bien peu de temps après avoir reçu le journal (novembre 1692) il s'était mis de nouveau à l'œuvre, et dans ſa lettre déjà citée aux Directeurs de la Cie des Indes Orientales[7]) il déclare ne pas inſiſter ſur de nouvelles expériences avec la dite horloge „puiſqu'en cette occaſion j'ai fait une trouvaille différente et beaucoup meilleure dont je m'occupe en ce moment, par laquelle tout ce qui donne quelque difficulté dans l'application de l'invention eſt abſolument écarté". Il s'agit du „balancier marin parfait" de janvier-février 1693 (Pièce V à la p. 546), — ou plutôt de la „libratio iſochrona melior præcedente", portant la même date que la lettre citée, ſavoir le 6 mars 1693 (Pièce VI à la p. 562). Rien n'indique que les Directeurs de la Cie ſe ſoient intéreſſés à cette nouvelle conſtruction ou à celles de 1694. Huygens ne s'eſt plus adreſſé à eux, quoiqu'il l'eût certainement fait s'il eût vécu aſſez longtemps pour publier la deſcription de ſa dernière horloge munie du balancier à cornes de bouc hélicoïdales[8]).

Dans l'expédition de 1686—1687, et plus encore dans celle de 1690—1692, on avait remarqué 1° que les châſſis dans leſquels les horloges étaient ſuſpendues (p. 539, N° III) ne les empêchaient pas d'être ſecouées par les coups de vague (p. 549), 2° que le mouvement du pendule donnait un petit mouvement à toute l'horloge ainſi ſuſpendue, ce qui était la cauſe principale de l'irrégularité de la marche (p. 549 et 569), 3° que la ſuſpenſion du pendule à des fils de ſoie (p. 543, N° XXXV) était défectueuſe (p. 549), 4° que les reſſorts n'opéraient pas toujours de même force (comparez la p. 9 qui précède), 5° que les horloges étaient trop compliquées.

---

[6]) À la p. 132 v. du Manuscrit G Huygens écrit: Van der Dussen, Horologiemaecker tot Dordrecht in de Wijnstraet. Suivant les archives de Dordrecht il était né à Swijndrecht et fut enterré le 4 octobre 1689. En cette occasion il est appelé „Willem van der Dussen oorlogemaker naest het Stadthuis".

[7]) T. X, p. 424.

[8]) Voir la note 1 de la p. 576 qui suit, et les p. 685 et 702 du T. X. L'extérieur de l'horloge achevée de 1694 est représenté à la p. 592 (Fig. 94).

C'eſt apparemment pour obvier à ces deux derniers inconvénients que Huygens décida que la nouvelle horloge ne devait contenir aucun reſſort, pas de fuſée et peu de roues, et qu'elle devait être à poids moteur (p. 549). Il y a en effet un poids moteur dans l'horloge repréſentée à la p. 572 (Fig. 78). Dans la Fig. 94 de la p. 592 les cordes ſeules ſont indiquées. De plus il ſe réſolut à abandonner le pendule pour revenir au balancier. Quant aux châſſis, ils devaient déſormais être attachés au plancher *d'en bas* et munis de poids, pour amortir les fortes ſecouſſes (p. 549).

Il aurait probablement pris quelques précautions, s'il avait pu faire l'épreuve de ſes horloges ſur mer, pour empêcher le ballottement des poids moteurs: voir à ce ſujet les p. 556 et 577. Il n'en eſt pas moins remarquable qu'après tout il ait eu plus de confiance dans les poids que dans les reſſorts; quoique dans un mémoire anonyme, qui ſe trouve parmi les manuſcrits de ſon père [1]), il ſoit déjà dit que les poids ne peuvent ſervir ſur mer et qu'il y faut faire uſage d'horloges à reſſorts comparables aux horloges de poche. Il eſt vrai que l'auteur de ce mémoire n'avait apparemment fait aucune expérience; il ſe borne à donner le conſeil de faire conſtruire des horloges marines par les plus grands maîtres [2]).

Il était réſervé à Huygens de donner ſuite à ce conſeil [3]). Nous ignorons ſi en 1693 il travaillait toujours avec J. van Ceulen. Ce qui eſt certain c'eſt qu'en 1694 B. van der Cloeſen [4]) était ſon „ouvrier" (p. 593); nous penſons qu'il en fut de même en

---

[1]) Handschriften Constantijn Huygens, Vol. 47 (Kon. Academie van Wetenschappen, Amsterdam). Mons. W. Ploeg, dans sa dissertation — thèse de doctorat — sur „Constantijn Huygens en de Natuurwetenschappen" (juin 1934, Nijgh & van Ditmar, Rotterdam) donne (p. 107—109) les titres des manuscrits de ce volume. Il s'agit en grande partie, paraît-il, de manuscrits ayant appartenu au père Constantijn, quoiqu'on y trouve aussi des écrits datant d'après sa mort. Le mémoire en question est intitulé: „Middel om Oost en West te vinden, etc." Il est sans doute ancien, puisqu'il n'y est question, semble-t-il, que d'horloges à une seule aiguille: „Den uijrwijser dient gemaeckt, dat hij gae niet met hanghende gewichten (dat te scheep niet te passe en comt) maer met veren van binnen, gelijck de cleene horologikens, die men bij sich draegt".

[2]) „Dat se soo net ende vast-gaende gemaeckt werden alst mogelijck is, van de vermaerste meesters diemen weet".

[3]) Parmi les grands maîtres qui travaillèrent pour Huygens il convient de ne pas oublier P. Visbach, aussi connu des collectionneurs que J. van Ceulen. Nous avons dit à la p. 12 du T. XVII que Huygens ne fait mention de lui qu'en 1691. Toutefois son nom se rencontre aussi en 1690 dans le manuscrit G. Dans la note 1 de la p. 477 du T. IX nous avons écrit: „Rekening van verbael". Huygens avait écrit: „Rekening van Visbach".

[4]) D'après un document conservé aux archives communales de la Haye — comparez la note 5

1693. On trouve aux p. 593—596 *in extenſo* le protocole des obſervations qui eurent lieu du 19 avril au 21 mai 1694: elles font bien voir l'intimité de la collaboration du ſavant et de l'horloger.

Plus Huygens avance en âge, mieux il voit que la perfection des horloges dépend de celle des détails. C'eſt par conſéquent à la perfection des détails que ſont vouées un grand nombre des pages qui ſuivent.

Il n'abandonne pas toutefois ſon idée primordiale que la théorie a ici ſon mot à dire: l'iſochroniſme des vibrations doit réſulter de la proportionnalité du moment moteur à l'écart angulaire.

Il s'agiſſait donc de rendre parfaitement, ou preſque parfaitement, iſochrones les oſcillations libres de différentes amplitudes d'un balancier ſe mouvant dans un plan vertical [5]). Celui-ci devait être grand pour régler la marche de l'horloge et ne pas être gouverné par elle (p. 569). Au balancier il fallait attacher un poids — puiſque les reſſorts étaient exclus — produiſant un moment moteur poſſédant la propriété nommée. Huygens tâcha d'abord — comme il l'avait fait anciennement pour le pendule; voir les p. 17—20 du T. XVII — de trouver par expérience la forme de la courbe contre laquelle le ruban auquel le poids était ſuſpendu devait venir s'appliquer (p. 563), mais bientôt il en découvrit la forme théorique: il s'agiſſait de la courbe qu'on obtient par l'évolution d'une circonférence de cercle.

Comme nous l'obſervons auſſi dans les notes 6 de la p. 565 et 4 de la p. 567, cette ſolution aurait été exacte ſi le moment d'inertie du balancier par rapport à ſon axe eût été abſolument conſtant; mais ce moment varie par la préſence même du poids

de la p. 158 du T. XVII — Bernard van der Cloesen fut élu „hooftman" lors de la constitution de la Corporation des Horlogers en 1688 à la Haye. Il est souvent nommé, soit comme „hooftman", soit comme doyen („deeken") dans les pièces suivantes. En 1712, comme l'atteste e. a. une inscription latine sur le socle, cet „ingeniosissimus artifex" répara et porta au „culmen perfectionis" le planétaire communément appelé „de Leidsche Sphaera", qui fut construit par Steven Tracy de Rotterdam et se trouve actuellement au „Nederlandsch hist. natuurw. Museum" à Leiden. Van der Cloesen vivait encore en 1719, puisqu'on a trouvé aux archives communales de la Haye une requête de lui de cette année; elle concerne son fils Olivier et est adressée au bourgmestre de la Haye.

5) Ailleurs (p. 573, Fig 79) Huygens parle incidemment d'un balancier tournant dans un plan horizontal.

régulateur. Il eſt vrai que plus le balancier eſt grand, moins cette variation eſt importante. Il eſt poſſible qu'au début Huygens n'ait pas remarqué ce léger défaut. En 1694 en tout cas il s'en rendit fort bien compte puiſque les calculs des p. 583—589 ſervent à évaluer la grandeur de l'erreur.

On pourrait encore aujourd'hui ſe propoſer — comme Euler le fit ſans beaucoup de ſuccès dans le cas de la cycloïde; voir les p. 46 et 428 qui précèdent — de calculer la forme exacte que la courbe en queſtion doit avoir pour que l'oſcillation ſoit rigoureuſement iſochrone, du moins en théorie et en ſuppoſant que le ruban reſte vertical, ce qui d'ailleurs, comme Huygens lui-même l'obſerve, n'eſt pas abſolument vrai, quelque lentes que ſoient les oſcillations (p. 587). Un calcul de ce genre, ſuppoſé que l'exécution en ſoit poſſible, n'aurait ſans doute aucune importance pratique.

Ce qui, malgré Huygens, paraît plus important — comparez la note 2 de la p. 560 — c'eſt que la gravité du poids régulateur — ou des poids régulateurs, car il y en a deux ou pluſieurs dans les balanciers de 1694; voir p.e. la Fig. 89 à la p. 579 — varie lorſque la partie du vaiſſeau où ſe trouve l'horloge monte ou deſcend d'un mouvement accéléré.

Beaucoup de gens parlent dans ce cas d'une augmentation (ou diminution) *apparente* du poids conſidéré [1]). Huygens dit ſimplement que le poids régulateur [2]) „gravior fit". Ceci mérite d'être remarqué. Nous avons déjà obſervé dans le T. XVI (note 5 de la p. 198) que la conception relativiſte — comparez le troiſième alinéa de la p. 197 du T. XVI — s'impoſait à ſon eſprit.

C'eſt auſſi en 1693, en travaillant à ſes horloges, qu'il a énoncé l'important axiome

---

[1]) C'est ainsi que s'exprime p. e. F. Marguet à la p. 139 de son ouvrage cité à la p. 546 qui suit („les changements de la pesanteur apparente à bord").

[2]) Peu importe qu'il s'agit en cet endroit, non pas d'un poids régulateur suspendu à un ruban qui s'applique contre une „corne de bouc", mais d'une partie d'un „chapelet" ou chaînette régulatrice.

que les forces fe confervent dans la nature: voir la p. 554 qui fuit et la p. 477 qui précède [3]).

En fin de compte, il y a lieu de fe demander ce que font devenues les dernières horloges conftruites par Huygens à la Haye. Outre les deux horloges nommées, il y en a eu au moins une troifième dont il parle dans fa dernière lettre connue, celle di 4 mars 1695 (T. X, p. 709). Il y dit que fa nouvelle invention a été accommodée à une vieille horloge „a pendule de 3 pieds, qui montre auffi l'heure du foleil, fans qu'il foit befoin de l'Equation du temps". Nous fuppofons que ces paroles fignifient que le balancier à cornes de bouc hélicoïdales avait été introduit dans l'horloge au lieu du pendule de 3 pieds [4]).

Cette dernière horloge paraît être reftée dans la famille, attendu qu'un defcendant de la famille Huygens, A. J. Royer, légua en avril 1809 à l'Univerfité de Leiden, outre le planétaire, l'„equatiehorlogie, door wijlen mijn oud-oom Chriftiaan Huygens geïnventeerd" [5]). Mais cette horloge eft aujourd'hui introuvable. Nous ajoutons que le texte de Huygens ne dit pas qu'il s'agiffait d'une „equatiehorloge" inventée par lui. Des horloges de ce genre exiftaient déjà; voir p. e. les p. 378—379 du T. VI (horloge de Mercator) [6]).

Quant aux deux — ou plus de deux — autres, nous ignorons leur hiftoire. Mais la comparaifon des Fig. 39 de la p. 547 et 64 de la p. 562 — la p. 180 du Manufcrit H, où fe trouve cette dernière, a d'ailleurs déjà été reproduite en 1833 en fac-fimile

---

3) Voir aussi la note 6 de la p. 579 qui suit.

4) On peut douter que cette horloge ait été destinée à l'usage sur mer, puisqu' elle doit avoir eu un grand nombre de roues (T. VI, p. 379), ce que Huygens voulait éviter (p. 516).

5) P. C. Molhuysen „Bronnen tot de Geschiedenis der Leidsche Universiteit", T. VII (la Haye, M. Nijhoff, 1924), p. 354 et 368.

6) Cependant les horloges de ce genre — voir sur l'horloge à équation, peut-être anglaise, qui se trouvait en 1699 dans le cabinet du roi Charles II d'Espagne, la p. 184 du T. I de l'„Histoire de la Mesure du Temps etc." de 1802 de F. Berthoud — étaient sans doute très rares, puisque Leibniz ne les connaissait pas. Il écrit dans ses Remarques de ± 1715 (voir la note 2 de la p. 502): „Je ne veux point parler icy de la Reduction du Tems égal au Tems apparent, cependant je reconnois, que si la Machine de l'Horloge ou de la Montre faisoit cette Reduction par elle même, suivant ce que l'ingenieux Auteur [H. Sully] de ce Discours nous fait esperer, ce seroit quelque chose de très-beau et de très-commode".

à la fin du T. II des „Chriſtiani Hugenii aliorumque ſeculi XVII virorum celebrium Exercitationes mathematicæ et Philoſophicæ" publiées à la Haye par P. J. Uylenbroek — fait voir immédiatement, ce qui toutefois n'a pas encore été remarqué, la très grande reſſemblance du régulateur de Sully avec celui, preſqu' inconnu juſqu'ici, de Huygens [1]). Voir encore ſur Huygens et Sully le texte des p. 546—547. Il ſemble permis de conclure que Sully a vu l'horloge de Huygens et van der Cloeſen, d'autant plus que nous ſavons qu'il viſita la Hollande lorſque ce dernier était encore en vie. Sully avait été „apprenticed to Charles Gretton" en Angleterre en 1694 [2]). Suivant F. J. Britten [3]) „on the completion of his apprenticeship he travelled on the Continent, viſiting Holland and Auſtria. From Vienna [voir la fin de la note 2 de la p. 502] he went to Paris". C'eſt à Leiden que, d'après J. Drummond Robertſon [4]), il publia en 1711 ſon premier ouvrage, intitulé „Abrégé de quelques règles pour faire un bon uſage des montres, etc." Il mérite d'être remarqué que Sully dans ſon ouvrage de 1726 [5]) ne dit pas que les courbes en queſtion ſont de ſon invention ni que ce ſont des développantes de cercle; ce qui ſe conçoit aiſément s'il ne faiſait qu'imiter ce qu'il avait vu, et peut-être acquis, en Hollande, de ſorte que l'équation des courbes lui était inconnue. L'invention de Sully, c'eſt que chez lui, comme le montre la Fig. 39, le ballottement du poids régulateur eſt rendu impoſſible. Par l'influence indirecte exercée ſur l'eſprit de Sully l'œuvre de Huygens des dernières années ſe rattache viſiblement à celle des grands horlogers anglais et français du dix-huitième ſiècle.

---

[1]) F. Marguet (ouvrage cité à la p. 546) dit (p. 139) de Sully: „Son horloge marine était construite sur des principes entièrement originaux". Comparez la note 6.

[2]) Suivant le secrétaire de la „Clockmakers Company" (et suivant une liste publiée par cette Compagnie en 1931 à l'occasion de son troiscentième anniversaire).

[3]) F. J. Britten „Old Clocks and Watches & Their Makers", 3ième éd. 1911, London, B. T. Batsford, p. 323. On trouve la même chose dans la sixième édition fort récente de Britten et dans l'„Histoire de l'Horlogerie" de P. du Bois, publiée à Paris en 1849—1850.

[4]) „The Evolution of Clockwork", p. 341.

5) „Description abrégée d'une Horloge d'une nouvelle Invention, pour la plus juste mesure du Temps sur Mer, avec le jugement de l'Acad. Royale des Sciences sur cette Invention, et une Dissertation sur la Nature des Tentatives pour la Découverte des Longitudes dans la Navigation, & sur l'usage des Horloges, pour la mesure du Tems en Mer" par Henry Sully, Horloger de S. A. S. Monseigneur le Duc d'Orleans, Paris, chez Briasson, 1726.

6) R. T. Gould écrit à la p. 36 de „The marine Chronometer": „Sully attached great importance to the precise from of these checks, which he described as a curve of his invention, previously unknown to geometers, and possessing the power of making the vibrations of lever and balance isochronous".

Nous ne voyons pas qu'il ait parlé expressément d'une courbe de son invention, bien qu'il amène le lecteur à croire qu'il doit en être l'inventeur. Dans l'ouvrage de 1726 il écrit (p. 2—3): „J'ai eu pour objet dans mes Recherches, une Machine, dont le mouvement fût aussi égal et aussi constant, *s'il est possible*, que celui d'une Pendule à Secondes, & qui n'eût pas les imperfections ausquelles les Pendules sont sujettes en Mer & en differens Climats.

Je réduis ces imperfections à trois principales, qui sont:

1° Les Variations, quelques petites qu'elles soient, provenantes de la dilatation & retrecissement des Métaux, & de tous les Corps, dont la chaleur & le froid sont des causes évidentes, sans en exclurre d'autres.

2° Les Variations encore bien plus considerables, causées par l'inégalité de la Pesanteur des corps en divers endroits du Globe terrestre, laquelle n'est pas encore réduite à des Regles certaines.

3° La difficulté, ou peut-être l'impossibilité de suspendre une Pendule, de longueur à mesurer le tems avec la justesse requise, dans un Vaisseau sur Mer, de maniere que, les divers mouvemens du Vaisseau ne dérange[nt] pas le mouvement particulier de la Pendule.

J'ai tâché d'éviter de pareils inconveniens dans la construction de mon nouvel Horloge. Vous jugerez de la maniere dont je me suis pris pour y réüssir. Si j'ai eu le bonheur d'y avoir ajoûté d'autres proprietez importantes à mon dessein, c'est peu qu'elles soient nouvelles, je n'y regarde que leurs utilitez. En voici deux des principales:

Le premiere de ces proprietez se trouve par l'application d'une certaine Courbe, *qui n'est pas encore connuë des Geometres, & qui excitera peut-être leur curiosité*, de conserver une parfaite isochronisme aux Arcs des vibrations de diverses grandeurs, & de quelque cause que cette diversité de grandeur des Arcs puisse provenir [N.B. Van der Cloesen peut avoir dit à Sully que Huygens avait cet espoir. Comparez le dernier alinéa de la note 1 de la p. 25 qui précède].

La seconde consiste dans une methode de réduire les frotemens de la Puissance reglante à la moindre quantité qu'on veut, ou presque à zero [comparez la p. 546 qui suit].

Ne pouvant entrer ici dans de grands détails, je me flâte que l'explication des Figures, & les Notes suivantes vous suffiront, pour en pouvoir tirer la plûpart des preuves des propositions ci-dessus".

À la p. 43, vers la fin de son livre, Sully écrit:

„C'est pourquoy les Directeurs, & Principaux Interessez des Compagnies des Indes, d'Angleterre, d'Hollande, des Pays-Bas imperiaux & de France, & les riches Negotians des autres Pays Maritimes, ne feroient peut-être pas mal de s'informer attentivement de quelle utilité pourra leur être cette Invention. Il ne leur coûtera pas grand peine de consulter là-dessus les plus scavans hommes en ces sortes de matieres, ni de grands frais pour en faire *des Experiences*". À la p. 14, écrite le 22 mars 1724, il fait mention de l'„Horologium oscillatorium" de Huygens, dont il connaît déjà l'édition nouvelle de cette année par 's Gravesande.

I.

L'APPLICATION DE JANVIER 1675 DU RESSORT SPIRAL RÉGULATEUR AUX BALANCIERS DES MONTRES.

[La Pièce (Manuſcrit E, p. 35—36), intitulée „Balancier de montre reglè par un reſſort" et contenant deux fois le mot εὕρηκα, a été publiée aux p. 408—409 du T. VII. Elle eſt ſuivie (p. 409—416) par le „journal" (Manuſcrit E, p. 36—40) ſe rapportant au même ſujet, que Huygens commença le 1 février (p. 411, l. 1) et dont font apparemment déjà partie le deuxième et le troiſième alinéa de la p. 409. La fin du journal (T. VII, p. 415, note 22) date de juillet 1676 [1]). L'article de février 1675 du Journal des Sçavans occupe les p. 424—425 du T. VII. — Voir ſur cette invention les p. 501—508 de l'Avertiſſement qui précède.]

---

[1]) Il faut y lire „boete" au lieu de „boite" (l. 16 de la p. 410 et 3 de la p. 412); „auſsi et que" au lieu de „aussi que" (l. 2 d'en bas de la p. 410); „autheur" au lieu de „l'autheur" (l. 1 d'en bas de la p. 413); „point" au lieu de „pas" (l. 8 de la p. 414); „j'aurois eu" au lieu de „j'aurois" (l. 7 de la p. 416). Le premier alinéa de la p. 413 doit commencer comme suit: „le 17e. Dim. J'eſtois preſt d'aller trouver M. Colbert a S. Germain, mais M. Perrault . . . ."

[2]) Voir les p. 481 et 489 du T. VII. Des montres à ressort spiral à balancier unique furent fabriquées à Paris en grand nombre (voir le quatrième alinéa de la note de la p. 454 du T. VII). Le stadhouder Guillaume III en reçut une en juillet 1675 (T. VII, p. 464 et 480), le roi Louis XIV en possédait une en août 1675 (T. VII, p. 493) et le duc de York en avait une à sa disposition en septembre 1675 (T. VII, p. 509), La précision n'était pas bien grande et les montres s'arrêtaient parfois (voir p. e. les p. 477, 481 en 490 du T. VII et 28 du T. VIII). Les premières n'avaient que l'aiguille des heures, puisque Huygens dit en août 1675 (T. VII, p. 489) qu'il peut en envoyer un deuxième à Mil. Brouncker „ou il y ait des minutes". Mais il n'y avait pas encore d'aiguille à secondes (même endroit). Les horlogers, travaillant indépendamment de Huygens, eurent évidemment une grande part au perfectionnement de la montre (T. VII, p. 510). Celles de Thuret étaient en 1675 les meilleures (T. VII, p. 542). Les montres étaient souvent en forme de poire (T. VII, p. 483, 485).

Quant à la construction de l'horloge avec deux balanciers, F. Marguet dans son ouvrage cité aussi à la p. 546 qui suit, écrit (p. 141) que l'horloge marine de 1736 de Harrison „avait

Réponſe des Etats de Hollande et de Weſtfriſe à une requête (inconnue) de Chr. Huygens au ſujet de la détermination des longitudes [3]).

25 *ſeptembre* 1675.

Op het verſoeck van Chriſtiaan Huygens van Zuylichem verſoeckende octroy op ſeeckere ſoorte van horologes bij hem van nieuws geinventeert en die ſoo correct ſouden gaen dat die naer het gevoelen van den ſuppliant in grooter formaet gemaect ſijnde ter zee ſoude connen werden gebruyct en dienen ſoude connen totte langh vergeefs geſochte deſignatie van longitude gemeinelijck genaemt Ooſt en Weſt, is aen den ſelven het verſochte octroy toegeſtaen voor den tijt van vijſthien jaeren en voorts op de voorſ. requeſte geappoſtilleert.

De Staten van Hollandt ende Weſtvrieslandt vinden goet dat deze requeſte ten aenſien van longitude gemeynlick genaemt het Ooſt ende Weſt, geſtelt ſal werden in handen van de Heeren Gedeputeerden der Stadt Dordrecht ende andere haere Ed. Gr. Mo. Gecommitteerde Raden tot de ſaecke van de zee, omme d'ſelve met ende nevens de Collegien ter Admiraliteyt in deze Provincien reſiderende ten dien reguarde ende ten aenſien van het ſucces van het gebruyck van dien te examineren ende te dienen van hare conſideratien ende advijs.

Les Archiviſtes de la Haye, qui nous ont fait parvenir cette Pièce et la ſuivante, nous ont en même temps fait ſavoir que les notes, d'ailleurs ſommaires, du député de Dordrecht Muys van Holy des années 1675 et 1676 (et il en eſt probablement de même pour les années ſuivantes) ſur les réunions de la commiſſion nommée — la „Beſogne uit de Staten van Holland voor de Zeezaken" préſidée par Dordrecht, à laquelle furent ſouvent adjoints les „Gedeputeerden uit de Admiraliteit" — ne contiennent rien ſur ce ſujet.

---

deux balanciers liés: c'était une idée de Leibnitz": il y a en effet deux balanciers dans le modèle — d'ailleurs fort différent de ceux de Huygens — proposé par Leibnitz dans son article de mars 1675 dans le Journal des Sçavans. Ce modèle n'a d'ailleurs pas été exécuté, puisque Leibniz écrit à ce propos: „Lorsque Mr. Huguens publia son Ressort vibrant à spirale, je publiay un peu après dans le Journal des Sçavants un autre Principe d'égalité, qui n'est pas phisique, comme est la supposition de l'égalité des vibrations des Pendules ou des Ressorts, mais purement mécanique, consistant dans une parfaite Restitution de ce qui doit vibrer, puisqu' alors les Vibrations sont égales, parce qu'elles sont justement les mêmes... J'ay pensé quelquefois à faire executer cette Invention, qui promet des nouveaux avantages assez considérables; Mais j'ay toûjours manqué de l'assistance d'un bon Maître, qui eût une bonne volonté d'y travailler. Etc." („Remarques etc." citées aussi dans la note 2 de la p. 502 qui précède).

Voir sur des horloges à double balancier construites en Angleterre peut-être déjà avant 1675 la p. 181 de „The Evolution of Clockwork" de J. Drummond Robertson.

3) Texte emprunté aux Résolutions des Etats de Hollande et de Westfrise (Archives de l'Etat à la Haye).

Les Etats de Hollande et de Weſtfriſe à Chr. Huygens [1]).

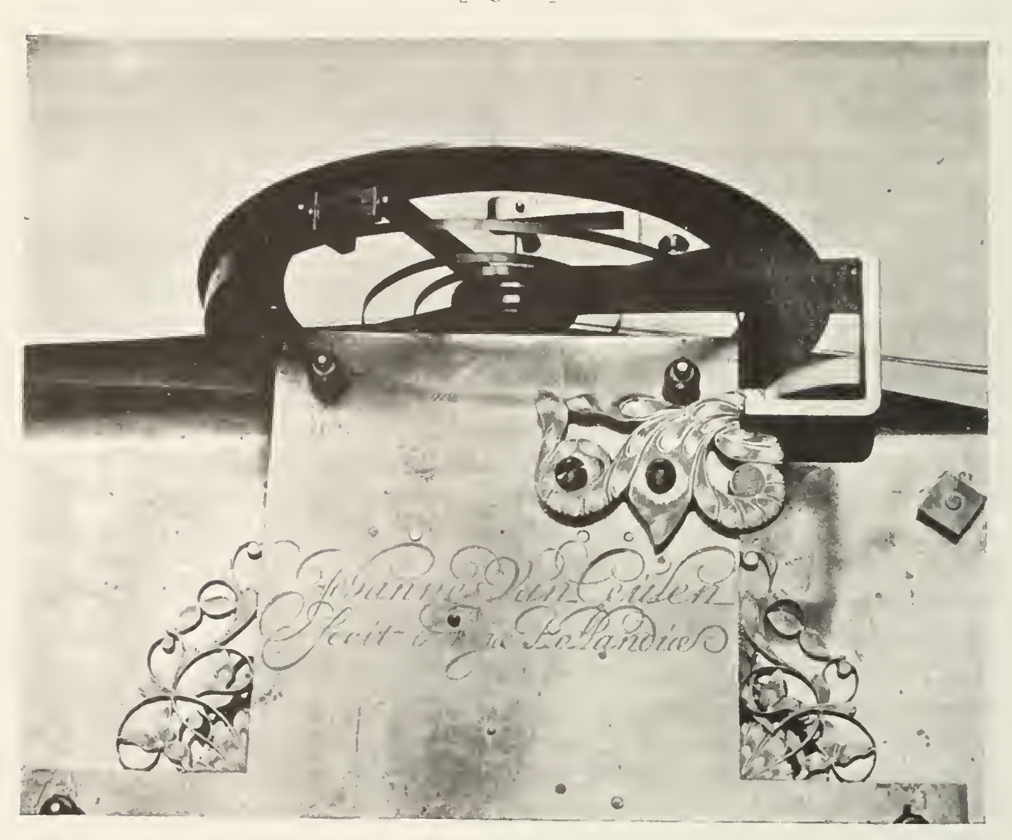
27 *ſeptembre* 1675.

De Staten van Holland enz. doen te weten, alſoo ons vertoont is bij Chriſtiaen Huygens van Zuylichem, hoe dat onlangs bij hem was geïnventeert ſekere niewe conſtructie van horologien, bequaam om in den ſack te werden gedragen, welckers beweginge niettemin even zoo eenparigh, exact ende ſeker bleeff als die van de ſlinger-wercken voor deſen bij hem ſuppliant geinventeert ende nu allom in groot gebruyck, ende alſoo hy ſuppliant genegen was deſelve inventie ten dienſte van 't gemeen aen den dagh te brengen verſocht reverentelijck, wanneer deſelve aen ons ofte aen heeren commiſſariſſen van onſen 't wegen daer toe verſocht, ſoude weſen gecommuniceert ende verthoont, dat het ons goede geliefte moghte zijn hem ſuppliant te vergunnen octroy ende privilegie by het welcke allen ende ijegelycken in deſe onſe provintie verboden wierde ſodanige horologien ſonder ſijn ſuppliants permiſſie naer te maecken, hetzij in 't geheel ofte ten dele, het ſij dan oock onder pretext van eenige veranderingh ofte herſchickinge ofte anderſſints, in wat forme ofte maniere het ſoude mogen weſen, ofte elders gemaeckt ſijnde ende met ſeecker ſijns ſuppliants eighen merck niet geteeckent zijnde in deſe onſe provintie te koop te brengen ofte te verthonen, op pene van de ſomme van drie duyſent gulden ten proffijte van hem ſuppliant nevens de confiscatie van ſodanige verboden wercken te verbeuren — ſoo iſt dat wij de ſaecke ende 't verſoeck voorſ. overgemerckt hebbende ende genegen weſende ten bede van den ſuppliant uyt onſe reghte wetenſchap, ſouveraine maght, ende autoriteijt, den ſuppliant geconſenteert ende geoctroyeert hebben, conſenteren ende octroijeren denſelven mits deſen omme het voorſ. horologie geduyrende den tijt van vijfthien naeſtkomende achtereenvolgende jaeren binnen onſen lande van Hollandt ende Weſtvrieſlandt alleene te mogen maken ofte doen maken. verbiedende allen ende ijegelijcken het voorſ. horologie ſonder ſijns ſuppliants permiſſie in den voorſeyden onſen lande van Hollandt ende Weſtvrieſlandt naer te maecken het ſij int geheel ofte ten deele, hetſij dan oock onder pretext van eenige veranderinge ofte herſchickinge ofte anderſints in wat forme ofte maniere het ſoude mogen weſen ofte elders naergemaeckt ſijnde ende met ſeecker ſijn ſuppliants eygen merck niet geteeckent ſijnde binnen den voorſeyden onſen lande te brengen om te verkoopen ofte te verthoonen op verbeurte van alle de naergemaeckte ingebrachte ofte vercochte horologien ende een boete van drye hondert gulden daer en boven te verbeuren, t' apliceeren een derde part voor den officier, die de calange doen ſal, een derde part voor de armen der plaetſe, daer het caſus voorvallen ſal ende 't reſterende derde part voor den ſuppliant.

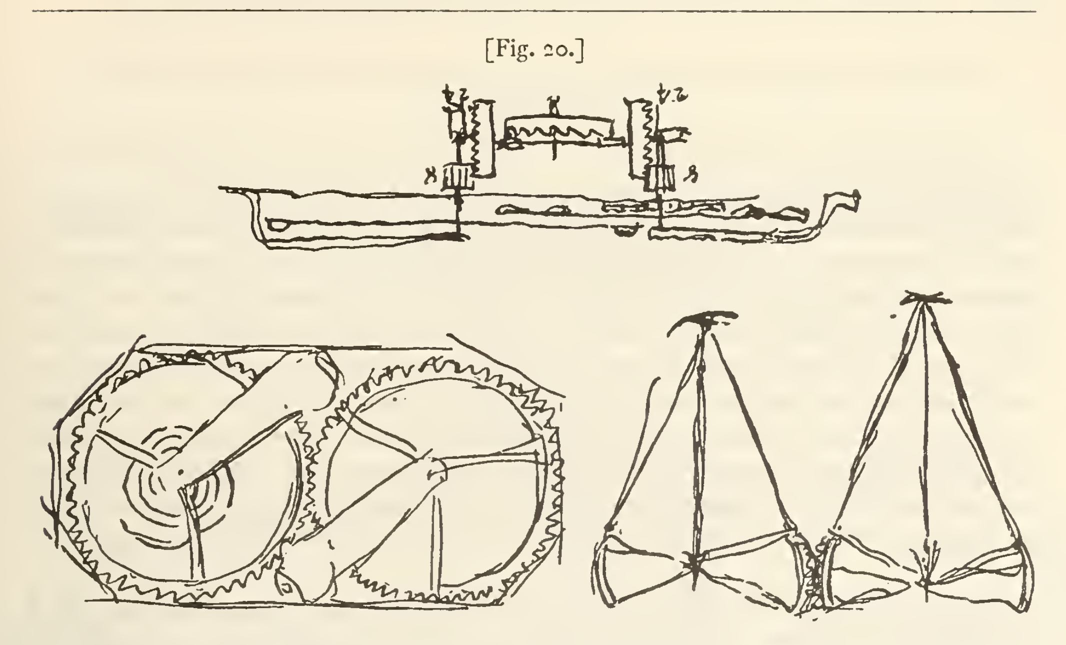
---

[1]) Le texte qui suit est emprunté aux „Minuut Octroyen" de 1675 des Archives des Etats de

[Fig. 21.]



[Fig. 20.]



La Fig. 20, empruntée à la p. 43 du Manuscrit E datant de 1675 (ou 1676, comparez la note 1 de la p. 496), repréſente trois modèles de balanciers doubles (comparez le deuxième alinéa de la p. 507). Conformément à ce qu'on voit dans le premier et le troiſième modèle, Huygens écrit: „Je crois qu'il ne faudroit mettre qu'a l'un des balanciers un petit reſſort [ſpiral], parce que ſi on en en met auſſi a l'autre on aura de la peine a les faire quadrer enſemble".

La conſtruction à deux balanciers n'a apparemment pas eu de ſuccès en ce moment; mais plus tard d'autres conſtructeurs y ſont revenus [2]).

La Fig. 21 repréſente le reſſort ſpiral et le balancier du planétaire de Huygens, conſtruit par van Ceulen, qui ſe trouve actuellement dans le „Nederlandſch hiſt. natuurw. Muſeum" à Leiden. Comparez la note 1 de la p. 508 qui précède. Huygens avait eu d'abord l'intention d'employer une horloge à pendule, puiſqu'il écrit (Manuſcrit F. p. 23, datant de 1680): „Le pendule pourra eſtre d'environ 18½ pouces, pour faire 2 ſecondes en 3 vibrations". Il ajouta plus tard: „J'ay pris le balancier a reſſort ſpirale pour plus grande commoditè". A la p. 47 du même Manuſcrit il avait écrit en marge à côté d'un paſſage biffé: „Il vaudra mieux de faire cette horloge avec un balancier à reſſort ſpirale, pour avoir moins d'embaras en l'ouvrant. Car auſſi bien il ne s'agit pas d'une grande exactitude pour ce qui eſt des heures [3]). faire le temps du balancier en ſorte qu'on puiſſe touſjours appliquer une pendule de 18 pouces". Toutefois le balancier du planétaire fait une oſcillation ſimple en une ſeconde.

Hollande et de Westfriſe (Archives de l'Etat à la Haye). Comme on voit la Pièce s'accorde en grande partie avec l'octroi donné en octobre par les Etats-Généraux (T. VII, p. 507).

[2]) Voir la note 2 de la p. 522 qui précède.

[3]) Dans ses „Remarques" — voir la fin de la note 2 de la p. 522 — Leibniz écrit: „Il est vray, que la

Resolutiën vande Bewindhebberen vande Oostindische Comp.ie ter Camer tot Amsterdam.

Donderdagh den 31 Decemb. 1682. . . . De Heer Burgermeester Hudde heeft ter vergaderingh voortgebraght, en openinge gedaen van 't gene sijn Ed.t is voorgekomen, omtrent seeckere nieuwe inventie van horologien van die accuraetheijt, dat deselve in den tijdt van een etmael geen secunde verlopen; waer door seer apparent sal konnen werden uijtgevonden het Oost en West; waer op sijnde gedelibereert is sijn Ed.t voor de gedane openinge bedanckt, en wijders geresolveert sijn Ed.t te versoecken, om het bestier hier van op sigh te nemen, mitsgaders dit werck te dirigeren, en te vervolgen, om ware het doenlijck ten goeden effecte te brengen: ten dien eijnde te corresponderen, mitsgaders de hulpe en assistentie te versoecken van de Heer Huijgens, sich op die saken naeuw verstaende, neffens eenen van Ceulen, die de voornoemde horologien is maekende, met die verdere authorisatie, om daer aen te koste te leggen en te spenderen tot een somme van een of twee duijsent gulden toe.

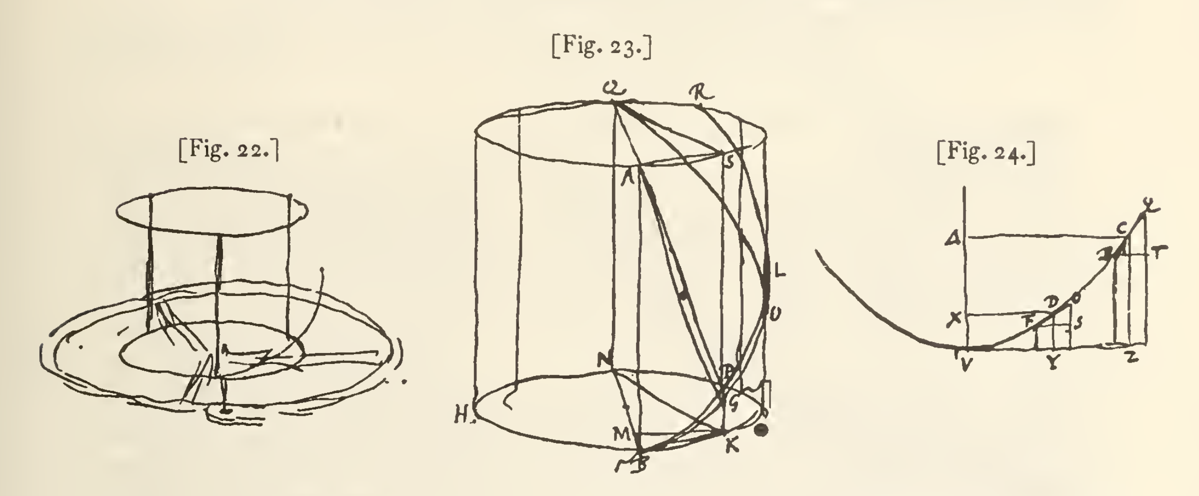
Maandach den 28 Februarij 1684 [1]). Is ter vergaderingh geproduceert een brieff door de Heer Huijgens aan de Heer Burgermeester Hudde geschreven; dienende tot notificatie, dat sijn Ed.t in het uijtvinden en maeken van accurate horologien, om daer door te vinden het Oost en West, daer toe sijn Ed.t bij resolutie vanden 31sten December 1682 is versocht, soo verre is geadvanceert, dat de selve vanden anderen niet meer als een, of ten uijtterste twee secunden verschilden, met vast vertrouwen, dat sijn Ed.t dat different soude cunnen remedieren, en het werck in korten tot een volkomen perfectie brengen, waer op sijnde gedelibereert, is verstaen den gemelten Heer Burgemeester voor sijne gedaene openingh te bedancken, en sijn Ed.t wijders te versoecken, om daer over een brieff van dancksegginge uijt den naem van deze vergaderingh aen den gemelten Heer Huijgens te schrijven, en sijn Ed.t daer bij tot continuatie in sijnen goeden ijver te animeren.

Pendule a beaucoup plus de part au gouvernement de l'Horloge, que le Ressort à spirale n'en a au gouvernement de la montre. Outre la preuve qu'on en a alléguée, en voicy une autre tout aussi sensible: c'est que l'Horloge à Pendule ne sçauroit aller à moins qu'on ne mette la Pendule en vibration, mais la montre va par sa propre force, et fait vibrer le Ressort spiral".

[1]) En publiant en cet endroit la résolution du 28 février 1684, nous admettons qu'en ce moment van Ceulen n'avait pas encore changé en „pend. cyl. trich." les deux horloges à ressort spiral régulateur: voir le § 4 de la p. 532 qui suit. C'est sans doute à ce changement que Huygens fait allusion dans sa lettre en disant que les horloges seront perfectionnées. Nous regrettons de ne pas posséder des horloges marines construites par van Ceulen des esquisses telles que celle de la p. 15 qui précède (Fig. 10).

II.

L'APPLICATION DE DÉCEMBRE 1683 DES VIBRATIONS DE TORSION AUX HORLOGES MARINES (PENDULUM CYLINDRICUM TRICHORDON)[1].



[Fig. 22.] [Fig. 23.] [Fig. 24.]

ἑυρηκα Hagæ, 4 Dec. 1683.

§ 1. Pendulum cylindricum Trichordon [Fig. 22]. Inventum poſtquam elaterem ſpiralem frigore accelerare motum horologij repperi[2]). Hic effectum elateris abſque elatere habemus[3]). Aequalitas recurſuum exiſteret ſi punctum moveretur in parabola cujus $\frac{1}{2}$ lat. rectum AB [Fig. 23], cylindro circumplicata. AB ∞ diam. BN [Fig. 23][4]). Demonſtratio hinc. Si parabolam [Fig. 24] tangant rectæ FO, BQ in punctis D et C, unde ducantur perpendiculares in VZ, tangentem in vertice, rectæ autem ab FO et à BQ eidem VZ perpendiculares intercipiant partes ejus æquales, ſintque FS, BT ipſi VZ parallelæ[5]) erit QT ad OS ut CΔ ad DX, ſive ut ZV ad YV. Sed VY, VZ ſunt

---

[1]) La Pièce, que nous divisons en cinq §§, est empruntée aux p. 179—180 du Manuscrit F.

[2]) Voir sur la question de l'influence de la température sur la période de vibration des ressorts spiraux la p. 508 l'Avertissement qui précède.

[3]) Il y a donc ici une certaine continuité: comparez la p. 509 de l'Avertissement.

[4]) Voir sur la courbe décrite par le point B le § 2 qui suit, notamment les notes 4 et 7 de la p. 529.

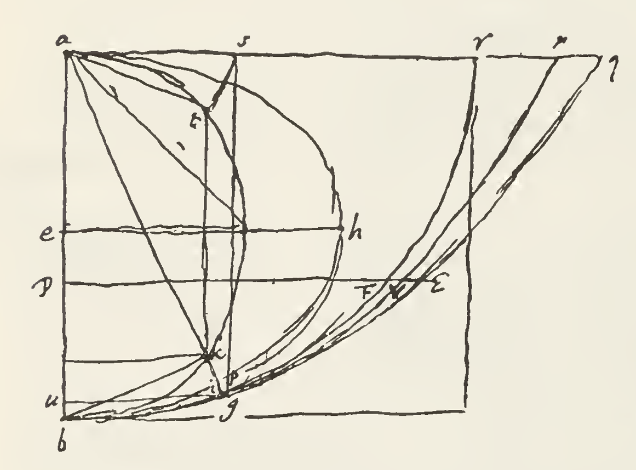
[5]) On a donc FS = BT.

diſtantiæ quibus a quiete extrahitur punctum B in figura cylindri [Fig. 23], quantum ad motum horizontalem. Renitentiæ vero itemque incitationes ponderis B horizontaliter tracti in punctis parabolæ D, C [Fig. 24], ſunt inter ſe ut QT ad OS quia BT, FS æquales [1]). Igitur erunt etiam iſtæ incitationes ut ZV ad YV. Unde æqualitas recurſuum [2]).

AB ∞ diam. BN [Fig. 23]. Si BK ſit $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, fient recurſus $\frac{1}{4}$ ipſius. fit punctum G inferius P, ubi eſſe deberet ad æquabilis motus lineam deſcribendam, tantum $\frac{1}{1000}$ AB, poſita nempe BPLR parabola [3]) ut oportet.

[Fig. 25.]

7 Dec. 1683.



Imo parabola *bvr* cujus ſemilatus rectum *ab*.

§ 2. Circulo AQ [Fig. 23] immoto, movetur horizontaliter circulus hic BN tribus filis è ſuperiore ſuſpenſus, unde circulus hic ſurſum fertur. Et punctum B deſcribit curvam quandam BGOQ in ſuperficie cylindrica, quæ curva ſi cum ſuperficie illa in planum explicetur erit linea ſinuum quam vocant, in qua ſi ad axem *ba* [Fig. 25] applicetur quopiam DE normaliter, ea æquabitur arcui *b*F à quadrante *br* abſciſſo.

---

[1]) Dans l'état de repos la tension de chacun des trois fils est $\frac{1}{3}$ G, G étant le poids du cercle inférieur. Lorsqu'on tourne ce cercle de manière que les trois fils font désormais un angle α avec la verticale, et qu'on maintient le cercle dans cette position en appliquant une force horizontale tangentielle K („renitentia") en chacune des extrémités inférieures des fils, la tension S des fils, dont la composante verticale est toujours $\frac{1}{3}$ G, sera telle que $K = \frac{1}{3} G \operatorname{tg} \alpha$. Les forces K égales et contraires qui mettent le cercle en mouvement lorsqu'on ne le retient plus („incitationes") sont donc proportionnelles à tg α. Or α est aussi l'angle entre la tangente à la courbe que l'extrémité inférieure du fil va décrire et la projection de la tangente sur un plan horizontal (puisque la tangente est perpendiculaire au fil). Les „renitentiæ" en D et C [Fig. 24] seraient donc proportionnelles à $\frac{QT}{BT}$ et $\frac{OS}{FS}$ respectivement (c.à.d. à QT et OS, puisque BT=FS), si la courbe décrite, rendue plane par le développement du cylindre de la Fig. 23, était une parabole.

[2]) D'après les p. 483 et suiv. du présent Tome.

[3]) Après le développement du cylindre sur un plan.

Si enim quæratur hujus curvæ punctum G [Fig. 23] in recta KS, conſtat junctâ SA angulum ASG eſſe rectum. unde quadr. SG æquale differentiæ quadratorum AG, AS quorum AG qu. æquale eſt AB ſive AQ. unde qu. SG ∞ qu. SQ ſive KN. Evoluto igitur arcu BK, ſive in altera figura [Fig. 25] arcu *at* in *as*, ſi ponatur perpendicularis *sg* æqualis KN ſive in altera, *ak*, habebitur in plano evoluto punctum *g*. Ducatur *gu* applicata, quæ ſecet arcum *b*F*r* in *i*. Quod ſi jam oſtendatur *ug* ∞ arcui *bi*, erit punctum *g* in curva illa ſinuum [4]). Oſtenditur autem ſic. Cum *sg* ſive *au* ſit ∞ *ak* ex conſtructione, erit perpendicularis *iu* æqualis *bk*, quia producta *ak* incidit in *i* [5]). Unde arcus *bi* æqualis erit arcui *bk* quia [6]) &c. ſed *bk* arcus æqualis eſt rectæ *as* ſive *ug*. Ergo *ug* æqualis arcui *bi*. quod erat demonſtrandum [7]).

---

4) En prenant dans la Fig. 25 *aq* pour axe des x et *ab* pour axe des y, on peut en effet démontrer qu'une courbe construite de telle manière que l'abscisse *ug* ou x, sur laquelle se trouve le point i, est égale à l'arc *bi* du quart de circonférence *bFr*, a pour équation $y = R \cos \frac{x}{R}$, en posant $ab = R$: la courbe est donc une sinusoïde. Voyez sur l'histoire de la sinusoïde la p. 511 de l'Avertissement qui précède.

Cette mise en équation ne correspond évidemment pas avec le raisonnement de Huygens. Il avait considéré en 1658 la courbe (BRVC de la Fig. 4 de la p. 348 du T. XIV) provenant du développement sur un plan de la surface courbe d'un onglet cylindrique: il avait constaté que l'ellipse qui limite cet onglet est changée de cette façon en une courbe — Roberval (voir à la p. 108 des „Divers Ouvrages de Math. et de Phys. par MM. de l'Ac. R. des Sciences" de 1693, ses „Observations sur la composition des mouvements etc.") l'appelle la „compagne de la cycloïde" — pour laquelle (dans la figure nommée du T. XIV) HR = arc BK (l. 10 d'en bas de la p. 348), ce qui correspond dans la présente Fig. 25 à l'égalité de x ou *ug* avec l'arc *bi*. Dès que cette dernière égalité a été démontrée dans le cas de la Fig. 25, il apparaît que la ligne en question est la même que celle considérée en 1658 (à laquelle Huygens ne donnait pas encore en ce temps le nom de „linea sinuum").

Ceci ne veut pas dire que dans la présente Fig. 23 la ligne tracée par le point B sur le cylindre soit une ellipse. En effet dans l'équation $y = R \cos \frac{x}{R}$ la longueur R est le *diamètre* du cylindre; tandis que dans le cas des Fig. 3 et 4 de la p. 348 du T. XIV on obtient la même équation $y = r \cos \frac{x}{r}$ (le plan qui coupe le cylindre étant incliné à 45°; si l'angle d'inclinaison était β, on trouverait $y = r\,\mathrm{tg.}\beta \cos \frac{x}{r}$) où r représente le *rayon* du cylindre. Dans la présente Fig. 25 la demi-circonférence *bkta* correspond à la demi-circonférence BKN de la Fig. 23; mais la circonférence à *rayon* R est *bFr* et c'est sur elle que se trouve le point i.

5) Les triangles *aui* et *akb* sont congruents, puisqu'ils sont rectangles et qu'on a de plus $ai = ab$ et $au = ak$. D'où résulte à la fois que le prolongement de *ak* passe par le point i et que $iu = bk$.

6) L'égalité des arcs *bi* et *bk* résulte de l'égalité des angles *bai* et *bak*, et du fait que le rayon du quart de circonférence *biFr* est le double de celui de la demi-circonférence *bka*.

7) En comparant (Fig. 25) la courbe *bgq* ou $y = R \cos \frac{x}{R}$ (note 4) avec la parabole *bvr* à demi

Spatium *bgzqab* eſt æquale quadrato ab *ab*[1]).

Curva *bgzq* eſt æqualis curvæ dimidiæ Ellipſis *ahb* poſita *eh* potentiâ dupla ad radium *ae*[2]).

§ 3. Quæcunque fuerit longitudo filorum AB [Fig. 23 et 26] ſemper motus iſo-

---

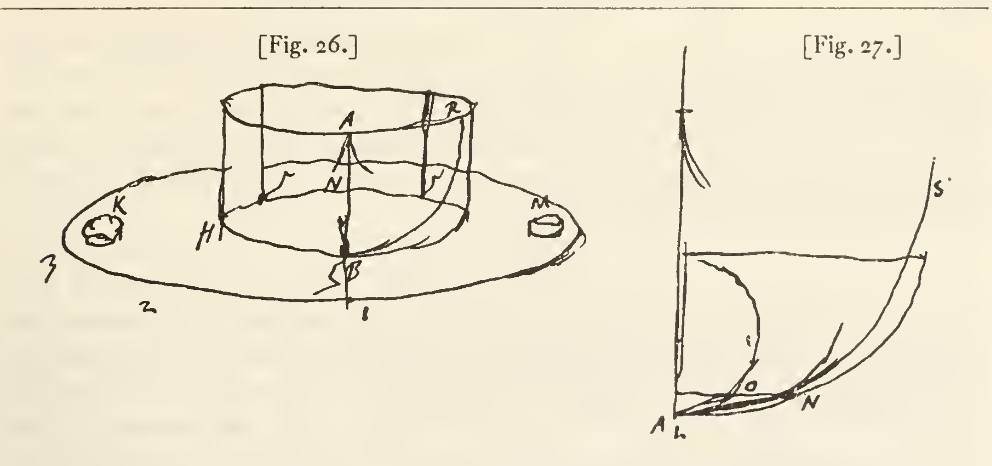
latus rectum *ab* ou R, dont il est aussi question dans la Fig. 24 et le § 1, et qui a pour équation $y = R - \frac{x^2}{2R}$, on voit que la différence des ordonnées pour une même valeur de x (PG dans la Fig. 23) est $R\left(\cos\frac{x}{R} - 1\right) + \frac{x^2}{2R}$, ou $\frac{1}{R^3}\left[\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!\,R^2} + \frac{x^8}{8!\,R^4}\cdots\right]$, ce qui est inférieur à $\frac{x^4}{4!\,R^3}$, donc aussi à $\frac{1}{1000}R$, pour $x = \frac{\pi}{8}R$, valeur considérée par Huygens dans le § 1.

Comment est-il arrivé à cette conclusion? Nous nous proposons de revenir sur cette question purement mathématique dans un des Tomes suivants.

[1]) On a en effet $\int_0^{\frac{1}{2}\pi R} R\cos\frac{x}{R}\,dx = R^2$. Voir sur la démonstration de Huygens les deux premières lignes de la p. 349 du T. XIV et comparez, sur cette quadrature, le dernier alinéa de la p. 52 du T. I (lettre de Mersenne à Huygens de janvier 1647); Mersenne parle (sans le nommer) d'un résultat obtenu par Roberval; voir la p. 95 du supplément de 1922 par C. de Waard à l'édition des Oeuvres de Fermat par Tannery et Henry (Paris, Gauthier-Villars).

[2]) On peut vérifier de la manière suivante l'exactitude de ce résultat. La longueur de la moitié de l'ellipse qui a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, où $a > b$, est $S = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$, où $\frac{x}{a} = \sin\varphi$ et $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Dans le cas considéré par Huygens $a = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ et $b = \frac{1}{2}R$. On a donc: $S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2 - \sin^2\varphi}\,d\varphi$, ou bien $S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \cos^2\varphi}\,d\varphi$, ou encore $S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \sin^2\psi}\,d\psi$, en prenant $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Quant à la longueur de l'arc considéré de la sinusoïde $y = R\cos\frac{x}{R}$, elle est $L = \int_0^{\frac{\pi R}{2}}\sqrt{1 + \sin^2\frac{x}{R}}\,dx$, ce qui se réduit également, en posant $\frac{x}{R} = \psi$, à la valeur $R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \sin^2\psi}.\,d\psi$. On a donc $L = S$. C. Q. F. D.

Rappelons, sans tâcher pour le moment de reconstituer le raisonnement de Huygens — voir la fin de la note 7 de la p. 529 — que Pascal dans la lettre de 1659 de „A. Dettonville" à Huygens (notre T. II, p. 307, 397) réduit „la dimension des lignes de toutes sortes de roulettes ... à des lignes eliptiques".



[Fig. 26.] [Fig. 27.]

chronus eſt per parabolam BR cylindro applicatam cujus $\frac{1}{2}$ latus rectum AB[3]).

Pondere orbis BHN aut annuli aucto, idem tempus recurſus permanet[4]). Sed extenſo orbe vel circumferentia penſili pondus continente lentior evadit motus ſecundum rationem diametrorum[5]). Ponamus duplam.

---

[3]) Cette affirmation n'est pas corroborée, comme précédemment (fin du § 1 et note 7 de la p. 529) — et comme Huygens aurait sans doute pu le faire ici aussi —, par une évaluation numérique de la différence des ordonnées, pour une même abscisse donnée, de la ligne décrite sur le cylindre par le point B, et de la parabole nommée, appliquée au cylindre. Lorsqu'on développe le cylindre sur un plan, la ligne décrite par B devient une courbe à équation $y = \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \frac{x}{R}}$, l étant la longueur des fils, et R, comme précédemment, le diamètre du cylindre. Les axes sont choisis comme dans la note 7 nommée. L'équation de la parabole est $y = l - \frac{x^2}{2l}$. Le développement en série fait voir que la différence des ordonnées des deux courbes (la première moins la deuxième) pour une même valeur de x a pour premier terme $\frac{x^4}{2l}\left[\frac{1}{3R^2} - \frac{1}{4l^2}\right]$. Le terme en x^2 disparaît donc comme dans le cas $l = R$ conſidéré dans la note 7, de sorte que le mouvement est toujours approximativement isochrone, ainsi que Huygens le dit.

[4]) À cause, peut-on-dire, de la proportionnalité de la pesanteur et de la masse: comparez la note 7 de la p. 45 qui précède, et la note 3 de la p. 578 qui suit.

[5]) Puisque le moment d'inertie I du cercle mobile augmente dans la proportion n^4 lorsque le rayon devient n fois plus grand (l'épaisseur et le poids spécifique restant les mêmes), que le moment des forces agissant sur le cercle pour un angle de torsion donné devient en même temps, comme le poids, n^2 fois plus grand, et que la période est proportionnelle à la racine carrée du quotient de I par le moment des forces pour un angle de torsion donné.

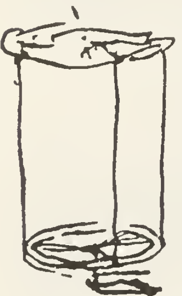
Huygens, dans la démonstration du texte qui suit, assimile les oscillations considérées autour de l'axe vertical à des vibrations linéaires, comme nous l'avons déjà dit à la p. 512 de l'Avertissement qui précède. Voir encore à ce sujet la note 4 de la p. 567 qui suit.

Fit itaque motus ponderum per fimiles arcus duplo major, pofita eadem altitudine afcenfus. unde tempora funt in cycloidibus, ubi, in eadem altitudine, arcus funt dupli [Fig. 27]. quod ut fiat debent fubtenfæ LO, LN in circumferentijs circulorum genitorum effe in ratione dupla. unde diametri in quadrupla. diametri autem bis fumptæ faciunt pendula iftarum cycloidum; quorum igitur longitudo rationis quadruplæ, facit recurfuum tempora rationis duplæ.

Ponderibus minoribus K, M, ponderi orbis additis [Fig. 26] [1]), poterimus ea verfus centrum promovendo, accelerare non nihil recurfuum tempora; fed fciendum longe minus in hoc ipforum effe momentum quam in circulis fimpliciter fufpenfis e centro [2]).

Quadruplicando fila AB, fit motus duplo lentior, ut in pendulis [3]). Si duplicetur diftantia filorum AB à centro, manente eodem annulo, erunt tempora ut in cycloidibus, ubi, in æqualibus arcubus, altitudines funt quadruplæ. unde efficitur tempora hic fore fubdupla priorum [4]).

[Fig. 28.]



§ 4. Le 17 dec. 1683 j'ay porte a Van Ceulen l'horloger le modelle que j'avois fait de ce mouvement de Pendule Cylindrique, pour changer de cette facon les 2 horloges que je luy avois fait faire pour la Compagnie des Indes Orientales [5]). J'avois priè mon frere de Zeelhem de venir avec moy: parce que ledit horloger s'imaginoit d'avoir trouvè la mefme chofe que moy [6]), apres m'en avoir ouy dire quelque chofe en gros. Mais ayant vu le modelle il avoua que ce qu'il avoit modelè n'y reffembloit nullement.

§ 5. 10 Jun. 1684.

Optima ratio horum fi filis longis utamur [Fig. 28] puta $9\frac{1}{2}$ vel 38 pollicum quæ extremo annuli margini illigentur, atque ita circulare pendulum fiat; axe annuli in foramen ftabile immiffo propter navis motum.

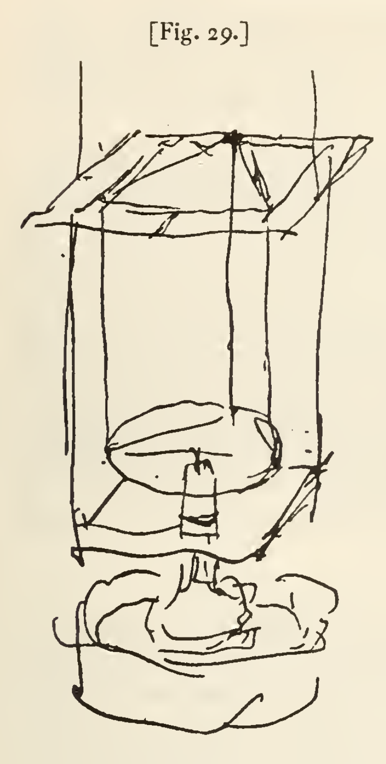
---

[1]) Comparez la note 2 de la p. 28 du T. XVII.

[2]) Dans les deux cas le moment d'inertie I varie par hypothèse de la même quantité. Mais le moment des forces est bien plus petit lorsque le cercle n'est suspendu qu'à un seul fil tordu. Le $\frac{\partial T}{\partial I}$ (où T est la période), qui est inversement proportionnel, comme T elle-même, à la racine carrée du moment des forces pour un écart angulaire donné, est d'autant plus grand que ce moment est plus petit.

[3]) Cæteris paribus, le moment des forces est proportionnel à tg α (note 1 de la p. 528), c.à.d. à fort peu près à la longueur des fils. Et la période est inversement proportionnelle à la racine carrée du moment des forces.

[Fig. 29.]



§ 6 [7]).

que l'on ne doit pas demander ces mouvements [Fig. 29] dans une derniere egalitè, mais a peu pres.

que l'invention de la detente ſans manquer eſt de grande importance [8]) qui peut etre appliquée au pendule triangulaire [9]).

que ces meſſieurs les directeurs de la Compagnie des Indes ne devroient pas regarder a quelque peu de depenſe, pour arriver a cette invention ſi utile [10]).

Tourner les horloges faits pour en faire des pendules triangulaires [11]). l'une au moins. et laiſſer l'autre comme elle eſt pour la grande agitation du vaiſſeau.

Reſolutiën vande Bewinthebberen vande Ooſtindiſche Comp.ie ter Camer tot Amſterdam.

Donderdag den 27sten Julij 1684 .... Den Heer Burgemeeſter Hudde heeft ter vergaderingh geproponeert, dat ſijn Ed.t bij reſolutien van den 31sten December 1682

---

4) Le moment des forces étant doublé, la période sera diminuée dans le rapport $\sqrt{2}$.

5) Comparez la p. 513 de l'Avertissement qui précède.

6) Comparez la note 9 de la p. 32 qui précède.

7) Le „§ 6" est emprunté à la p. 192 du Manuscrit F. La p. 193 porte la date du 2 mai 1684. Toutefois il paraît probable que le § 6 date de fin 1685: comparez le 4ième alinéa avec le premier alinéa de la p. 539.

8) Nous ne savons pas exactement de quelle invention il s'agit. Il semble bien que Huygens parle ici de la construction d'un remontoir (comparez l'expression „ontsluijtingh", p.e. dans la note 2 de la p. 17 qui précède). Il est en effet presque certain que les horloges à „pendulum cylindricum trichordon" construites par J. van Ceulen ont été des remontoirs à ressorts, remarque qui s'applique aussi aux horloges à ressort spiral qui furent changées en elles (l. 7 de la p. 510). Comparez la note 11.

9) Nous savons en effet que l'horloge à pendule triangulaire qui fait son apparition en 1685, était un remontoir: voir p.e. la note citée dans la note précédente, et la Pièce IV qui suit (p. 539).

10) Comparez les p. 509—511 de l'Avertissement qui précède.

11) Cette remarque porte à croire (comparez la note 8) que l'agencement des roues des horloges à „pendulum cylindricum trichordon" ne différait pas énormément de celui des roues des horloges à pendule triangulaire qui leur succédèrent. Comparez le deuxième alinéa de la p. 513.

en 28 Februarij 1684 geauthoriſeert ſijnde, om met den Heer Huijgens en eenen van Ceulen te corresponderen over het uijtvinden en maeken van ſeer accurate horologien, die van malkanderen in een etmael geen ſecunde ſouden verlopen, waerdoor ſoude cunnen werden uijtgevonden het Ooſt en Weſt en daer aen te ſpenderen een à twee duijſent gulden, ſijn Ed.t dat werck ſoo veel in hem is geweeſt heeſt voortgeſet, ſonder dat evenwel tot noch toe het gewenſchte ooghwit is bereijckt; dat ſijn Ed.t beſt geacht heeſt, alvoren verder te continueren, hier van kenniſſe aen deſe vergaderingh te geven, item voor te ſtellen, of de ſelve ſoude cunnen goetvinden te doen uijttellen aen den voornoemden van Ceulen, een man van weijnigh vermogen [1]), twee honderd ſilvere ducatons, op reeckeningh van ſijnen gedanen arbeijt; waarop ſijnde gedelibereert, is verſtaen den Heer Burgemeeſter Hudde voor ſijne gedane communicatie te bedancken, ſijn Ed.t te verſoecken, om conform de reſolutien hier boven geallegueert, den Heer Huygens te verſoecken en te animeren, om in ſijnen goeden ijver te willen continueren; wijders aen den voornoemden van Ceulen toe te laten komen de voorſz. twee hondert ducatons, om ware het doenlijk deſe dienſtige ſaeke tot perfectie te brengen.

Donderdagh den 30 Auguſt: 1685... Den Heer Burgemeeſter Hudde de vergaderingh voorgedragen hebbende, dat den Heer Huijgens preſenteert [2]) perſonelijk een preuve in zee te nemen van de accurate horologien bij ſijn Ed.t uijtgevonden, en met voorkenniſſe van deſe vergaderingh gedaen maeken, of deſelve de bewegingen vande zee kunnen uijtſtaen, waer door als dan gemeijnt werd, dat ſoude cunnen werden uijtgevonden het Ooſt en Weſt, ſoo als daer toe de reſolutien van den 31 December 1682, 28 Februarij, en 27 Julij 1684 tenderen, is de voorſz. propoſitie en preſentatie voor ganſch aengenaem opgenomen, en is dienvolgende verſtaen dat den voornoemden Heer Huijgens daer toe ſal werden gepreſenteert het galjot van Comp.ie alhier, en den perſoon van Barent Fockes [3]), om het ſelve te voeren, die ſigh ſal poſteren en ſeijlen daer het ſijn Ed.t goetvinden ſal; werdende de Heeren van de Equippagie verſocht en geauthoriſeert, om het daer toe bequaem te maeken. En den gemelten Heer Burgemeeſter Hudde om den horologie maecker van Ceulen, die het werck heeft gemaeckt, te laten toekomen voor de tweede mael twee hondert ducatons, mitsgaders aen de Smith, die daer toe heeft geholpen ſeventigh gulden, met

---

[1]) J. van Ceulen (voir sur lui la note 4 de la p. 509 qui précède) n'était nullement dépourvu de biens. Mais il était sans doute „een man van weijnigh vermogen" en comparaison avec les riches négotiants d'Amsterdam.

[2]) Dans la lettre inconnue du 29 août, dont il est question dans la lettre de Hudde à Huygens du 3 septembre: voir la p. 24 du T. IX.

[3]) Mentionné aussi aux p. 27, 31 et 579 du T. IX.

verder verſoeck op den welgemelten Heer Hudde om hier over het opſicht en directie te blijven houden, ten eijnde dat deſſein tot verlightinge van de zeevaert ten goeden effecte magh werden gebraght.

Donderdagh den 6 September 1685 .... De Heer Burgemeeſter Hudde ter vergaderingh gecommuniceert hebbende ſeeckere miſſive door den Heer Huygens aen Sijn Ed.t geſchreven [4]), waer bij den ſelven Heer Huijgens verſocht, dat deſe vergaderingh hem in de aenſtaende toght om preuve te nemen van de horologien bij ſijn Ed.t uijtgevonden, waer door te vinden ſoude weſen het Ooſt en Weſt breder in de reſolutie van den 30 des voorleden maents en andere meer vervat, ſoude willen toevoegen Mr. de Graef [5]) of iemant anders in die materie ervaren, tot ſijn Ed.s aſſiſtentie en getuijge, is verſtaen den welgemelten Heer Burgemeeſter te verſoecken en te authoriſeren, om den voorn. de Graef of een ander daer toe te diſponeren, ſijnde wijders ſijn WelEd.t voor de gedaene openingh bedanckt.

---

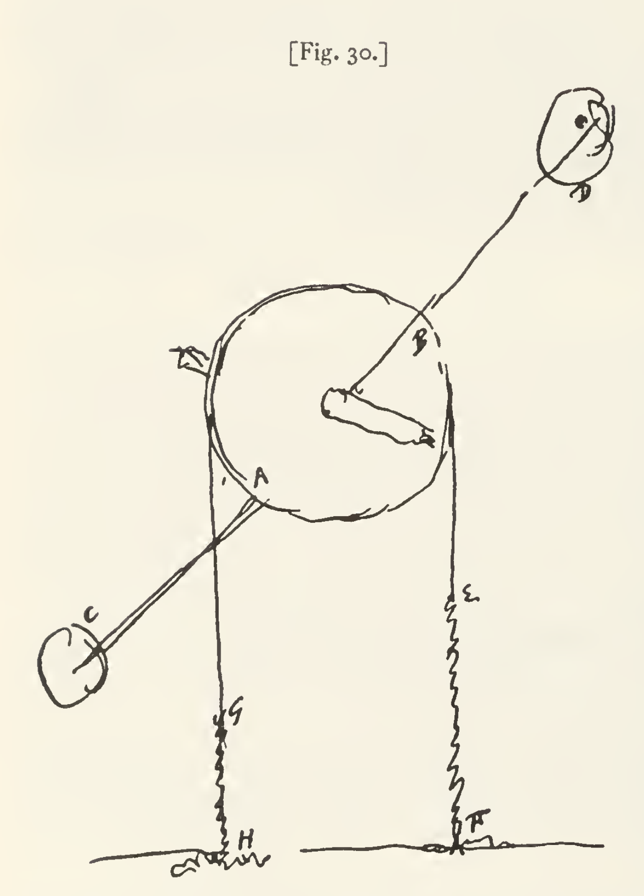
[4]) Nous ne connaissons pas cette lettre.

[5]) Il s'agit de Johannes de Graaf: voir la Pièce IV qui suit (non pas d'Isaak de Graaf — T. IX, p, 27, note 3 —, comme nous l'avons déjà remarqué dans la note 1 de la p. 266 du T. IX).

III.

PREMIER PROJET DE 1683 OU 1684 DU „BALANCIER MARIN PARFAIT" DE 1693.

[Fig. 30.]

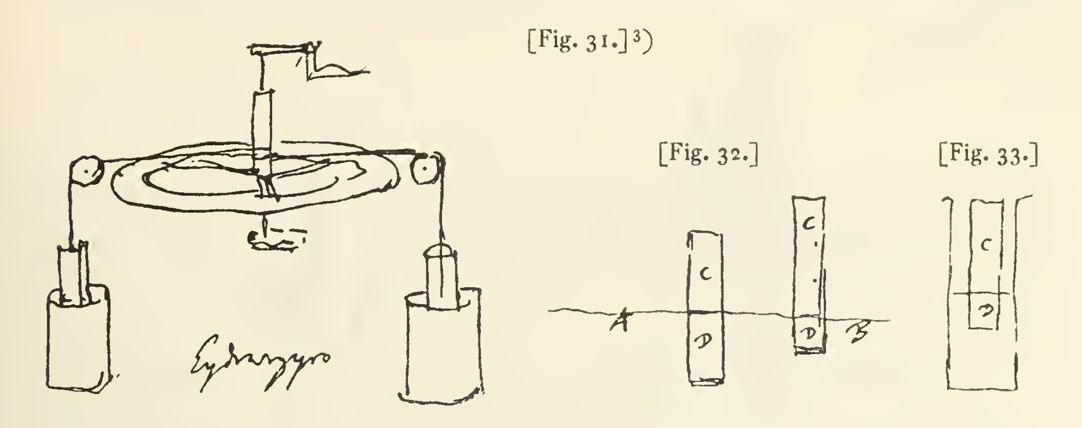


A[1]). Aliud genus motus iſochroni orbis AB [Fig. 30] ſuper axe horizontali mobilis affixis ponderibus C, D. Orbi filum circumjectum cui appenduntur catenulæ æquales EF, GH planum HF ſemper contingentes. Indito motu, creſcit pondus catenulæ alterius ſuper reliquam idque in eadem ratione qua circumferentia orbis verſatur. Unde incitatio pro ratione diſtantiæ a quiete, atque hinc recurſuum minorum majorumque æqualitas[2]). Idem fiet ſi loco catenularum appenſi fuerint cylindri tenues liquido immerſi ut argento vivo vel oleo &c.

Sed motus ponderum ſuper axe horizontali non æque liber eſt ac in ſuſpenſione. Poſſet orbis gravitans eſſe horizontalis et ex filo pendens [Fig. 31], inferne axem foramini inſertum habens, fila vero bina axi circumvoluta, ac per orbiculos ad cylindros euntia de quibus dictum.

---

[1]) La Pièce A est empruntée à la p. 181 du Manuscrit F qui suit les pages mentionnées dans la note 1 de la p. 527 qui précède. L'idée de faire usage de chaînes pendantes venant s'appliquer sur une table et exerçant par conséquent une force variable se trouve déjà dans le projet de



B [4]). AB [Fig. 32] furface du vif argent ou de l'eau. CD un corps cylindrique qui furnage librement avec la partie D enfoncée. Si on le fait baiffer d'un pouce, (ou autre efpace), il pefe autant vers en haut qu'il pefe vers le bas, quand on le hauffe d'un pouce. Et le mefme arrive foit que la liqueur foit comme une mer [Fig. 32] ou qu'elle foit enfermée dans un vaiffeau cylindrique [Fig. 33]. Et les forces de ces pefanteurs croiffent en baiffant ou hauffant le dit corps, en mefme raifon que celles d'un reffort comprimè, c'eft a dire en raifon des enfoncements ou elevations. De forte que c'eft icy un reffort qui n'eft pas fujećt aux alterations du froid et du chaud, comme font tous les autres.

EF [Fig. 34] eft un rećtangle de fil de fer au quel la chorde eft attachee en H et G. HN fer roide. K, L, font des poulies. Ou au lieu de poulies ce peuvent eftre des bras d'une petite verge horizontale appuiée au milieu fur un cuneus, comme les balances. Ou feulement des poulies appuiées fur un cuneus au lieu d'axe.

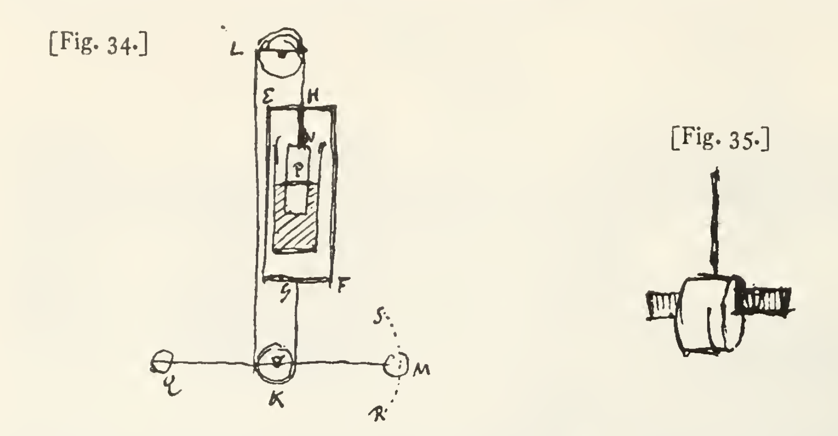
1659 de Huygens d'une horloge à pendule conique (T. XVII, p. 88). On y rencontre également les „cylindri tenues liquido immersi".

Voyez aussi sur ces derniers de la p. 556 qui suit.

[2]) La proportionnalité de la puissance mouvante ou „incitatio" avec l'écart, doit entraîner l'isochronisme des oscillations: comparez les 501 et 509 de l'Avertissement. On voit aisément que, si le balancier est en équilibre dans la position horizontale, le moment résultant qui tend à le ramener dans cette position, est en effet proportionnel à l'écart angulaire. Attendu que le bras de levier est constant, on peut d'ailleurs interpréter ici le mot „incitatio" soit comme un moment soit comme une force (comme dans la Pièce II à la p. 496 qui précède).

[3]) On lit dans la figure: „hydrargyro".

[4]) La Pièce B est empruntée à la p. 5 r. du Manuscrit G, datant sans doute de 1688, puisque la p. 8 r. porte la date du 20 décembre 1688.



Angulus librationis cunei in centro cylindri filum evolventis [Fig. 35].

Cum M deprimetur [Fig. 34], cogetur defcendere cylindrus P et amplius mergi in hydrargyrum. Qui ergo cylindrus afcendere nitetur, et impreffo motu in pondera MQ ea ultra fitum horizontalem impellet, eoque ex hydrargyro attolletur ultra æquilibrium cylindrus P, atque ita denuo defcendet et volvendo orbem K deorfum coget M.

IV.

L'APPLICATION DU PENDULE TRIANGULAIRE, DATANT DÉJÀ DE 1671, À UNE HORLOGE MARINE CONSTRUITE VERS 1685, CETTE DERNIÈRE ÉTANT UN REMONTOIR À RESSORTS.

Resolutiën vande Bewindhebberen van de Oostindische Comp.ie ter Camer tot Amsterdam.

Maandagh den 17 September 1685 .... Den Heer Burgemeester Hudde ter vergaderingh gecommuniceert hebbende hoe en op wat wijse is uijtgevallen de preuve bij den Heer Huijgens met Comp.s galjot te water genomen vande horologien bij sijn Ed.t geinventeert [1]), en dat 't selve sal dienen te werden vervat, is verstaen den welgemelten heer Hudde voor de gedaene openingh te bedancken, & sijn Ed.t te versoecken conform voorige authorisatie in de sorge over dat werk te willen continueren.

La suite de cette Pièce — comparez le dernier alinéa de la p. 513 qui précède — est la traduction d'une partie de l'Instruction de Huygens de décembre 1685 pour Johannes de Graaf [2]) et Thomas Helder [3]). Comme le T. XVII contient une version du „Kort Onderwijs" de 1665, nous nous bornons ici à ce qui se rapporte directement à l'horloge.

I. On prendra dans le navire deux des nouvelles horloges à pendule, etc.

II. Pour suspendre les horloges dans le navire, on réservera un petit coin du salon ou d'un autre endroit commode et sec, et on le guarantira de la poussière en calfeutrant les fentes, puisque les horloges sont ouvertes en bas. Il doit y avoir là une fenêtre et une petite table où l'on puisse mettre et démonter les horloges lorsqu'il en est besoin.

III. On trouve ci-contre [Fig. 36] la figure de l'horloge et des châssis de fer dans

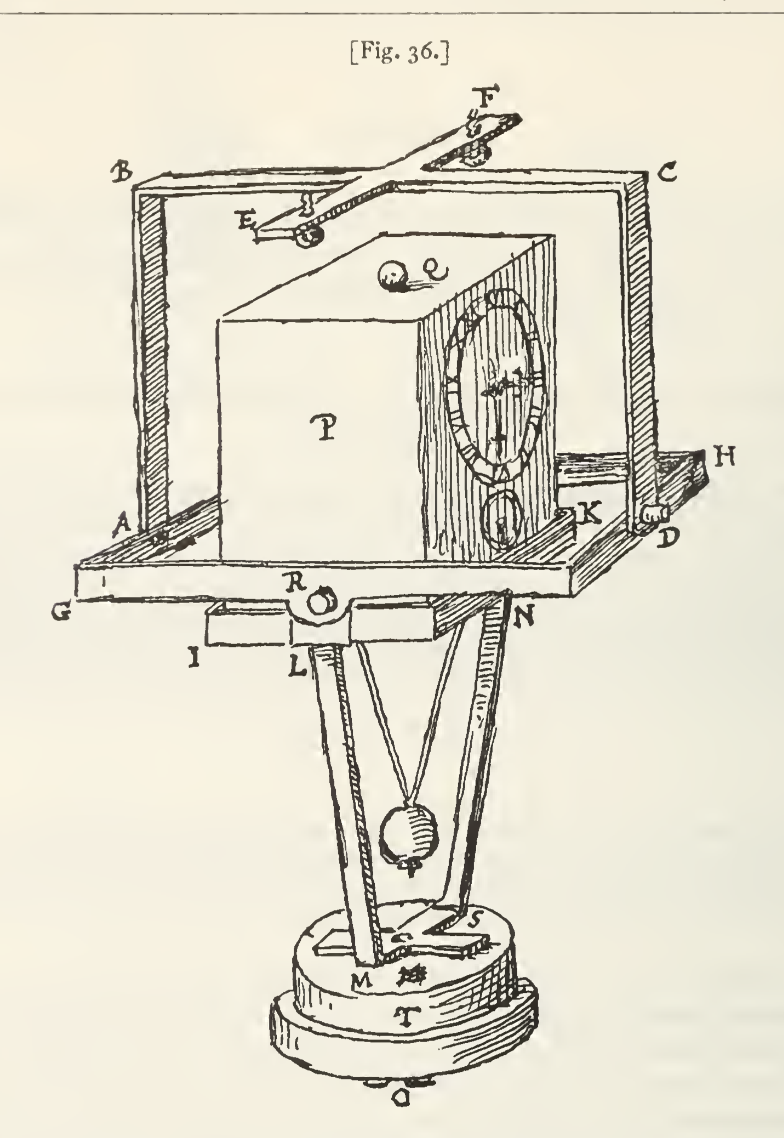
---

[1]) Il s'agit de l'expédition du Zuyderzee; comparez la p. 510 de l'Avertissement, et la Pièce II qui précède.

[2]) Comparez sur J. de Graaf la note 5 de la p. 535.

[3]) T. IX, p. 55—76. Th. Helder mourut à bord du vaisseau Alcmaer pendant l'expédition de 1686—1687 (T. IX, p. 37).

[Fig. 36.]



lefquels elle eft fufpendue. Cette figure permet d'indiquer comment il faut attacher l'horloge au vaiffeau, et ce qu'il faut obferver à cet égard.

ABCD eft une anfe de fer, avec une croix à la partie fupérieure, puifque EF eft perpendiculaire à BC. Le plus grand des deux châffis eft GH, mobile autour des axes A et D qui traverfent les extrémités inférieures de l'anfe. Le plus petit eft IK tournant à l'intérieur de GH autour de deux axes oppofés R dont on n'en voit qu'un. À ce châffis IK font attachés en-deffous, dans le plan vertical paffant par les axes R, les fers LM, NS convergeant vers le bas et y portant enfemble une vis verticale également dirigée vers le bas. Sur cette dernière on enfile le poids T ayant au milieu un

large trou; et on le maintient immobile à l'aide d'une petite plaque et d'un écrou O. Ce poids eſt d'environ 40 livres; plus il eſt lourd, mieux cela vaut. L'horloge P n'eſt placée dans le châſſis IK qu'après que ce dernier a été attaché au plafond à l'aide de l'anſe. Cela ſe fait avec les vis E et F, de telle manière que le bras EF ſoit dirigé ſuivant la longueur du vaiſſeau; d'où réſulte que le plan de la croix EFBC eſt horizontal ou à peu près lorſque le navire eſt à l'ancre, et que l'horloge, lorſque le navire penche d'un côté, ne riſque guère de ſe heurter contre les bras BA et CD. Il faut ſurtout avoir égard à ce que cette croix ſoit toujours et partout bien en contact avec le plafond; s'il eſt néceſſaire, on peut mieux le fixer en plaçant des coins ou autres petits morceaux de bois au-deſſus des extrémités B et C. Sinon, l'horloge prend par la force de ſon pendule un petit mouvement oſcillatoire, qui, bien que souvent inviſible, accélère ſa marche et la rend abſolument irrégulière.

IV. Pour donner à l'horloge la poſition verticale, on déplacera et tournera le plomb inférieur M (ce qui peut aiſément ſe faire à cauſe de la largeur du trou central) juſqu'à ce qu'une petite boule ou bille Q qu'on laiſſe tomber ſur la face ſupérieure ne roule pas en bas. Après avoir fait cette expérience ſur terre et marqué ſur le plomb T les lignes qui coïncident avec la croix MS, on aſſurera la poſition verticale dans le navire en viſſant le plomb à l'horloge comme ces lignes l'indiquent.

Le pendule conſtruit en forme de triangle et portant un plomb en bas ne ſera accroché qu'après que l'horloge aura été placée dans le châſſis, parce qu'autrement il riſquerait d'être courbé ou briſé.

Après que l'horloge a été miſe en mouvement, on ne déplacera ni ne tournera plus le plomb inférieur, et on n'augmentera pas ſon poids.

. . . .

XVI. Pour faire accorder l'horloge avec l'heure du ſoleil.

. . . . Après quoi l'on avancera ou retardera [les aiguilles de] l'horloge; ſans cependant déplacer l'aiguille des ſecondes, parce que celle-ci doit coïncider avec le chiffre 60 au moment où ſe produit le déclenchement et le remontage du petit reſſort [1]).

. . . . retarder l'horloge (de 30′6″). À cet effet, retardez d'abord l'aiguille des minutes de 30′, arrêtez enſuite le pendule durant 6 ſecondes que vous pourrez évaluer, ſoit ſimplement en comptant, ſoit en regardant le pendule, auquel on peut laiſſer un très petit mouvement ſans que l'aiguille des ſecondes avance. Lorſque les 6 ſecondes ſeront écoulées, rendez au pendule ſon mouvement ordinaire.

[1]) Ces passages (Nos XVI et XXVII) font voir que l'horloge était un remontoir, comme nous l'avons déjà dit à la p. 514 qui précède.

Si l'horloge avait dû être avancée de 30′6″, il aurait fallu avancer l'aiguille des minutes de 31′, c.a.d. une de plus que 30, et arrêter le pendule durant 54″.

XXVII. Règles ſur la conduite des horloges. L'aiguille des ſecondes tourne avec une parfaite régularité. Lorſqu'elle a fait une révolution entière au bout d'une minute, la roue de rencontre, à laquelle elle eſt attachée, eſt animée d'une nouvelle force par un double déclenchement, comme diſent les horlogers. Le premier déclenchement a lieu lorſque l'aiguille atteint le chiffre 30, le deuxième au chiffre 60. En remontant l'horloge, on aura la précaution de ceſſer le remontage lorſque l'aiguille des ſecondes s'approche du chiffre 30 et ſurtout lorſqu'elle va atteindre le chiffre 60. Ceci pour que le déclenchement et le remontage du petit reſſort ne ſe produiſent pas avec trop de véhémence, ce qui donnerait lieu à des arrêts trop bruſques de ſorte que ce reſſort ſerait trop ſecoué [1]).

XXVIII. Vers la fin du remontage on tournera la clef uniformément et aſſez lentement, pour qu'à la fin l'arrêt de la fuſée ſe produiſe ſans choc, car ſinon l'effort portera ſur les dents des roues, qui riſqueront d'être déformées ou briſées [2]).

XXIX. En ſuſpendant l'horloge on veillera à ce que les deux plombs ſoient adaptés l'un à l'autre et à la croix de fer inférieure comme ils l'étaient ſur terre, c.a.d. ſuivant les ſignes ou raies qu'on y a faits.

XXX. Lorſqu'on veut ôter l'horloge du châſſis pour y pratiquer quelque changement, il faut d'abord décrocher le pendule et le placer dans ſa caſe; c'eſt après la réintroduction de l'horloge dans le châſſis, qu'on doit de nouveau l'y accrocher, ce qui ſe fait le plus aiſément en ouvrant le volet à couliſſe de l'horloge.

XXXI. Les petits plombs des pendules y ont été fixés à coups de marteau, de ſorte que lorſqu'on veut faire avancer ou retarder le pendule, cela doit être fait ou bien par le raccourciſſement ou l'allongement des fils par le moyen de la vis, ou bien en montant ou baiſſant le petit plomb [3]) à l'aide d'un martelet. On indiquera d'abord par une raie ſur l'axe la première poſition.

XXXII. Lorſque l'horloge a été de nouveau ſuſpendue et que le pendule y a été attaché — ou bien lorſqu'on a oublié de la remonter de ſorte qu'elle s'eſt arrêtée — et qu'on veut de nouveau la mettre en train, on la remontera d'abord en tout ou en partie. Alors on mettra le pendule en branle, et pendant qu'il ſe meut, on reculera doucement l'aiguille des ſecondes en y appuyant le doigt près du centre. A chaque

[1]) Voir la note 1 de la p. 541.

[2]) Le N° XXVIII fait voir que l'horloge était pourvue d'une fusée (note 2 de la p. 17). Comparez le N° XXXIV qui suit.

[3]) Le singulier indique qu'il s'agit du poids globulaire qu'on voit dans la Fig. 36; non pas de petits poids curseurs comme il y en avait jadis (Fig. 8 et 9 de la p. 14).

coup du pendule on entendra alors la roue de rencontre reculer d'une dent. On continuera jusqu'à ce qu'on entende le demi-déclenchement ou le déclenchement total. En ce moment on doit laiſſer l'aiguille des ſecondes libre. Alors l'horloge continuera ſa marche.

Et ſi par haſard, en appuyant trop, en ſens inverſe de la marche, ſur l'aiguille des ſecondes, on l'a quelque peu tournée par rapport à ſon axe, de ſorte que le déclenchement total et le remontage de la roue de rencontre ne ſe produiſent pas au moment où l'aiguille atteint le chiffre 60, on la tournera de nouveau ſur l'axe dans le ſens de la marche, en arrêtant doucement d'un doigt la roue de rencontre qu'on peut aiſément atteindre par en-deſſous.

XXXIII. Lorſqu'on eſt obligé de démonter l'horloge, il faut ſurtout ſonger à détendre d'abord le reſſort du grand barillet; c'eſt ce qu'on fait en ſerrant ſon axe dans un étau à main et en levant le cliquet de l'autre main. Si l'on négligeait de le faire, il eſt à peu près certain qu'il ſe produirait quelque rupture.

XXXIV. Dans cette détente on laiſſe toutefois au grand reſſort un peu de force afin que la chaîne ne ſe déplace pas ſur le barillet. Si elle venait néanmoins à ſe déplacer, il faut veiller à ce que la chaîne vienne s'enchâſſer, dès le commencement du remontage, dans les raies de la fuſée; à cet effet il faut de la main déplacer de nouveau quelque peu la chaîne ſur le barillet. Une fois bien placée, elle reſtera en poſition.

XXXV. On ſe pourvoira non ſeulement de l'étau à main déjà mentionné, mais auſſi d'une pince, d'une tournevis, de quelques limes, d'un marteau et d'autres uſtenſiles d'horloger de ce genre, ainſi que de fil de ſoie pareil à celui par lequel ſont ſuspendus les pendules. Lorſqu'on a renouvelé les fils — ou un ſeul fil — d'un pendule, il faut fortement tirer ſur eux; ce qu'il faut répéter, après l'accrochage du pendule, dans la direction nouvelle des fils. On prévient ainſi les gliſſements et les allongements qui pourraient autrement réſulter du mouvement continuel des pendules [4]).

---

[4]) Les p. 207 et suiv. du Manuscrit F contiennent encore plusieurs remarques pratiques sur les horloges marines, p.e.

„Voor den horologer. Als de ſlaghen van de ſlinger kreupel gaen, kan men die gelijck maecken met het armtie [la fourchette] dat de ſlinger leijdt een klein weijnigh te verbuijgen, douwende het in ſijn midden wat door nae de ſijde daer het niet vroegh genoegh en loſt. men kan dit doen ſonder het horologe of ſlinger af te nemen, dewijl men van onderen met de vingers daer bij kan".

A propos des fils Huygens dit encore:

„Als men nieuwe draden aen de ſlinger gedaen heeft, of als men het horologe van

Reſolutiën vande Bewinthebberen vande Ooſtindiſche Comp.ie ter Camer tot Amſterdam.

Maendagh den 1 Sept. 1687 .... Op de propoſitie ter vergaderingh gedaen, is goetgevonden en verſtaen dat aen de heer van Zuijlichem [1]) in den Haagh zullen werden geſonden de Daghregiſters ofte Journalen gehouden wegens de twee horologien, dewelcke op een van de Comp.s Schepen nae de Caep ſijn gebraght geweeſt, mitsgaders 't geen verder tot ſijn E. verlightinge ſoude kunnen dienen, ſullende deſelve Journalen [2]) derwaerts worden gebraght door de ſoon van den examinateur van der Graeff [3]), om gemelte ſijn E. dienaengaende mede te dienen van mondelingh beright [4]).

Donderdagh den 29 April 1688 ... Geleſen ſijnde een brief [5]) vande heer Christiaen Huygens, heere van Zelem [1]), rakende de vindinge van Ooſt en Weſt, geſchreven aen de heer Burgemeeſter Hudde, hebbende tot bijlaegen een deductie [6]) en Caerte [7]) tot deſelve materie ſpecterende, is nae deliberatie goedtgevonden de voorſz. brief, deductie, en Caerte te ſtellen in handen van de heeren van het Packhuijs om bij haar E. te werden geëxamineert, en de vergaderingh dienaengaende te dienen van conſideratien en advis [8]).

---

nieuws opgehangen heeſt, ſoo is goedt dat men een dagh of twee laet gaen eer men begint het daghelijks verſchil te obſerveren want ick heb veelmaels bevonden dat het eenigen tijdt van nooden heeſt, het zij om het recken of recht uijt ſpannen der draeden, eer het op ſijn eenparighe gangh komt.

.... Sijden draed mede nemen. dicke roode ſtrick ſij [comparez les dernières lignes de la p. 16 qui précède]. geen ſterck gedraeijde ſijde, om dat te veel kan recken. Men ſoude ſulcke ſtick ſijde wel wat dicker konnen laten twernen.

.... De ſijde draeden te lacken of met hars boven aen ſtrijcken voor het doorſchieten, voor 't gedreun van 't canon ſchieten".

[1]) Peu après la mort de Constantijn Huygens père, qui eut lieu le 26 mars 1687, Christiaan H. échangea le titre de „seigneur de Zuylichem" contre celui de „seigneur de Zeelhem".

[2]) Voir la note 3 de la p. 266 du T. IX.

[3]) C.à.d. par Johannes de Graaf, fils d'Abraham de Graaf.

[4]) Dans sa lettre du 1 septembre 1687 à son frère Constantijn (T. IX, p. 208) Huygens dit déjà qu'il attend les journaux de la première expédition au Cap de Bonne Espérance. Le départ avait eu lieu de 24 mai 1686.

[5]) C'est la lettre du 24 avril 1688, qu'on trouve à la p. 267 du T. IX.

[6]) Il s'agit du rapport qui occupe les p. 272—291 du T. IX.

[7]) Nous avons publié cette carte à la fin du T. IX.

Maendagh den 8 Auguſtij 1689 .... Gehoort ſijnde het rapport en advis van de heeren van het Pakhuys bij reſolutie van den 29 April des verleden jaars 1688 gecommitteert om t' examineren ſekere brief van de heer Chriſtiaen Huijgens heere van Zelem, nevens ſekere bijlagen daer toe horende, rakende de vindinge van Ooſt en Weſt, mitsgaders noch gelezen een brief van de heer de Volder, Philoſophiae et Matheſeos Profeſſor tot Leyden, houdende eenige conſideratien omtrent deſelve materie [9]), is nae deliberatie verſtaen, dat van d'horologien door de gemelte heer Huijgens tot dien eijnde geinventeert, een nader proef ſal worden genomen, en deſelve ſodanigh als ſtaen te worden verandert [10]), onder opſight van eenige perſonen hun des verſtaende andermael nae Cabo de bonne Eſperance overgebragt, wordende gemelte heeren van het Pakhuijs bij deſen verſogt, en cum plenâ geautoriſeert, om het gunt voorz. is, en het geen daer toe verder mogt worden gerequireert, ſoo ſpoedigh als doenlijk is werkſtelligh te maken.

Maendagh den 11 Decemb. 1690 .... Nogh is goet gevonden dat Johannes de Graef aangenomen voor ondercoopman, zijnde gedeſpicieert, en vervolgens aengeſtelt, om als obſervateur der Horloges naer de caep de goede hoop te gaen, mitsgaders van ſijn verrightingen en obſervatien dieſwegen, hem te koomen doen rapport, weder, bij ſijn aencomſte alhier, in voornoemde qualiteit van ondercoopman op de eerſt vertrekkende ſcheepen ſal worden geemployeert en aengeſtelt [11]).

---

[8]) Hudde fit part à Huygens de cette résolution dans sa lettre du 30 avril (T. IX, p. 294).

[9]) Le rapport de B. de Volder, du 22 juillet 1689, occupe les p. 339—343 du T. IX.

[10]) Il est plusieurs fois question dans les lettres qu'on trouve dans le T. IX de quelques corrections à apporter aux horloges de 1685, comme nous l'avons dit aussi à la p. 514 de l'Avertissement qui précède.

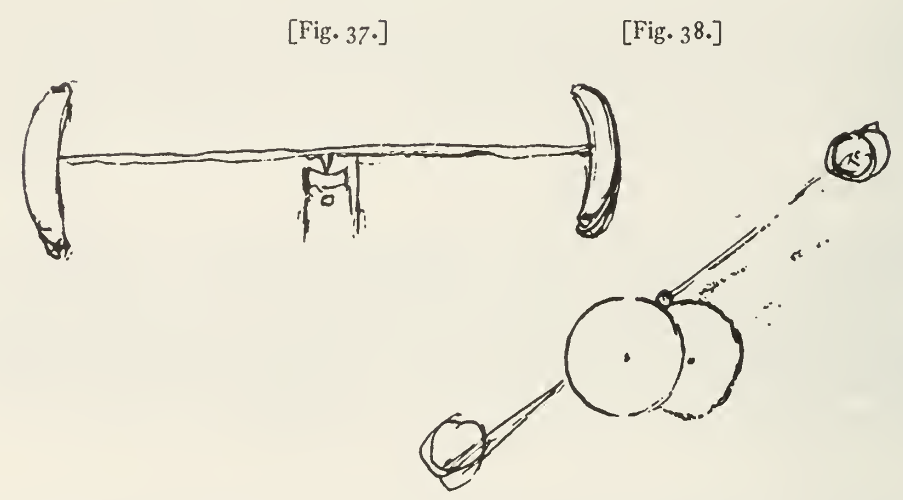
[11]) Hudde avait peut-être déjà communiqué cette résolution à Huygens avant que celui-ci lui écrivit la lettre du 14 décembre (T. IX, p. 567).

On peut voir dans le T. IX, que Huygens resta en correspondance avec J. de Graaf jusqu'au départ du vaisseau Brandenburg pour le Cap de Bonne Espérance, lequel eut lieu un des derniers jours de décembre 1690.

V.

LE „BALANCIER MARIN PARFAIT” DE JANVIER-FEVRIER 1693.

[Fig. 37.] [Fig. 38.]



A. Les Fig. 37 et 38, empruntées à la p. 165 du Manufcrit H [1]), font voir qu'en janvier 1693 (ou peut-être déjà en décembre 1692) Huygens reprit l'idée du balancier de la Pièce III. Ces premières figures ne montrent pas les chaînettes pendantes servant à affurer dans la mefure du poffible l'ifochronisme des ofcillations: on les retrouve dans la Fig. 40 qui fuit. Les Fig. 37 et 38 indiquent que Huygens fongeait à diminuer le frottement autant que poffible. F. Marguet dans fon „Hiftoire générale de la Navigation du XV[e] au XX[e] fiècle” [2]) écrit (p. 138—140) à propos de l'horloger Henry Sully (1680—1728) qui „était anglais, mais était venu s'établir en France, vers 1714” — nous avons déjà dit à la p. 520 que Sully a fort probablement profité des idées de Huygens —: „Sully fut plus heureux en trouvant le moyen de diminuer les frottements par une innovation qui devait faire fortune et être largement utilifée par fes fucceffeurs. C'était une découverte importante, puifque, à l'époque de Sully, une montre ordinaire des mieux faites pouvait varier, au bout d'un certain temps, d'une demi-heure en vingt-quatre heures, par fuite de l'augmentation des frottements [ceci femble exagéré]. Pour cela il appuyait l'extrémité de l'axe du balancier fur deux roues de grand diamètre, fubftituant ainfi un roulement à un gliffement. Ce n'eft pas que cette invention [Fig. 39] [3]) ne lui fût conteftée. Il avait reçu les confeils de Newton [4]) et de Leibnitz et il avait été

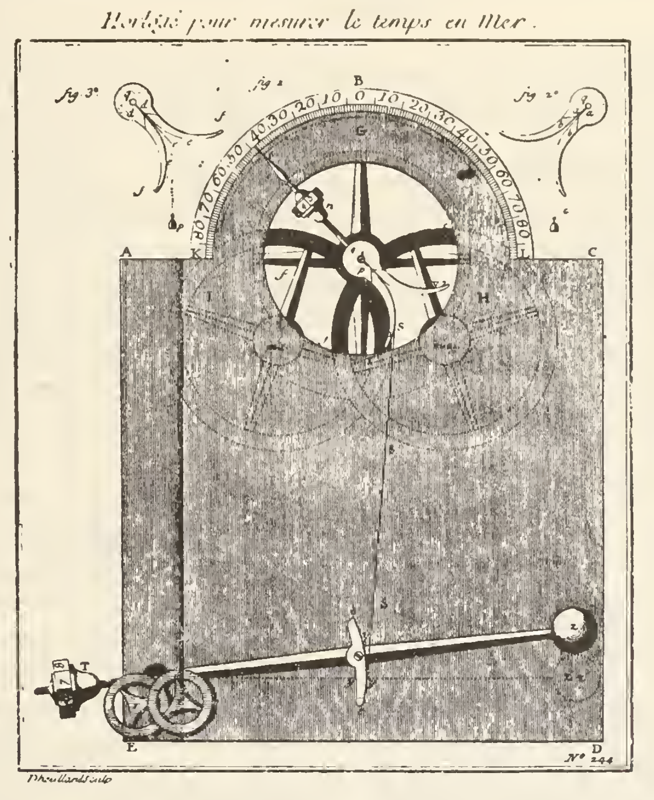
---

[1]) Les p. 155 et 172 sont refpectivement datées „18 Dec. 1692” et „31 Jan. 1693”.

[2]) Paris, Société d'Editions géograph. marit. et coloniales, 1931.

[3]) La Fig. 39 — où l'on voit que l'extrémité de l'axe du balancier I G H est appuyée sur deux „rouleaux” — est empruntée au T. IV (Paris, G. Martin etc., 1735) des „Machines et Inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences depuis son établissement jusqu'à présent;

[Fig. 39.]



en correſpondance avec J. Bernouilli et Graham de la Société Royale, célèbre par ſes horloges et ſes inſtruments de préciſion. Bernouilli lui dit qu'il avait déjà vu ſes rouleaux . . . Quant à Graham il lui écrivit qu'il avait vu le même ſyſtème dans une vieille horloge à pendule[5]). La Fig. 38 fait voir que Huygens a eu cette idée déjà en 1693 et rien n'indique qu'il l'ait empruntée à autrui. Il eſt vrai que nous ignorons s'il eſt ici vraiment original et s'il a conſtruit un modèle des rouleaux. Comparez encore la Fig. 81 de la p. 575.

---

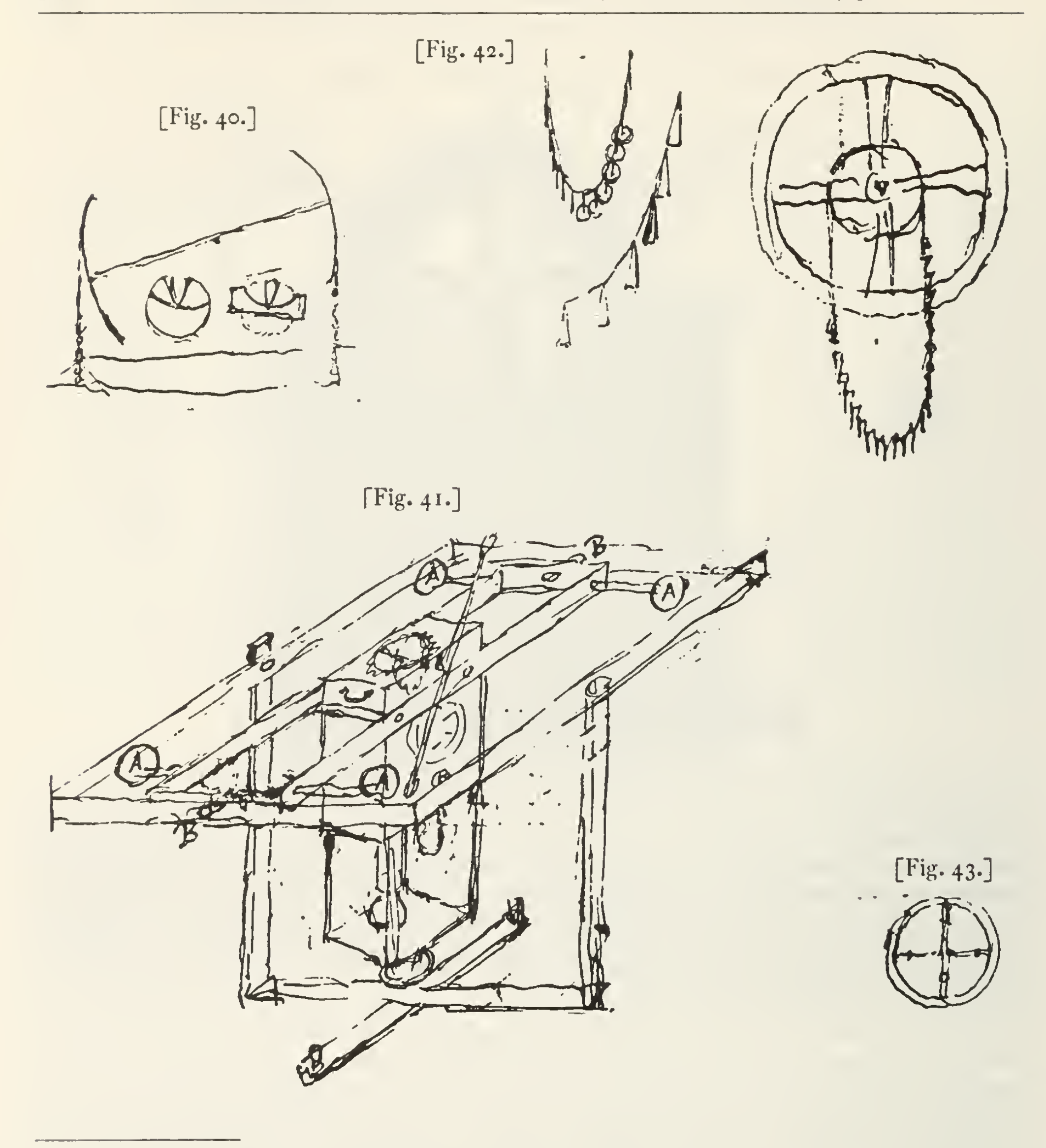
avec leur Description, par M. Gallon". Cette figure a été publiée aussi par Sully dans sa „Description abrégée d'une Horloge d'une nouvelle construction, pour la plus juste mesure de temps en mer", Paris, 1726, et reproduite par R. T. Gould „The marine Chronometer" de 1923 (déjà cité dans le T. XVII). On lit dans la figure originale: „Henricus Sully Londinensis invenit 1721 et fecit 1724". Gould nous apprend (p. 36) que l'horloge de Sully est conservée au Musée de la „Clockmakers Company at the Guildhall".

4) D'après R. T. Gould, p. 35, Newton et Wren attirèrent l'attention de Sully sur les horloges marines en 1703.

5) R. T. Gould dit (p. 37) que la lettre de Graham dans laquelle ce dernier assure avoir déjà vu la construction de Sully date de 1724. F. Berthoud cite cette lettre aux p. 365 et suiv. du T. II de son „Histoire de la Mesure du Temps par les Horloges" de 1802. Suivant Berthoud Graham

[Fig. 42.]

[Fig. 40.]



[Fig. 41.]

[Fig. 43.]

écrit: „Votre moyen de diminuer les frottemens sur les axes est fort bon. Je n'ai rien vu de semblable dans notre Art, qu'une seule fois, il y a plus de vingt ans: c'étoit le pivot supérieur du balancier d'une vieille horloge à balancier, qui étoit contenu et qui tournoit entre trois roues posées à cet effet. Il paroissoit que ces roues n'avoient pas été faites par le constructeur de l'horloge, et qu'une autre main les y avoit ajoutées". Dans sa réponse Sully écrit d'après Berthoud: „A l'égard de ma méthode pour diminuer les frottements sur les axes, j'ignorois qu'on l'eût employée dans l'exercice de notre Art; mais ayant vu une grande roue qui servoit à tourner une meule suspendue à-peu-près de la même façon, je sentis le bon usage que l'on en pourroit faire dans l'Horlogerie; je crois m'en être servi utilement dans cette machine. Si au

B[1]). 31 Jan. 1693.

Balancier marin parfait [Fig. 40, 41 et 42].

Aura les balancements lents, et egaux par demonſtration [2]), ne ſoufriront rien du mouvement du vaiſſeau. On ſcaura la difference journaliere, apres l'avoir embarquée, ſans obſervation.

Il n'y aura aucun reſſort. On la remontera à ſon aiſe, et ſans qu'elle arreſte.

Pourra ſurpaſſer la juſteſſe des pendules ordinaires de 3 pieds. La ſuſpenſion ſera ſure et invariable ſans fil de ſoie comme aux autres. Le mouvement du balancier n'en donnera point a l'horloge comme aux autres, qui gaſtoit le plus leur mouvement.

Le Chaſſi attaché au plancher d'en bas [Fig. 41]. Cercle d'heures devant, balancier derriere. On peut ſuſpendre l'horloge dans les chaſſis apres qu'ils ſont placez. Il aura pour cela une bande platte qui l'entoure en haut. Ira avec contrepoids qui pendront en bas, a double poulie [3]). Ainſi on pourra le remonter ſans qu'il s'arreſte, et ſera ſans fuſée [4]).

Les poids A attachez au chaſſis qui tient l'horloge, l'empeſcheront d'eſtre ſecouè par les coups de vague contre le vaiſſeau.

Tout l'ouvrage des roues doit eſtre grand et fort.

Peu de roues, quand il ne devroit aller qu'une heure ou deux, il en ſera plus juſte.

Roue de rencontre ſera horizontale au deſſous de l'axe du balancier. l'eguille des ſecondes peut bien eſtre au haut de l'horloge.

Le bas eſt une caiſſe quarrée dans la quelle les contrepoids trouvent ſur place. Et au deſſous de la quelle eſt attachè un poids pour tenir l'horloge droite, lequel poids n'a que faire d'eſtre grand comme cydevant.

Le chapelet [Fig. 42] [5]) en dedans de l'horloge. les axes des roues ne l'empeſcheront pas s'ils ſont au milieu.

On reglera l'horloge a terre, eſtant ſuſpendue dans ſes chaſſis.

On pourra lever la plaque de deſſus et puis le balancier.

---

défaut de cette roue, appliquée à une meule, j'avois connu la vieille horloge, je m'imagine qu'elle m'auroit fourni les mêmes idées, lesquelles je n'aurois peut-être point eues, sans *quelques rencontres semblables* [nous soulignons]".

[1]) Manuscrit H. p. 172—179. Huygens écrivit ensuite à la p. 172: „Hiſce omnibus quæ uſque ad pag. 180 multo melius inventum eſt quod iſta pagina deſcribitur". Voir la Pièce VI à la p. 562 qui suit.

[2]) Voir la note 2 de la p. 537.

[3]) Voir la Fig. 8 de la p. 43 du T. XVII ou la Fig. 17 de la p. 71 du présent Tome.

[4]) Tandis que l'horloge construite vers 1685 (Pièce IV) était pourvue d'une fusée.

[5]) La démonstration dont il est question plus haut (note 2) s'applique évidemment aussi au cas du chapelet.

Balancier de 2 pieds, fera un cercle avec une croix dedans [Fig. 43], afin de ne pouvoir plier aucunement.

Le cercle fera *en boudin* [en marge: anneau quarrè pourra fuffire] pour avoir moins de furface qui frotte contre l'air.

[Fig. 44.] Le chapelet fera de plomb attachè a un ruban etroit et fort fouple. Des morceaux quarrez [Fig. 44]. peut eftre une chaine ordinaire pourra fuffire, car les chainons ne plient que en bas fans foufrir de preffion.

Le cercle doit eftre equilibrè exactement, en forte qu'il garde toute pofition qu'on luy donne. 2 petits poids coulans fur les branches [Fig. 43] pour ajufter cet equilibre. puis deux autres [Fig. 43] qui doivent toufjours eftre egalement diftans du centre, et ferviront pour ajufter a la viteffe requife des heures.

Eftant bien equilibrè, les 2 bouts du chapelet fe mettront en mefme hauteur.

On remontera l'horloge avec une clef avec un pignon qui prenne dans les dents de la poulie, afin que cela aille à l'aife [1]).

La corde du grand poids fera un tour fur la poulie, afin de tirer plus facilement et fans grandes pointes de fer à la circonference [2])

On peut comparer le mouvement du pendule avec celuy de la nouvelle balance et faire une balance a fecondes lors qu'on a un tel pendule.

Il faut veoir lors que le pendule [Fig. 45] eft au bout de fa vibration en C, quelle partie eft là fon poids du poids entier; menant la tangente CG a la Cycloide, et la perpendiculaire à l'axe CD. Car fi DG eft $\frac{1}{4}$ de GC, le pendule en C pefera $\frac{1}{4}$ de fon poids abfolu.

In cycloide defcendenti corpori vires impellentes contingunt quæ fint ut fpatia curvæ percurrenda ad punctum infimum, ubi vis impellens definit [3]). Hinc in initio fpatij dimidij, etiam vis impellens dimidia eft. Demonftravi verò à quocunque puncto cycloidis defcenfus incipiat tempora æqualia impendi quibus ad imum punctum perveniatur [4]).

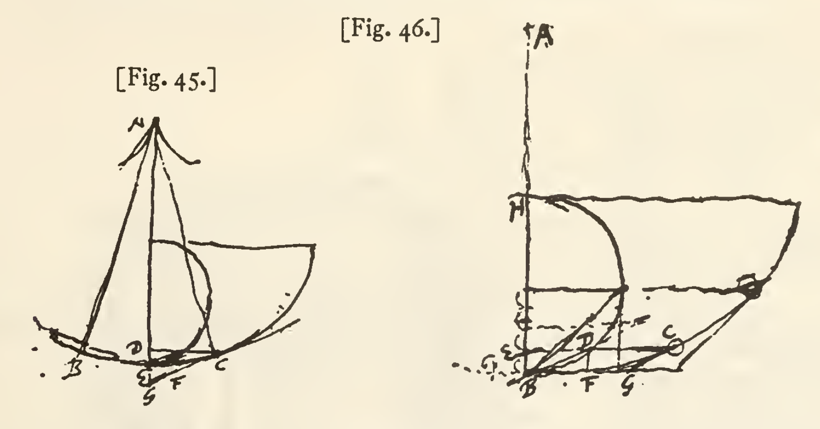
---

1) Comparez le No 7 de la p. 173 du T. XVII.

2) Voir sur les pointes de fer la p. 64 du T. XVII ou la Fig. 17 de la p. 71 du présent Tome.

3) C'est ce que nous avons appelé, à la p. 483 qui précède, la trouvaille de Huygens.

4) Voir les p. 152—187 qui précèdent. Nous avons déjà remarqué que la démonstration de



[Fig. 45.] [Fig. 46.]

In pendulo [5]) pondus pelli incipit verſus punctum imum, parte ſexta ſui, per ſpatium 6 pollicum, atque ita impendit $\frac{1}{2}$ ſecundi min. unde tota vibratio 1″.

duplum penduli BC [Fig. 46] —— BE —— BD ⊤ BE
72 poll. —— 6 —— $6/\frac{1}{2}$ poll. —— 3 poll. ⊤ $\frac{1}{2}$
6 —— 1 pondus abſolutum ad pondus in C.

In libra iſochrona pondus pelli incipit verſus punctum extremum, ubi vis impellens deſinit, parte ſui $\frac{1}{10}$, per ſpatium 9 pollicum. quæritur quantum tempus impendet. Dico $1\frac{1}{4}$ ſecundi. unde tota libratio $2\frac{1}{2}$″ [6]).

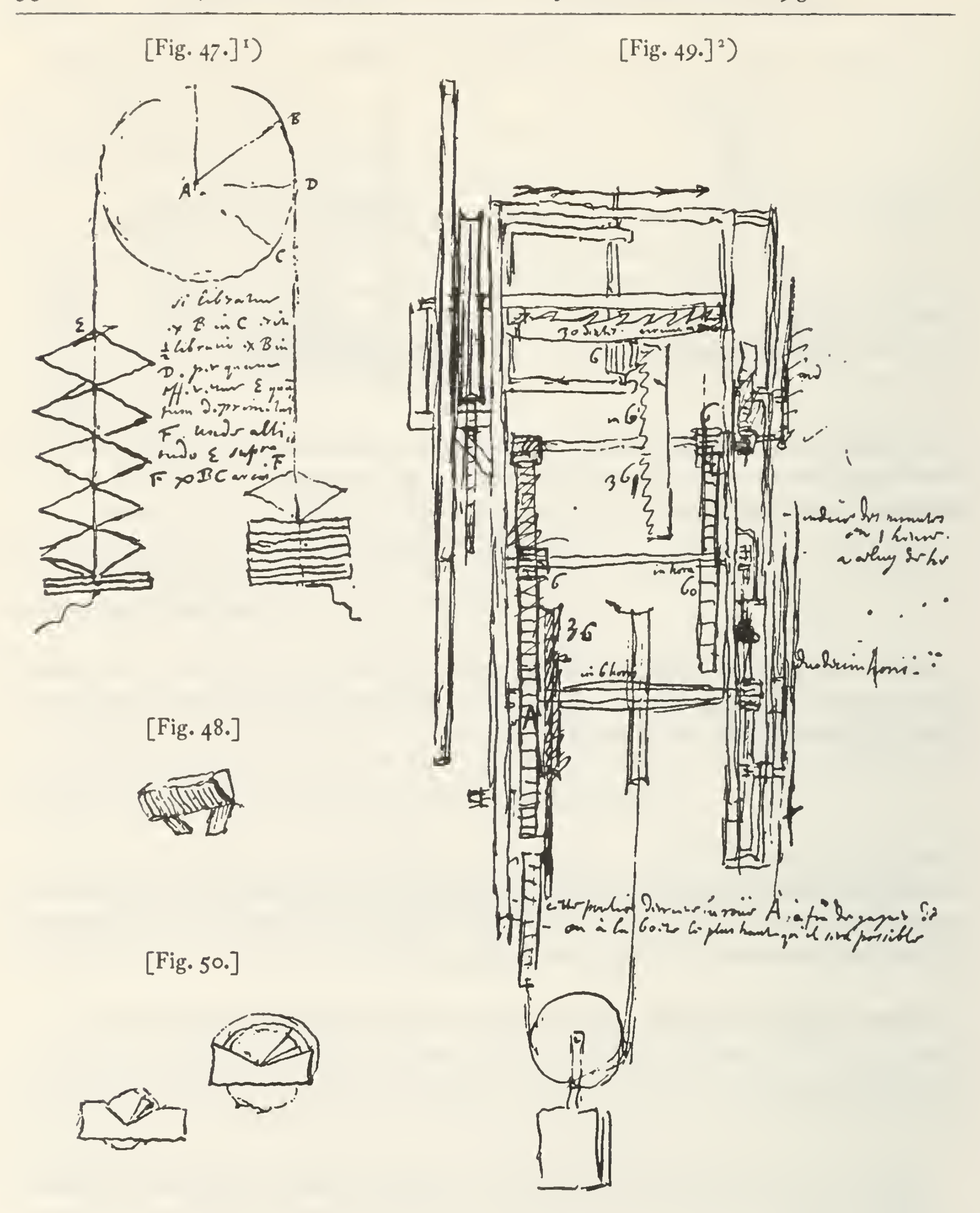
Singuli rhumbi [Fig. 47] 4 partibus conſtant, et filo perpendiculari, ne ultra certos limites aperiantur. Si libratur ex B in C, erit $\frac{1}{2}$ libratio ex B in D, per quam efferetur E quantum deprimitur F. Unde altitudo E ſupra F ∞ BC arcui.

Palettes [Fig. 48] attachees ſur le tranchant de l'axe de la roüe de rencontre.

Huygens du tautochronisme de la cycloïde n'est nullement basée, comme celle de Newton, sur la proportionnalité de la force agissante à l'arc, dont il est question dans la note précédente; voir la p. 484.

[5]) La longueur du pendule à secondes est de 36 *pouces* ou 3 *pieds horaires* d'après la p. 96 qui précède. D'après la Fig. 46 $BD^2 = BE.BH$ ou 2 BA : arc BC = arc BC : BE, ce qui correspond à l'équation du texte.

[6]) D'après le sixième alinéa de la p. 553 il s'agit ici d'une période déterminée expérimentalement.



[Fig. 47.][1])

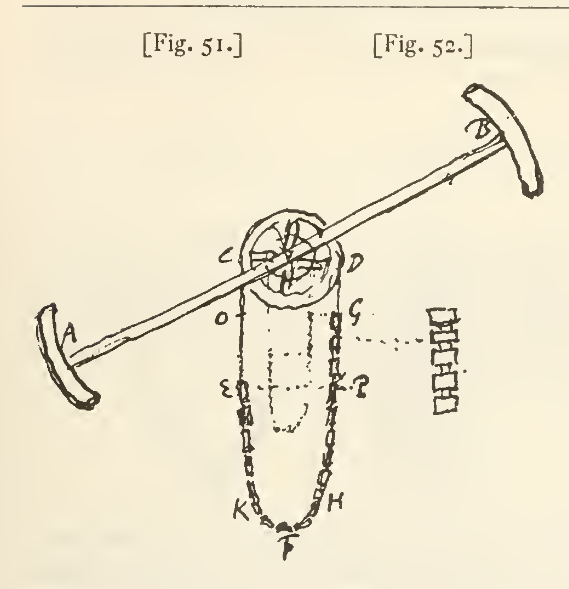
[Fig. 49.][2])

[Fig. 48.]

[Fig. 50.]

Un balancier simple a chaine fort grand sans horloge, à part pour regler, et observer la difference en 24 heures. Ou bien un horologe d'une demie heure ou 2 minutes seulement, pour ce mesme effet et pour examiner par fois l'horloge [Fig. 49], ou pour servir pendant que l'autre est remis ou reparè.

[Fig. 51.] [Fig. 52.]



On y pourroit adjouter ou ofter du contrepoids pour faire que les balancements aijent toufjours la mefme largeur. Le balancier grand de 2 pieds, pefant et folide.

Sic ponendus culter [Fig. 50] axis ne variet fimulque alæ affixæ. Poterit includi ne poffit excuti.

Satis liber motus eft hujus catenæ [Fig. 51] cum partium nullus eft contactus.

Si dimidio minori diametro fiat rota CD [Fig. 51], debebunt catenæ rectangula fingula quadruplum pendere priorum, nihil aucta eorum altitudine [Fig. 52]. Nam æquè lata libratio requiritur; erit autem pondus movens tantum dimidia longitudine ad GP [3]), et in libram AB agit duplo propius à centro.

AB baculus bipedalis. CD rota 6 poll. diametro. A et B fingula libram unam pendebant. Catena pendebat libram cum 2 oncijs. conftabat particulis plumbi 27 quarum ergo fingula $\frac{2}{3}$ onciæ.

Experiebar comparando cum pendulo fimplici. Librationum tempus erat $2\frac{1}{2}$ fecundi minuti circiter. Dum penduli recurfus 4 fierent.

Exiguæ librationes paululo celeriores erant magnis. Una ex caufis eft aer qui plus retardat majores librationes quam minores. Altera ut puto, quod in majoribus librationibus, plures particulæ catenam componentes motum converfionis circa centrum accipiunt, dum ex H in K tranfeunt; et majorem fimul converfionem faciunt. Catenæ autem vis quæ in hoc impenditur deperit prorfus [4]), cum tamen decedat ex vi qua libra AB à catena moveri debet, eoque librationes fiunt lentiores.

---

[1]) Autre construction de la chaînette. En marge: samen de ketting 1 pondt. 2 onc. en $\frac{1}{4}$, et autres indications de poids que nous ne reproduisons pas.

[2]) On lit dans la Fig. 49, outre les nombres des dents des roues: circuitus in min... in hora... in fex horis... duodecim horis... indice des minutes tourne en 1 heure. eft concentrique a celuy des heures... cette poulie derriere la roüe A, à fin de gagner de la hauteur au contrepoids ou à la boete le plus haut qu'il fera poffible.

[3]) Puisque la chaînette elle-même sera plus courte, comme la Fig. 51 l'indique.

[4]) Vu l'axiome qui suit, et que nous avons déjà imprimé à la p. 477 qui précède, il ne faut appa-

Experire catenam non continuam ex rhumbis ut fol. præcedenti deſignatur [Fig. 47], quæ huic incommodo non deberet eſſe obnoxia.

In corporum motibus quibuscunque, nihil virium perditur aut interit niſi effectu edito et exſtante ad quem producendum tantundem virium requiritur quantum est id quod deceſſit. Vires voco potentiam extollendi ponderis. Ita dupla vis est quae idem pondus duplo altius extollere potest.

Priori inæqualitati remedium ita adhibendum, ut in locum libræ AB ſubſtituatur orbis ex tenui lamina ferrea æneave, cui in circumferentia annulus craſſior à plumbo affigatur. Ita nuſquam impingetur in aerem, nec is amplius motum remorabitur quam quatenus adhæreſcit orbi in ſeſe converſo, quod perexiguum eſt. Neque hic locum habebit reſiſtentia aeris in ratione duplicata celeritatum, quæ ſecundum Newtonum inæquales facit penduli Cycloidalis agitationes [1]).

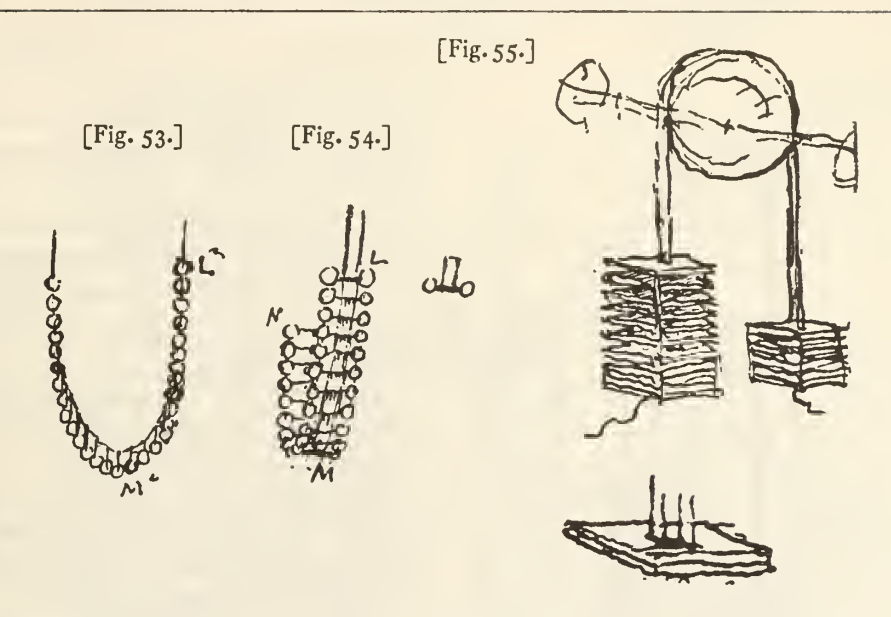
Alterum incommodum tollendum, faciendo ut pondera tæniæ appendantur ea ratione, ut ſingula ſeorſim ex tæniolis ſuis ſuſpenſa ſint, ut cernitur in M² [Fig. 53]. Sed ſingulæ partes ex binis globulis conſtent, ſtylo intermedio conjunctis; ne flexum naturalem catenæ corrumpant. ut cernitur in LMN [Fig. 54]. Pondera certis diſtantijs affigenda ſunt, ita ut globuli ſeſe tangere non poſſint, nec tamen niſi exiguo diſtent. Hoc modo nulla amplius fiet circa centrum converſio.

Sed dubitari poteſt an non exigua converſio et pauciorum particularum catenæ, eadem proportione retardet minores librationes qua major converſio et plurium particularum retardat librationes ampliores. Ergo primo remedium contra aeris occurſum tentetur.

---

remment pas songer ici à une perte absolue de la force de la chaîne par suite des frottements, mais seulement à une perte totale de la force utile. C'est d'une perte de la force utile que parle la suite de la phrase, où le mot „tamen" est de trop à notre avis. Comparez (l. 4 de la p. 555) la phrase: „perit hæc motus particula, productâ quadam catenæ quaſſatione" et la note 2 qui suit.

[1]) C'est dans les Prop. XXIX et XXX du T. II de ses „Philoſophiæ naturalis Principia mathematica" de 1687, que Newton considère l'oscillation cycloïdale d'un point pesant dans le cas où la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.



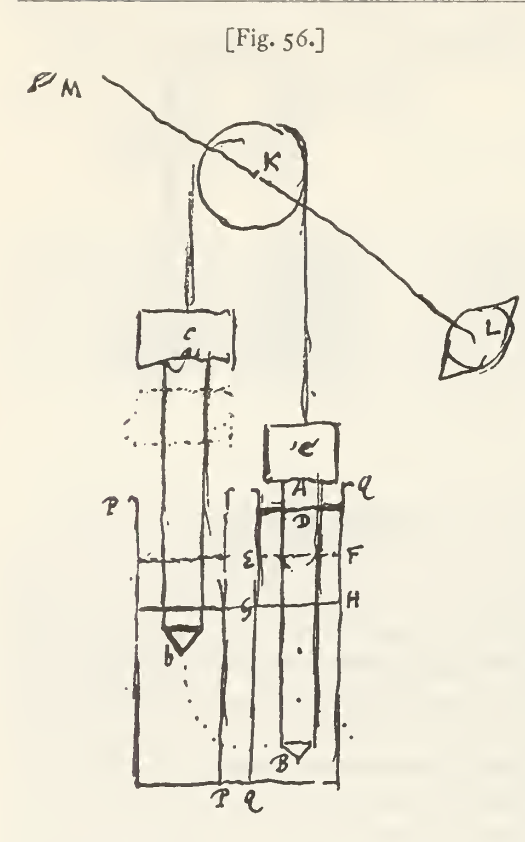
Poſt adhibitum utrumque remedium perditur tamen vis, qua pars catenæ GP, quaſi transfertur in OE. ſed hæc vis in minoribus majoribusque vibrationibus proportionaliter decedit viribus motricibus, eoque nullam inæqualitatem generat, ſed efficit tantum ut non tam facile quam alias continuetur motus libræ, quia perit hæc motus particula, productâ quadam catenæ quaſſatione. Fiunt etiam librationes paulo lentiores ob impenſam in hanc tranſlationem motus partem [2]).

Hæc omnia catenæ incommoda vitabunrur ſi fiat catena non continua, atque eâ formâ quæ hic in margine cernitur [Fig. 55]. quæ utrinque eidem plano incumbit et affigitur. Hæc non fluctuabit ex agitatione navis, et faciliorem motum faciet, minusque ceſſantem. Experire.

Quarrez d'egal poids et egales diſtances [Fig. 55], un quarrè de fer entredeux les fera egales en les attachant. attachee en bas. Chaine de double quarrez tenants enſemble par un coſtè. percez quarrement, et avec deux rubans. ſerrez entre deux. Epingles à coſtè. Peu de diſtance entre ces chainons. Leur matiere d'eſtain aſſez mince. Cette chaine ne branſlera pas comme la continue.

---

[2]) Huygens ne dit pas ce que devient la „motus pars" perdue après que la „catenæ quaſſatio", qu'elle est censée produire, a pris fin; mais l'axiome général dit clairement qu'il doit y avoir, alors aussi, un „effectus editus et exſtans" équivalent.



[Fig. 56.]

Cylindracea vaſa PP, QQ [Fig. 56] hydrargyrum continentia [1]).

Cylindri è metallo, AB, *ab* cum capitibus C, *c*. pendent ex tænia circa orbem K.

Cylindrus totus CAB gravior eſt paulo quam cylindrus hydrargyro conſtans quantum occupat pars DB. Ejusdemque ponderis eſt cylindrus totus *cab*. Sint ferrei hydrargyro pleni.

Moveatur jam libra LM. Erunt recurſus iſochroni, eadem ratione atque in catena ſuperiori, et in Cycloide.

Videndum an recta abſque inclinatione ſint deſcenſuri cylindri in hydrargyro, cum ſint paulo leviori materia. ſed hoc cavebitur ſi ſint hydrargyro pleni.

Poſſunt toti cylindri latere intra tubos ferreos. nec ullum periculum erit ut effluat hydrargyrus.

Poſſum aqua experimentum capere, et cylindris paulo quam aqua gravioribus. et vas unum ſufficit, etſi bina in navi præſtent, ob minorem liquidi motum. Videndum an æqualiora fiant librationum tempora, quam à catena. Item an diutius durent ſemel motæ.

Puto nimis multum de motu perdi ob impulſas liquoris partes ad ſingulas vibrationes. Proponendum tamen et hoc.

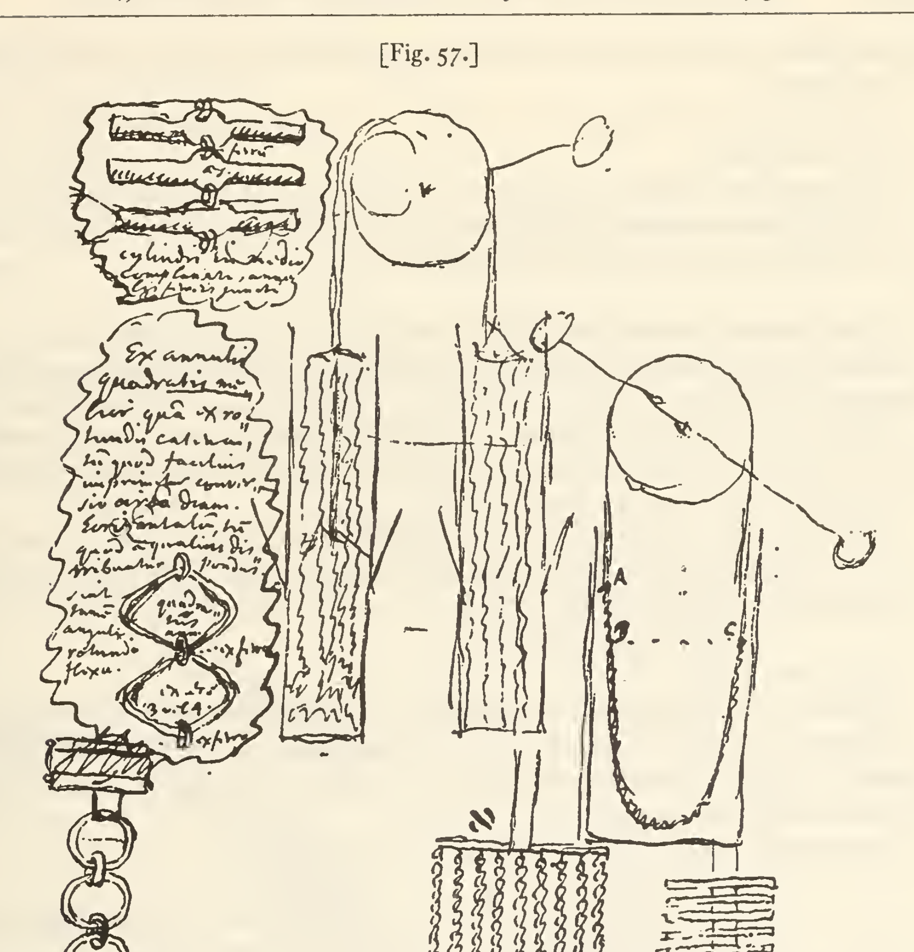
Forſan melius in vas unum utraque pondera mergentur ut eadem ſemper maneat ſuperficiei liquidæ altitudo, et minus obſtet motui hydrargyrus. Poſſunt in vaſe collocari plana quædam quibus agitatio hydrargyri impediatur manente continuitate.

Le 26 fevrier eſſaiè ainſi avec de l'eau mais le mouvement n'eſtoit pas bien libre a cauſe de la reſiſtence de l'eau quoyque les cylindres fuſſent en bas en cone. Au 50me balancement le mouvement eſtoit deſia ſi petit que le 150me avec la chaine de plomb appliquee au meſme balancier. Il y auroit la meſme reſiſtence avec le vif argent parce qu'il reſiſte a proportion de ſa peſanteur.

---

[1]) Comparez la Pièce III qui précède (p. 536).

[Fig. 57.]



12 febr. 1693.

Catena exiguis annulis conſtans [Fig. 57] acervatim pluribus filis intra tubos binos ſubſidens ac motu reciproco, utrinque ex tæniola pendens quæ rotæ circundatur. Latebit catena intra tubos.

NB. Hoc in catenula ſimplici expertus, reperi non eſſe motum valde liberum, neſcio an fluctuatione catenæ, an quod annuli ſubſidentes imi, occurentes jacentibus, partem ponderis amittant priusquam jaceant. brevi ceſſabat.

P.S. Puto eſſe ob attritum continuum annulorum ab imo ſurgentium.

Poſtea eadem catenula continua expertus, motum egregiè liberum inveni, nec ullam catenæ fluctuationem poſtquam ſemel ea ceſſaſſet.

Siquid adhuc annulorum attritus mutuus nocet, poſſet minui NB. jungendo alter-

nis annulos æreos ferreosque. Poteſt catena latere. Imo ita includenda ne navis jactatione fluctuet.

Vel cylindrulos horizontales, è metallo, ad tæniam ſerici fili nectendo paribus intervallis exiguis.

Sed longum eſt hujusmodi catenam conficere. multoque facilius vitiatur.

Optimè plures catenulæ ex ſtylis binis horizontalibus ſuſpendentur. ut in א [Fig. 57]. Si non fluctuat ſponte catena, nihil deperit ex motu.

Experiemur an præſtet ſerico filo an annulis ferreis jungere cylindros.

Fiunt annuli quadrati ut ne quid obſit ſi angulus qui a latere evadat ſuperior caſu aliquo.

Circa ferreum ſtylum quadratum, obtuſis tamen angulis, convolvatur filum æneum. inde accipiantur annuli quadrati ſed ferruminandi. Acuantur intus anguli quadratorum, ita vel ſine attritu catena flectitur.

Facilius annulo imprimitur motus circa diametrum, quam in ſeipſum. Ideo ponenda catena hæc ut diametri horizontales annulorum majorum ſint paralleli ad axem rotæ cui injecta eſt tænia.

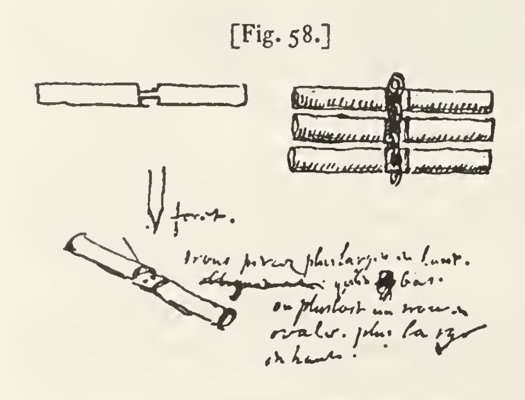
On lit dans la Fig. 57:

„ferrum. æs. cylindri in medio complanati, annulis ferreis juncti.

Ex annulis quadratis melior quam ex rotundis catena, tum quod facilius imprimitur converſio circa diametrum horizontalem, tum quod æqualius diſtribuatur pondus. ſint tamen anguli rotundo flexu.

quadratus annulus. ex ferro. ex ære 3 vel 4. ex ferro".

[Fig. 58.]



Hæc catena [Fig. 58] melior quam paginæ præcedentis [1]).

Cylindri ænei, in medio utrinque lima depreſſi ac complanati, annulis ferreis ellipticis conjuncti. Sic componatur catena, quæ cylindros exiguo intervallo diſtantes habeat. annuli elliptici fiunt ne opus ſit ferruminatione.

Oportet filum ferreum convolvere circa ſtylum ellipticum, tum forfice abſcindere annulos æquales. Cylindrorum vero

[1]) C.à.d. meilleure que les chaînettes de la Fig. 57.

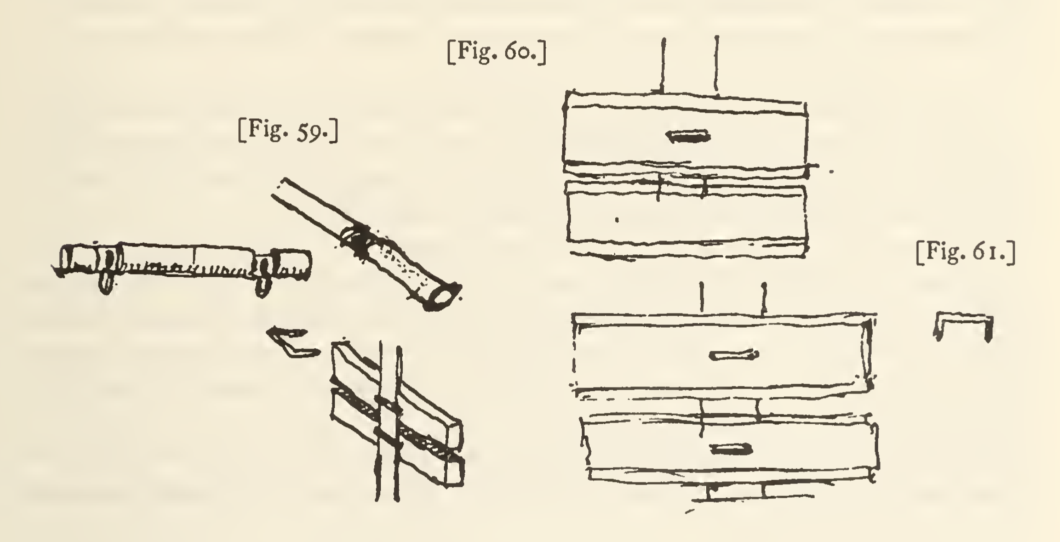
æneorum æquale erit pondus ſi æquali longitudine reſecentur ex filo craſſiori, cujus ubique eadem eſt craſſitudo.

On lit dans la Fig. 58:

„foret.

trous percez plus larges en haut qu'en bas. ou pluſtoſt un trou en ovale, plus large en haut".

An plana manebit catena? requiritur ut maneat, præſertim in flexu imo. ſi non manet plana an duplex ordo annulorum ferreorum faciendus? ita affrictum partientur, eritque ac ſi duæ ſint catenæ ſubduplo pondere. recte igitur duplex ordo annulorum ponetur.


[Fig. 60.]

[Fig. 59.]

[Fig. 61.]

An cuspides per ligulam adigendæ? vix tam æqualibus interſtitijs nectentur [Fig. 59].

27 Fevrier. Cecy eſt la meilleure et la plus aiſee chaine [Fig. 60]. Ce ſont des morceaux de plomb plats, et longs de 3 pouces qu'on plie en deux, et on enferme le ruban, et puis avec le double crochet [Fig. 61] on l'y fait tenir ferme.

Prenez le crochet avec des pincettes d'horloger. Coupez ſes pointes de biais pour mieux faire entrer.

Uncus [Fig. 61] per plumbum et tæniam figendus.

Ruban de ſatin lavè pour en oſter la gomme. Cela ſera ſans doute le mouvement plus libre que la chaine jointe par des anneaux, et il eſt plus aiſè de la faire, et court moins haſart de s'alonger.

Il faut limer ou rabotter les 2 bord[s]en dos d'asne pour pouvoir mettre les pièces plus pres.

An non jactatione navis, dum ab unda furfum fertur, pars catenæ AB (in fig. in ima pag. præcedenti [Fig. 57]) gravior fit, eoque accelerat motum libræ? et contra cum deorfum [1])?

Refp. tam lentum effe hunc navis magnæ afcenfum ac defcenfum, adeoque non fubito incipientem, ut non poffint quicquam nocere hi motus. qui non nifi quatenus paulatim accelerantur aut decrefcunt, momentum aliquod habent, nam fi æquabili motu navis defcenderet vel afcenderet, idem effet, quantum ad catenam, ac fi immota jaceret vel in flumine navigaretur [1]). Deinde quantam gravitatem catenæ parti AB adjiceret afcenfus, tantundem rurfus defcenfus adimeret, qui neceffario afcenfui æqualis eft. atque ita tantundem faceret ad retardandam librationem quantum afcenfus ad accelerandam. Vix cuiquam in mentem venturam puto hanc objectionem [2]).

C'eft un avantage de noftre balance equilibree qu'elle ira de mefme viteffe quoyqu'un peu inclinee; c'eft a dire quoy que l'axe ne foit pas exactement horizontal. car cela n'eft point a la balance qui fait pendule et fes vibrations par fa propre pefanteur, car l'axe n'eftant pas horizontal elle en ira plus lentement.

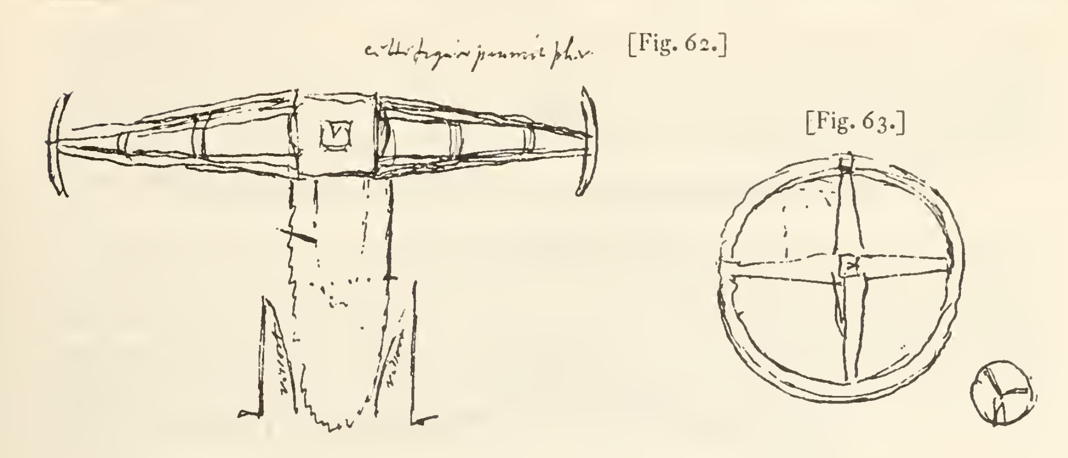
En chargeant le balancier de poids vers les bouts [Fig. 62] — on lit dans la figure: „reffort . . . . reffort", et au-deffus d'elle la remarque, évidemment ajoutée plus tard: „cette figure pourroit plier" —, il foufrira moins de la refiftence de l'air a proportion que s'il eftoit plus leger. car en mettant plufieurs legers il faudroit a chacun les branches, qui frottent contre l'air par les coftez.

En doublant les poids aux bouts (fuppofant que les branches ne pefent point) les balancemens ne feront pas plus lents de la moitiè mais leur temps aux premiers comme $\sqrt{2}$ à 1. fort pres comme 10 a 7.

Il faut chercher ce qui fait le plus de jufteffe, de faire le balancier fort pefant ou mediocrement. La roue de la chaine petite ou grande. Deux fois moins de diametre demande une chaine de chainons quadruples. mais elle fera la moitiè plus courte.

[1]) Comparez, sur cette augmentation ou diminution de la gravité de la partie de la chaînette qui produit l'oscillation, par suite de l'accélération du mouvement du navire vers le haut ou vers le bas, la p. 518 de l'Avertissement qui précède.

[2]) R. T. Gould „The marine Chronometer" p. 36, écrit, à propos de l'horloge de Sully [notre Fig. 39]: „There was a far greater [source of error] namely the influence of the ship's motion. Any movement of the machine in a vertical plane, whether caused by pitching or rolling, caused the weight to lag behind, owing to its inertia, and so altered the pull on the cord, and hence the force acting on the balance, and consequently the velocity of the latter".



[Fig. 62.]

[Fig. 63.]

La roue [Fig. 63] ſera meilleure pour eſtre ferme et ſans danger de plier ou de s'alterer.

Elle ne doit avoir que 3 branches pour l'horologe [Fig. 63].

Mais il faut conſiderer le frottement a coſtè dans toute cette circonference contre l'air. les branches doivent eſtre tranchentes par les coſtez et un peu plus epaiſſes par l'arreſte du milieu. la roue peut eſtre un anneau cylindrique pour eſtre plus forte contre le plis par le coſtè. le mieux ſera de la faire quarrée par la circonference, cela frottera moins contre l'air.

En chargeant d'avantage le balancier, ſans changer rien a la chaine, c'eſt comme ſi on allongeait un pendule en augmentant en meſme temps ſon poids[3]). Peut eſtre la meſme force de l'horologe pourra l'entretenir, parce que la reſiſtence de l'air diminue en raiſon double de la lenteur[4]).

En diminuant le poids de la chaine, ſans changer rien au balancier, c'eſt comme ſi on allongeoit un pendule, ſans luy augmenter ſon poids[3]).

Il vaut donc mieux laiſſer la chaine comme elle eſt, et charger d'avantage le balancier. Car on aura ainſi l'effet d'un long pendule, (par exemple de 48 pieds) dans un vaiſſeau, avec des battemens de 4 ſecondes.

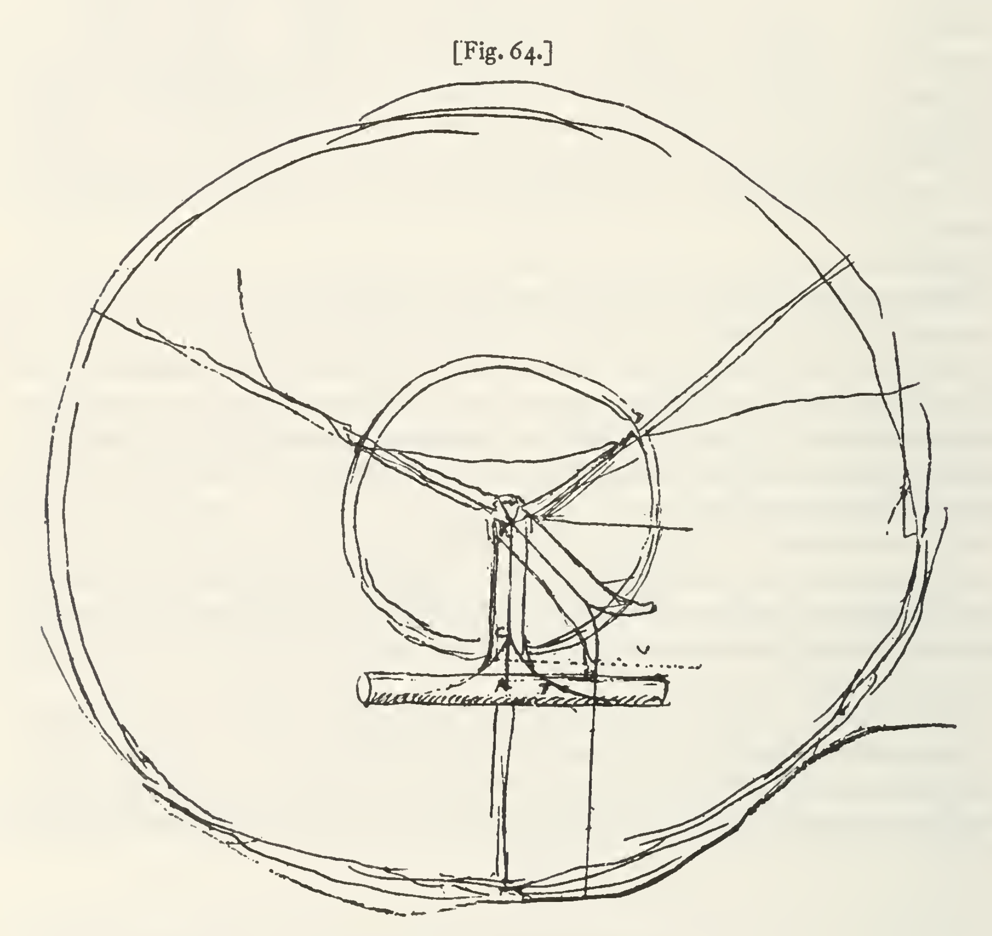
[3]) Comparez la note 5 de la p. 531 qui précède.

[4]) Comparez la note 1 de la p. 554 qui précède.

VI.

LA „LIBRATIO ISOCHRONA MELIOR PRÆCEDENTE" DE MARS 1693.

[Fig. 64.]



Libratio iſochrona melior præcedente [1]). Inventa 6 Mart. 1693.

---

[1]) Comparez la note 1 de la p. 549 qui précède. La Pièce VI est empruntée aux p. 180—182 et 185 du Manuscrit H. Voir aussi la lettre du 6 mars 1693 de Huygens aux Directeurs de la C.e. des Indes Orientales (T. X, p. 424) et celle du 24 mars à de Volder (T. X, p. 434).

Imaginez le fil QM — ou plutôt le fil DQM [Fig. 66]; c'eſt le fil CA de la Fig. 64 — infiniment long: la balance ira de meſme que quand il eſt court. Mais eſtant ainſi long, le mouvement lateral ne fait point d'autre effet que s'il deſcendoit dans la perpendiculaire CL. de ſorte qu'il faut ſeulement conſiderer s'il peſe touſjours egalement en deſcendant [2]).

Quatenus pondus A, pendens ex tæniola AC æqualiter ponderat, erit motus circuli DE [Fig. 67] iſochronus. Pendet tæniola inter particulas binas Curvæ quæ naſcitur ex Evolutione circonferentiæ CGH cujus radius CK [Fig. 66]. K centrum motus. caput tæniolæ A movetur in parabola cujus vertex L, axis LC, latus rectum ∞ tertiæ proportionali duarum CL, CR, quæ æqualis 2CK. Nam Mβ ∞ DQ, Aγ ∞ GP, quia ex evolutionis natura creſcunt DQ, GP ut quadrata CQ, CP.

Demonſtratio æqualium librationum hic et in appenſa Catena inde pendet quod ſi corpus impellatur vi tali in ſpatij decurrendi ſingulis punctis, quæ ſit ut partes ſpatij quæ reſtant peragendæ, fiet ut à quacunque ejus ſpatij puncto moveri incipiat, eodem tempore ad finem perveniat. Hoc in deſcenſu per Cycloidem ita ſe habere facile perſpicitur ubi tempora iſochrona eſſe per quosvis arcus oſtendimus. In vibrationibus laminæ flexilis idem principium experimentis reperitur, itemque tempora vibrationum æqualia [3]). Neutoni quoque extat demonſtratio ſed nequaquam evidens aut exacta [4]).

[Fig. 65.]

Oportet facere tæniolam CA [Fig. 64] quam breviſſimam [5]). Quem in finem poſſet pro pondere A eſſe duplex orbis axe tenui conjunctus [Fig. 65], ut inter utrumque intercipiatur brachium KC. Ita longitudini CA decederet cylindri vel ſphæræ ponderantis ſemidiameter.

Dum curvæ CF [Fig. 64] figuram ratione ac conſtructione quadam mechanica requiro [6]), adverti eſſe eam quæ ex evolutione circuli circumferentiæ oritur [7]).

---

[2]) En d'autres termes: il faut que le poids constant agisse toujours suivant une verticale. Voir cependant le deuxième alinéa de la note 4 de la p. 567 qui suit.

[3]) Comparez la p. 502 qui précède.

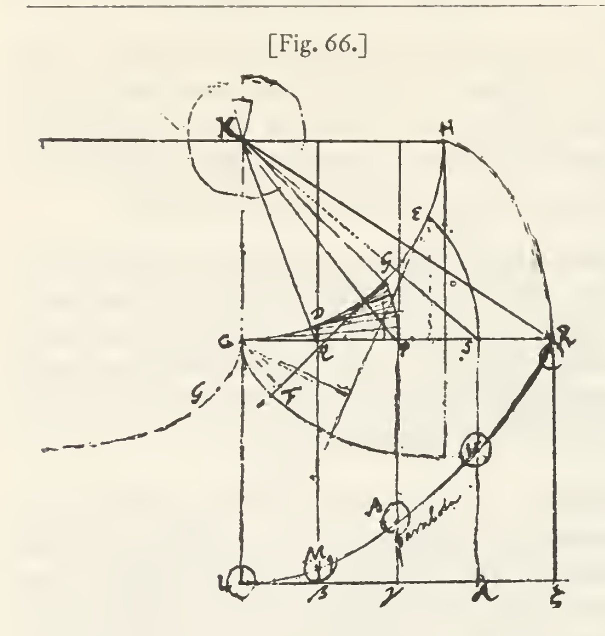
[4]) Voir la p. 484 qui précède.

[5]) A cause du ballottement du vaisseau.

[6]) Huygens cherchait une courbe CF telle que le moment tendant à ramener le balancier vers sa position d'équilibre fût proportionnel à l'écart angulaire. Puisque le balancier est équilibré exactement autour du centre K, ce moment est dû exclusivement au poids A suspendu au fil, toujours vertical par hypothèse, qui s'applique à la courbe en question. Comparez la note 16 de la p. 514 du T. X.

[7]) Comparez l'anagramme „Flexilis ambitum cum linea deſerit orbem" de la p. 515 du T. X.

[Fig. 66.]



Ut 2CK [Fig. 66] ad CR, (quæ ∞ CH) ita fit CR ad CL. Dico CL esse ∞ HR. Describatur enim parabola vertice L, diametro LC, quæ transeat per punctum R. Ejus parabolæ latus rectum erit ∞ 2CK. Ideoque circumferentia CH radio KC descripta, sive huic æqualis [1]), est maxima quæ per verticem L intra parabolam cadat, ac proinde est hæc quæ curvitatem parabolæ in vertice referat [2]). Unde QD recta [3]) vel curva ex evolutione arcus CD descripta æqualis censetur Mβ. Sunt autem curvæ DQ, GP, ES, HR sicut quadrata rectarum CQ, CP, CS, CR, ut ex evolutionis consideratione facile intelligitur, quia particulæ ex. gr. curvæ GP describuntur à filis æqualiter crescentibus quæ deserunt arcum CG. Hinc ergo singulæ DQ, GP, ES, HR æquales singulis Mβ, Aγ, Vδ, Rζ sive CL [4]).

Spatium CHR erit ∞ LRζ. hoc est $\frac{1}{3}$ ▭ Cζ sive $\frac{1}{3}$ ▭ ex HR in CR, vel HR in arcum CH.

Sed his quidem nihil opus ad demonstrandum isochronismum.

Demonstratio motus æqualis. Si in arcu CH [Fig. 66] quælibet partes accipiantur, CD, DG, GE &c. et a punctis D, G, E evolvantur fila circumferentiæ applicata, ut describantur ex evolutione lineæ DQ, GP, ES, usque in horizontalem CR, apparet

---

[1]) C.à.d. une circonférence égale, mais plus basse.

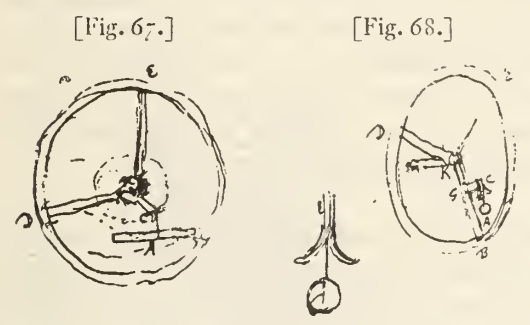
[2]) Le plus grand cercle qui touche la parabole intérieurement en son sommet L, n'est autre que le cercle de courbure. Comparez la note 2 de la p. 393 qui précède. Ce „cercle osculateur" de la parabole — comparez sur le mot „osculation" la note 5 de la p. 42 — est déjà indiqué par Huygens dans la Fig. 1 de la p. 302, datant de 1659, du T. XVI: voir la fin de la note 8 de la p. 41 qui précède.

[3]) CD étant un arc infiniment petit, on peut appeler QD une droite. Dans la suite l'arc CD est supposé de grandeur finie.

[4]) Si le fil a la longueur CL, il résulte des considérations mathématiques qui précèdent que le poids A, supposé punctiforme, se meut suivant la parabole LR de la Fig. 66.

cum C punctum pervenerit axis conversione in D, quia CR ad omnes descriptas curvas normalis est, tunc pondus appensum [5]) tracturum per QM perpendicularem. cum vero C in G, trahet per PA. Sunt autem momenta trahentis sicut distantiæ PC ad QC. atque ita quoque arcus peragendi in circulo libratorio, nempe GC, DC. Ergo semper momenta impulsus erunt ut spatia motu circulari peragenda usque ad punctum C ubi impulsus ad nihilum perducitur. quare tempora quarumlibet librationum æqualia erunt [6]).

[Fig. 67.] [Fig. 68.]



In hoc invento novo motus rotæ DE [Fig. 67] multo liberior est quam cum catena injicitur, ut in præcedentibus [7]), et æquatio perfectior ex appenso inter cornua pondere A, quam illic ex momentis catenæ, quia interrupta serie particularum constat, nec pendet ad perpendiculum. Tum aucto pondere A potest celerior fieri rotæ agitatio, idque multo commodius quam augendo catenæ pondere. Præstat autem rotam semel æquilibratam intactam relinquere.

Minus quoque incommodabit agitatio si qua est ponderis A ex motu navis, quam catenæ longioris fluctuatio [8]). Longe etiam facilius pondus A sic aptabitur quam catena [Fig. 60] effingetur ex æquiponderantibus particulis tæniolæ affixis. Porro artificium longe majus ac subtilius appensi ponderis A quam catenæ.

Ces Cornes C avec le poids A [Fig. 68], corrigent tellement l'inegalité des balancemens de la roüe, que quoy qu'on adjoute du poids à sa circonference, sans rien changer au poids A, on les aura isochrones. Et de mesme si on adjoute ou oste du poids A, laissant la roüe comme elle est. Ce qui est bien remarquable, et bien commode.

Il faut seulement que les balancemens soient assez lents pour que le ruban CA, pende toujours perpendiculaire parce qu'autrement le poids A ne tireroit pas egalement. Il n'importe point que le ruban CA s'allonge.

---

5) Savoir le poids suspendu en C entre les „cornes de bouc" (voir la p. 160 du T. XVII) de la nouvelle forme, qu'on voit dans la Fig. 66.

6) D'après le théorème général: comparez la p. 531 qui précède (deuxième alinéa de la note 5). Ici il s'agit évidemment d'un moment autour d'un axe horizontal.

7) Pièce V.

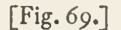
8) Ceci semble bien probable, mais en parlant de l'„agitatio *si qua est*" Huygens fait preuve d'un optimisme quelque peu hasardé: comparez sur son optimisme les p. 163 et 198 du T. XVII.

Si on ſuppoſe que la roue ſoit ſans poids, alors le poids A fera comme un pendule ſimple de la longueur KG + CA [Fig. 68].

Poteſt diſtantia KG pro arbitrio ſumi, dummodo curvatura cornuum C ſit ex Evolutione circonferentiæ cujus ſemidiameter KG.

Inæqualitas non aliunde contingere poteſt quam ſi axis rotæ DE non maneat horizonti parallelus. tunc enim minùs gravitat pondus A.

Vel ſi atteratur ac diminuatur imum in axe rotæ. ſic enim evaderet centrum gravitatis annuli humilius puncto ſuſpenſionis. Sed hoc aliquot menſium ſpatio fieri non poteſt. Eoque minus quod non atteritur axis rotæ ſuper plana ſuperficiecula, ſed volvitur. at in horologio pondere agitato, quod amplius 35 annis uſum præbuit [1]), non potui animadvertere axem rotæ infimæ cui pondus movens incumbit, quicquam amiſiſſe, etſi hic axis continuè fricetur interiori ſuperficie foraminis.


[Fig. 69.]



Imus axis rotæ *aa* [Fig. 69] qua parte inſidet ſubjectæ chalybi, debet exacte rotundus eſſe. accipiatur acus craſſa, vel filum e chalibe *cc*, vel axiculus torno formatus, quod applicetur cultro *d* per extantes cuneolos transmiſſum, ut acus horizontali poſitu incumbat chalibis planæ ſuperficieculæ *ee*, et in ea verſetur. Extremæ autem acus *ff* cuſpides intra repagula fere ſtringantur. Supernè imponatur fornix *gg*, ne exilire poſſit axis, ſed tantum ſub eo libere moveri.

An cuneoli in axe ſatis rotundi parte inferiori fieri poſſunt ut in S [Fig. 70]? opus enim tantummodo ut non planè acuti ſint. quia chalybs non facile deteritur, cum volvatur, non fricet ſubjectum planum quod itidem chalybeum. Sic enim minus quoque hinc inde excurret axis affixæque ipſi pinnulæ, ab rota ſerrata [2]) impellendæ.

[Fig. 70.]

[Fig. 71.]

Rota ænea Voorburgo adferenda [3]).

Poteſt ſuſpendi circulus libramenti [Fig. 71] ex tæniola AB forcipe CD retenta, et axis centro affixa, qui ea parte ad ſemicylindrum

---

[1]) Il s'agit donc d'une horloge construite en 1657 ou dans un des premiers mois de 1658. Voir les p. 30—31 du T. XVII, ainsi que les notes 1 et 2 de la p. 27 du même Tome.

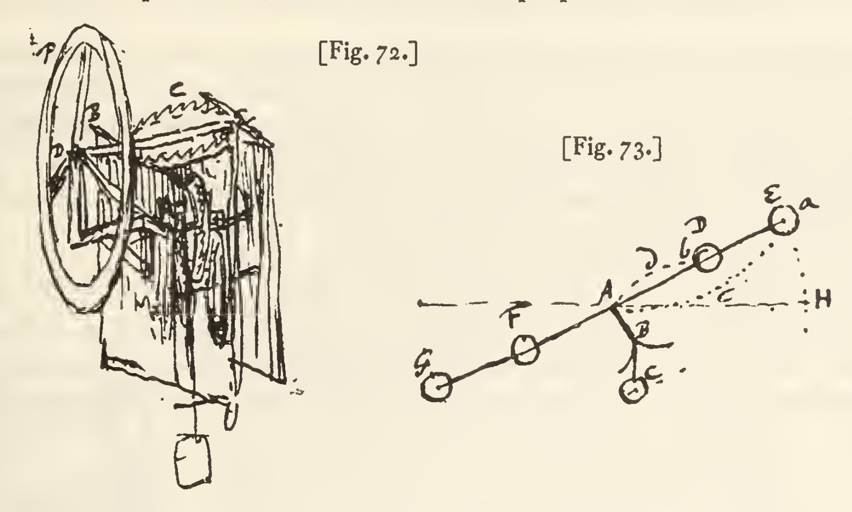
[2]) La roue de rencontre; comparez les notes 4 et 5 (et la Fig. 3 qui y est mentionnée) de la p. 14 du T. XVII.

[3]) La roue devant être apportée de Voorburg, où se trouvait — et se trouve encore aujourd'hui

EFG redactus ſit. movebitur enim ſic circulus ſuper puncto illo quod axis centrum eſt, nec referet an teniola extendatur. Eritque motus liberrimus abſque frictione. nec ſacile tænia atteritur ut puto.

Pars AB ab hac lamina abeſſe poteſt, ubi tunc ſpatium relinquetur ad collocandum pondus A.

Poteſt rota ſerrata C [Fig. 72] ſupernè incumbere axi DE, unde plus ſpatij efficitur in quo moveatur pondus A, adeo ut rota P tunc propius ad laminam accedere poſſit.



[Fig. 72.]

[Fig. 73.]

An non melius rota P in extremo axe ſuo hærebit, et extra laminas horologij paululum tantum exſtabit pondere A intra laminas ad eundem axem affixo, et antiſacomatis vice fungente. ita melius includi poterunt rotæ omnes interiores.

Oportet ſatis diſtent laminæ binæ, ut ſpatium non deſit ponderi A.

Conſtat quidem librationes ponderum G, E [Fig. 73], virgæ abſque gravitate affixorum, iſochronas fieri ob pondus C inter curvas ſuſpenſum. Sed an idem fit additis alijs ponderibus F, D? Omnino [4]).

— la maison de campagne Hofwijck habitée en ce temps par Huygens, on peut en conclure qu'il travaillait à la réalisation pratique de la nouvelle horloge tant à Hofwijck qu'à la Haye. Attendu que l'horloger J. van Ceulen n'est plus mentionné par lui après 1685 (note 5 de la p. 509), Huygens travaillait apparemment en ce temps avec B. van der Cloesen (voir la note 4 de la p. 516).

[4]) Nous avons fait ressortir plus haut (voir la note 6 de la p. 565) que Huygens semblait admettre

Quæramus primum, datis ponderibus E, G fingulis ∞ a; ponderibus D, F, fingulis ∞ b; diftantijs AE, AG ∞ c, diftantijs AD, AF ∞ d, quanta deberent poni pondera in locum extremorum E, G, ut æque celeri motu impellatur libra ex binis iftis compofita atque altera ex quaternis E, G, D, F.

Ponatur pondus E impulfum per arcum EG acquifiviffe celeritatem qua afcenderet ad altitudinem e. Ergo pondus D eam celeritatem habebit qua afcendat ad $\frac{dde}{cc}$. Ergo $ae + \frac{ddeb}{cc} \infty ex$, pofito x pro pondere ponendo in locum E vel G. Debet enim potentia vel pondus C, certâ altitudine defcendendo peractâ, eum motum imprimere partibus libræ qualitercunque compofitæ, ut à libra folutæ (atqui etiam ipfum C) motumque furfum convertentes, tantundem gravitatis afcendat quantum defcendit depreffo pondere C; Ex axiomate nostro pag. 175 in marg. vires corporum non interire nifi edito effectu &c.[1]). Atqui x quoque acquirit celeritatem qua afcendat ad e altitudinem.

Ergo $a + \frac{ddb}{cc} \infty x$. Cum ergo tali pondere $x \infty a + \frac{ddb}{cc}$ pofito utrinque in extrema virga, fiat motus libræ impreffus actione ponderis C, æque celer ac libræ ex ponderibus E, D, F, G compofitæ, idque emenfo arcu quovis EH. fequitur totas utriufque libræ librationes ijsdem temporibus abfolvi. Sunt autem libræ ex ponderibus

---

généralement déjà en 1683 que le mouvement d'un système rigide autour d'un axe fixe ne dépend que de la grandeur du moment moteur d'une part et de celle du moment d'inertie du système d'autre part. Cependant, il s'agissait en 1683 d'une généralisation plus ou moins intuitive de ce qui avait été démontré dans le cas du pendule composé. Il n'est donc pas étonnant qu'ici — quoiqu'aux p. 562—566 il considère des balanciers de différentes formes — après avoir admis l'isochronisme des vibrations de la verge impondérable de la Fig. 73, portant les deux poids quelconques E et G égaux et équidistants de A, il éprouve le besoin de démontrer que l'isochronisme subsiste lorsque la balance (ou le balancier), toujours symétrique par hypothèse par rapport au point A, porte plusieurs poids et que la verge est pondérable, le moment moteur restant le même.

Il faut d'ailleurs remarquer que l'existence de l'isochronisme, même dans le cas simple du balancier impondérable portant les deux poids égaux, n'a pas été démontré par Huygens, comme il semble le croire en 1693. Cet isochronisme ne peut être qu'approximatif. En effet, le poids C n'exerce pas seulement un moment, mais fait partie, lui aussi, du système dont il règle le mouvement, de sorte que le moment d'inertie de ce système n'est pas constant. C'est de quoi Huygens ne tient pas compte: dans la Fig. 74 et surtout dans la Fig. 78 on voit qu'il prend le poids régulateur assez grand. En 1694 (voir les p. 582 et suiv.) Huygens tient compte du fait que le poids régulateur doit „motum tribuere ipfis et fibi", c.à.d. doit donner du mouvement tant à lui-même qu'au balancier, d'où résulte „minimus quidam defectus" (p. 583 et 586).

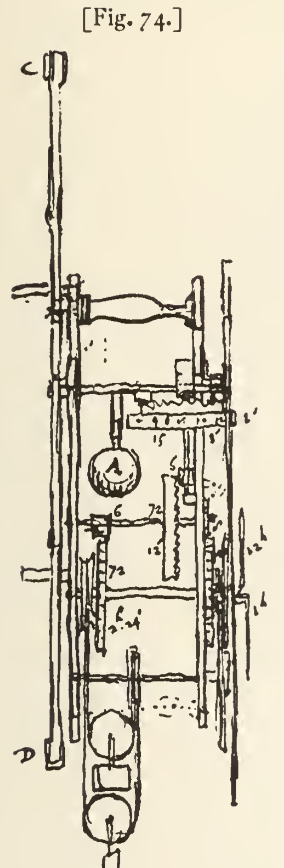
[1]) Voir la note 4 de la p. 553, ainsi que la p. 554, qui précèdent.

binis x compoſitæ librationes omnes iſochronæ. Ergo et libræ compoſitæ ex E, D, F, G. Ergo qualitercunque compoſita libra, dummodo æquilibrata, æqualia tempora oſcillationibus ſignabit operâ ponderis C.

Præſtat longè ut gravitas libræ tota, quantum poteſt, à centro removeatur. fit enim levior, manente oſcillationum tempore. Et centrum gravitatis ex libra et pondere C, tanquam in B poſiti, compoſitæ fit ampliori diſtantia ab A.

4 libræ in D idem tempus producunt quod 1 libra in E, diſtantia dupla.

[Fig. 74.]



On pourrait ſuſpendre l'axe du cercle balancier par deux rubans de ſatin de 3 ou 4 lignes de large, et rien que d'une $\frac{1}{2}$ ligne de long, les ſerrant en haut dans des pieces attachees aux platines principales de l'horologe. Et tirant une fois bien fort, a fin qu'ils ne s'etendiſſent plus en ſuite. quoyque cette extenſion meſme ne nuiroit point ſi non en ce que l'axe ne reſteroit pas exactement horizontal, et qu'il approcheroit plus de la roue de rencontre.

On pourroit auſſi le ſuſpendre par un ruban de ſatin en ſorte que A et le balancier CD [Fig. 74] fiſſent equilibre, en faiſant aller l'autre bout de l'axe dans une fente.

Il ne faut recourir a cette ſuſpenſion de rubans, que ſi on trouve que l'axe en pointe s'uſe, ce qui n'eſt pas apparent.

Un des grands defauts de l'horologe a pendule ſuſpendue dans le vaiſſeau eſtoit, que la force du pendule cauſoit un petit mouvement a toute l'horloge et cela plus ou moins ſelon la libertè des axes des chaſſis de fer. d'ou naiſſoit de l'inegalitè aux heures. Cela n'aura point lieu ici, quand meſme la boule A, qui eſt tranſportée d'un coſtè à l'autre produiroit quelque peu de mouvement à l'horloge. Car le balancier fait ſes tours egaux, quoyque ſon centre change de place. Outre cela on ne pouvoit ſe ſervir dans le vaiſſeau que d'un pendule court, de 10 pouces ou environ. Mais de cette nouvelle maniere on peut faire les balanciers de 2, 3 ou 4 pieds de diametre, et avec des balancements de 2, 3 ou 4 ſecondes. Et par conſequent faire ces horloges ſi juſtes qu'on veut, puiſque la juſteſſe depend de la grandeur et du poids des balanciers. Car par là la roüe de rencontre a moins de force à rendre les balancements inegaux, et la reſiſtence de l'air agit auſſi moins conſiderablement ſur un balancier peſant.

Il faut avoir ſoin que les axes des chaſſis BB pag. 172 [Fig. 41 de la p. 548] ſoient

bien libres à fin que l'axe du balancier demeure horizontal. Ils doivent eſtre comme ceux des balances ordinaires, ainſi [Fig. 75] un peut [liſez: peu] en pointe en bas, et couchez dans des trous ronds.

Le bras d'ou pend la boule A, devant qu'on y attache cette boule, ou ſans que ſon poids agiſſe, doit faire partie de l'Equilibre du balancier, de ſorte qu'il demeure en toute ſituation lors qu'avec la main on ſoutient la boule.

[Fig. 75.]



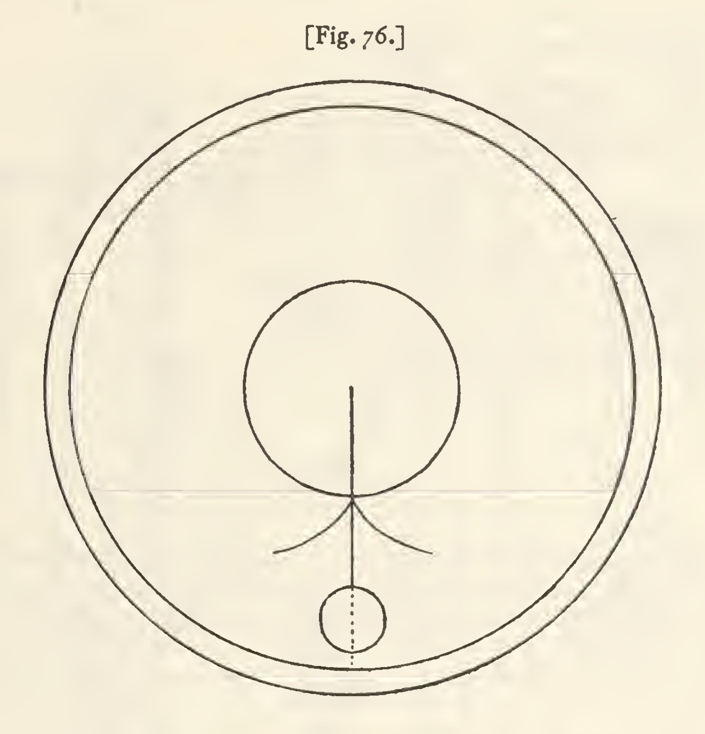
VII.

LA „LIBRA ISOCHRONIS RECURSIBUS" DE MARS 1694 [1]).

po. lin.

Optimum ad ſecunda ſcrupula. 36. $8\frac{1}{2}$ longitudo penduli ad ſecunda. mens. Paris.
Longitudo Penduli 3 ped. 2. poll. $\frac{1}{3}$ lin. Rhenoland. [2]).

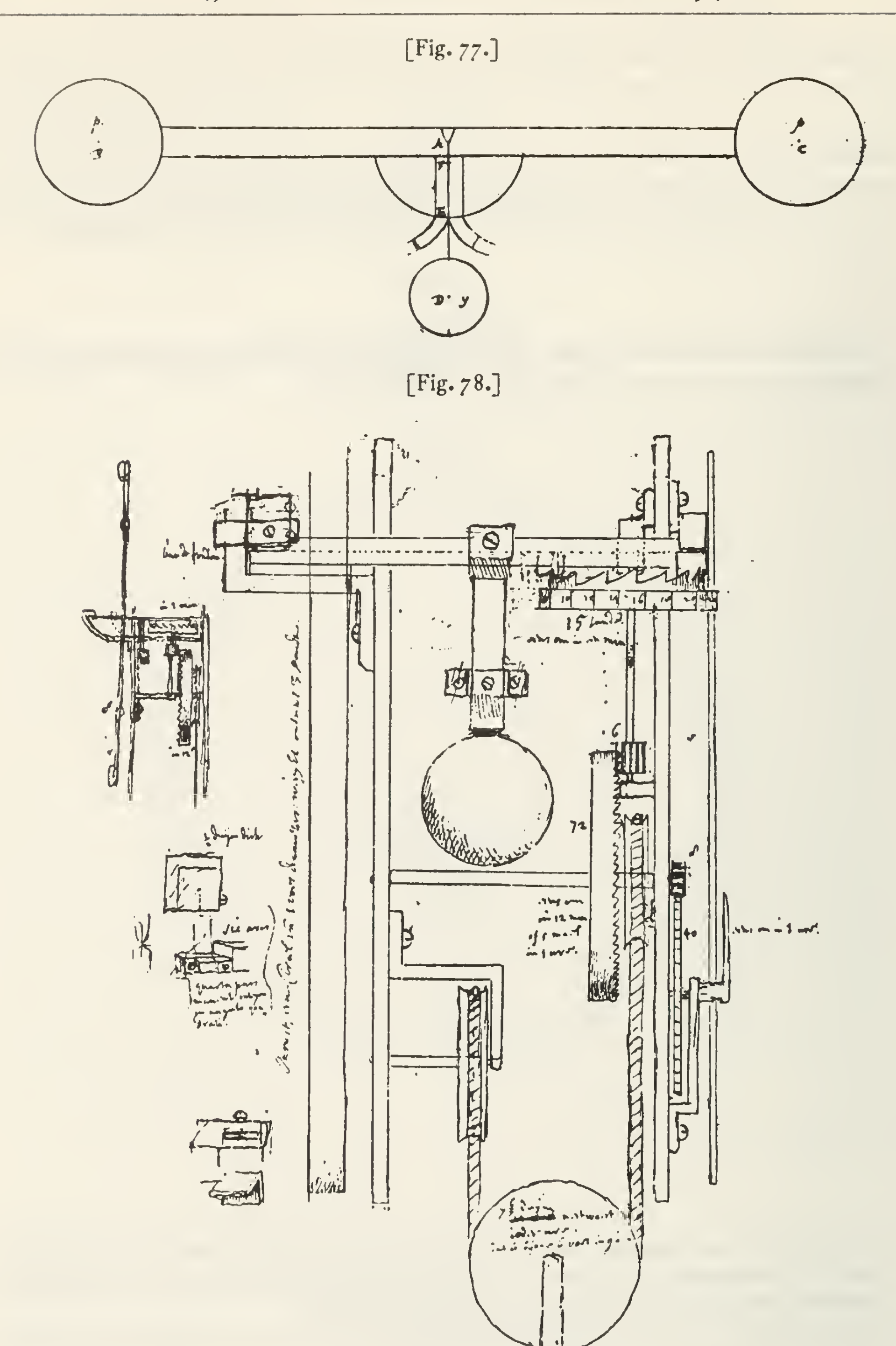
[Fig. 76.]



[1]) La Pièce VII est empruntée aux p. 91—99 et 101—107 du Manuscrit I. La p. 64 porte la date du 18 septembre 1693; c'est à la p. 99 que se trouvent la date du 15 mars 1694 et l'expression „libra iſochronis recurſibus"; voir la p. 578 qui suit.

[2]) Ces deux lignes (datant de 1693) sont empruntées aux p. 186—187 du Manuscrit H. Comparez le dernier alinéa de la p. 431 datant de 1670.

[Fig. 77.]



[Fig. 78.]

$12\frac{2}{5}$ ped. ∞ n longitudo penduli ſimplicis iſochroni compoſito.

AB, AC ∞ a [Fig. 77]. $\frac{xy}{2p+y}$ ∞ AF [1]). $\frac{2a^2p + x^2y}{xy}$ ∞ n [2])

AE ∞ x

pondus D ∞ y

F centrum gravitatis B, C, D.

$2a^2p + x^2y$ ∞ xyn

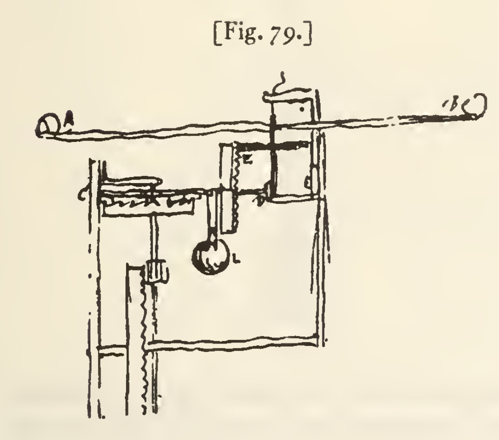
$\frac{2a^2p}{nx - xx}$ ∞ y

Sit x ∞ $\frac{3}{2}$ pollicis. a ∞ 6 pol. $2p$ ∞ 3 pond.

152 poll. ∞ n. $\frac{432}{903}$ pond. ∞ y

fere $\frac{1}{2}$ pond.

[Fig. 79.]



Si on vouloit mettre le balancier horizontalement — [dans l'horloge de la Fig. 78 [3]) il eſt vertical] —, et le ſuſpendre [Fig. 79], il faudroit auſſi ſuſpendre l'axe CD avec des rubans. le balancier pourroit faire beaucoup de tours.

Il y auroit le frottement des dents en E. et un peu de libertè a ces dents, ce qui s'evite par l'autre maniere de balancier vertical. Il faudroit plus de poids en L a cauſe des tours plus grands qui ſont plus empeſchez par l'air.

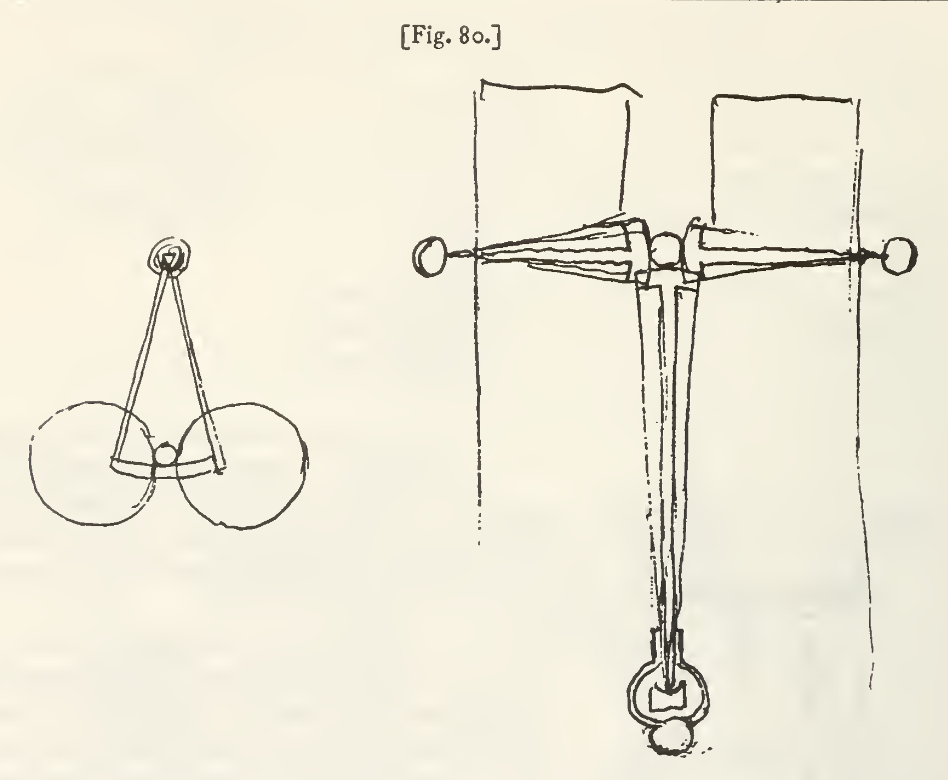
---

[1]) Ceci est la valeur de AF, lorsqu'on suppose le poids D ou y placé au point E. Il s'agit donc d'un calcul approximatif, comme Huygens le dit clairement dans l'alinéa de la p. 580 qui commence par les mots „Nota, EB est ..." Huygens se propose ici de calculer le poids D, les poids égaux B et C et leur distance à l'axe étant donnés ainsi que la longueur du pendule simple choisie de telle manière que le balancier exécute une oscillation simple en 2″ environ. Il se sert de pieds rhénans.

[2]) C'est la formule $l = \frac{I}{Mb}$ de la p. 47 où il est fait usage de la valeur trouvée pour AF ou b. La verge est considérée comme impondérable.

[3]) On lit dans la Fig. 78, outre les chiffres qui indiquent les nombres des dents: „bandt rondom [bande tout autour] ... in 1 min ... in 12′ ... $\frac{1}{2}$ duym dick ... sic axis ... quarta pars maneat integra in angulo quadrati .. Onrust, een Circel van 1 voet diameter: weeght ontrent 3 ponden" [balancier, circonférence de cercle d'un pied de diamètre; pèse environ 3 livres] ... 15 tanden, eens om in een min ... eens om in 12 min. of 5 mael in 1 ure ... 1 duym ... eens om in 1 ure ... $7\frac{6}{7}$ duym neerwaert ieder

[Fig. 80.]



Of van ſelfs recht blijft, het onderſte. men kan 't met een lintie helpen. of alle drie raecken. of de 2 van ter ſijden tegenwicht hebben. geen olie. perfect rond ſlijpen [Fig. 80].

Regula æquilibretur. tunc pondera apponantur extremis brachijs [Fig. 81], eousque demiſſa donec tempora 2 ſecundorum ſignent.

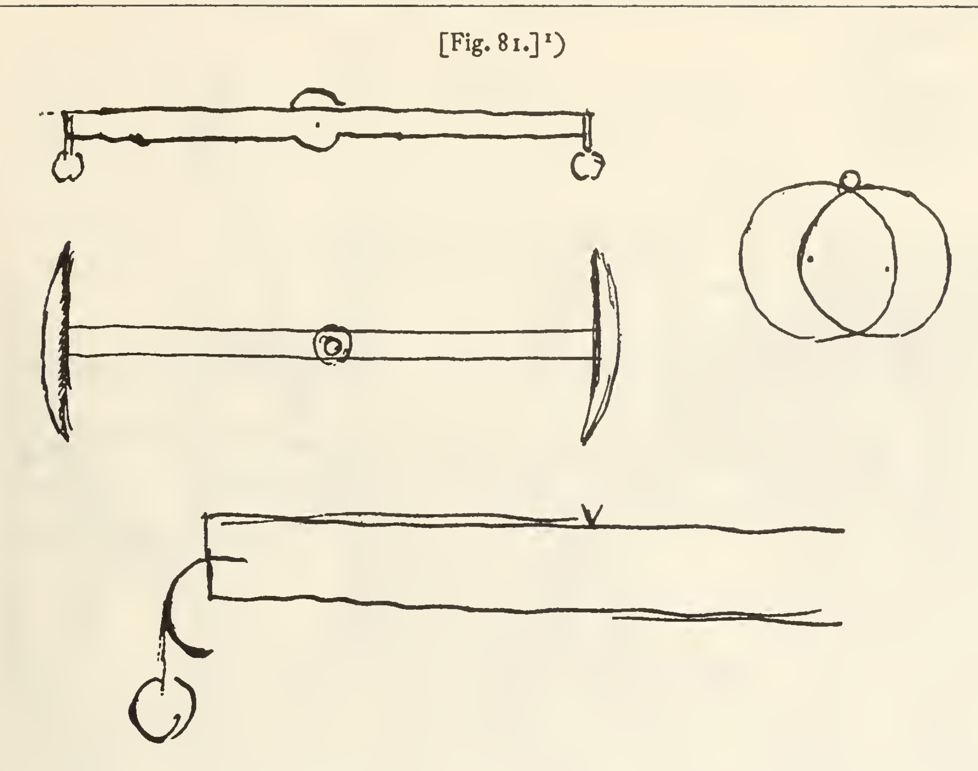
Erunt paulo ulterius demittenda quam ex calculo ſimplici; propter pondus brachiorum.

Sit regula $2\frac{1}{2}$ pedum. fieret proxime punctum ſuſpenſionis in brachijs $1\frac{1}{2}$ pollice

ure. dat is bijnae 6 voet in 9 uren" [le poids moteur descend à peu près de 6 pieds en 9 heures].

Il semble s'agir ici d'une horloge réellement construite en 1693—1694; en effet, il est question de la construction d'une horloge dans le passage de la p. 584 du T. X où Huygens parle, le 19 mars 1694, de la „nouvelle invention d'Horloge de Mer", dont il a „desia vu assez pour en avoir fort bonne opinion". Nous aurions évidemment pu placer cette figure tout aussi bien dans La Pièce VI, notre division des recherches de Huygens en différentes Pièces étant, comme on le conçoit, plus ou moins arbitraire.

[Fig. 81.][1])



infra centrum gravitatis brachiorum nudorum, ex quo libra ſuſpenditur, ex ſimplici calculo [2]). Jam propter pondus regulæ, fiet proxime 2 poll.

Poteſt ſi velimus reduci regula ad 2 pedes. Poſſunt et ſine curtatione, pondera ſuſpendi propiora centro libræ.

Sed melius ad extrema brachia appenduntur quod minus ibi ſentiunt vim horologij quo motus continuatur.

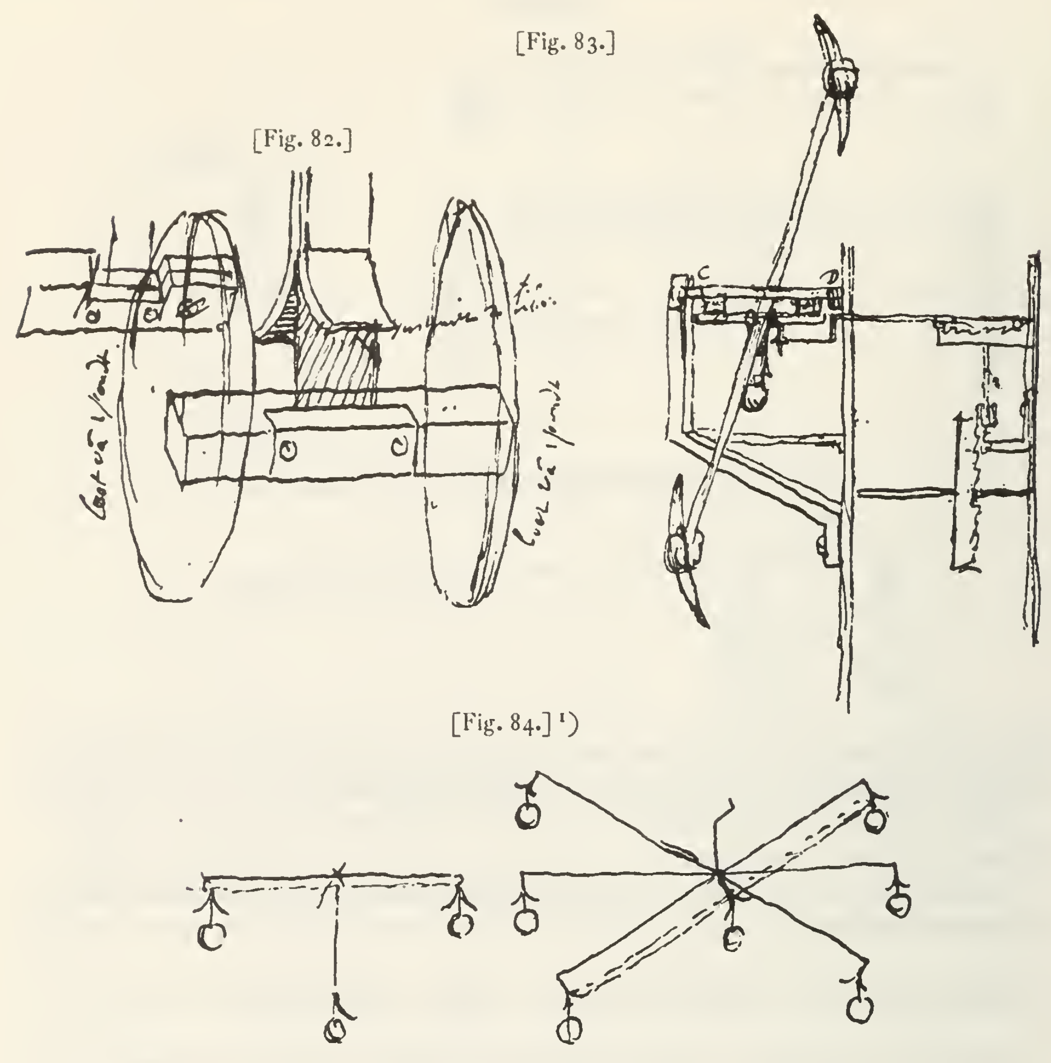
loot van 1 pondt . . . loot van 1 pondt . . . ſuſtinet 2 libr. [Fig. 82].

Si on pourroit ſuſpendre un fort grand balancier [Fig. 76] dans le vaiſſeau, avec ſon horologe, d'une roüe, attachée.

---

[1]) Comparez avec la troisième figure 81 la Fig. 38 de la p. 546 qui précède.

[2]) Pour que l'oscillation simple ait lieu en 2″, il faut que la longueur du pendule isochrone soit environ de $12\frac{2}{3}$ pieds rhénans. La formule $\frac{a^2}{b} = x$ de la p. 447 du T. XVI (c'est la formule $\frac{x^2 + y^2}{x} = a$ de la p. 319 du présent Tome) donne pour $a =$ environ $1\frac{1}{4}$ pied ou 15 pouces, et $x = 12\frac{2}{3}$ pieds $=$ 152 pouces, $b =$ environ $1\frac{1}{2}$ pouce. La verge est supposée impondérable.



[Fig. 82.]

[Fig. 83.]

[Fig. 84.] [1])

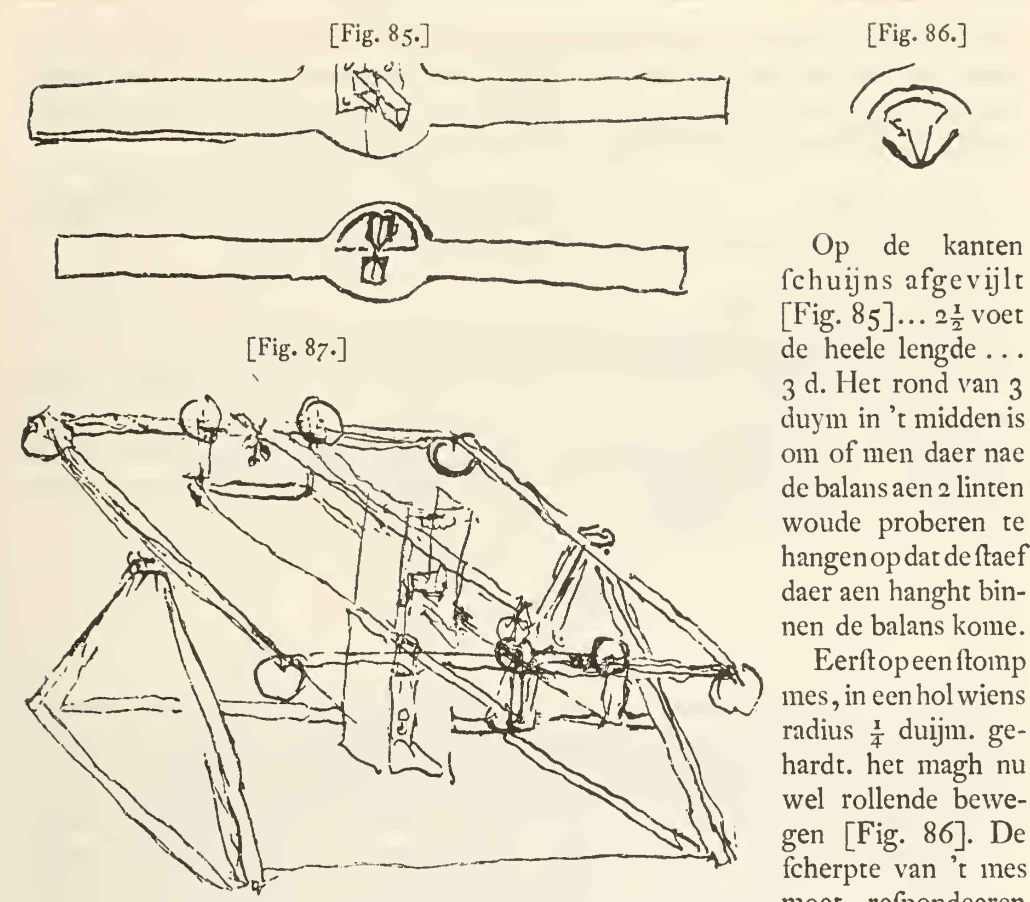
De balans [Fig. 83] met ſijn dwarſſe ſpil, en ſtaefje daerſe aenhanght, moet te ſamen van boven ingeleght werden in C, D. Aen de dwarſſe ſpil ſijn oock de boxhoorns vaſt met haer gewight. Elck van de 2 linten moet ontrent evenveel draegen. De boxhoorns konnen recht onder de balans komen, moeten gemackelijck aen de ſpil vaſt geſteken werden. Men ſal de ingeſneden gaeten moeten toe ſtoppen.

---

[1]) Jusqu'ici les balanciers employés ou proposés par Huygens en 1694 ne différaient pas beaucoup, semble-t-il, de ceux de 1693. Ici il commence à faire usage de plus d'une paire de „cornes de bouc", toujours taillées suivant des développantes de circonférences de cercle ou „hélicoïdes".

[Fig. 85.] [Fig. 86.]

[Fig. 87.]



Op de kanten ſchuijns afgevijlt [Fig. 85]... $2\frac{1}{2}$ voet de heele lengde ... 3 d. Het rond van 3 duym in 't midden is om of men daer nae de balans aen 2 linten woude proberen te hangen op dat de ſtaef daer aen hanght binnen de balans kome.

Eerſt op een ſtomp mes, in een hol wiens radius $\frac{1}{4}$ duijm. gehardt. het magh nu wel rollende bewegen [Fig. 86]. De ſcherpte van 't mes moet reſpondeeren op 't middelpunt van de balans [Fig. 85]. of liever een weijnigh laegher komen om &c.... de nieuwe plaet [sur une feuille collée entre les p. 98 et 99 du Manuſcrit I il eſt queſton d'un „plaetje aen de hangende ſpil geſoudeert om de balans tegen te ſchroeven"] hoogh genoegh maecken om oock met de linten te proberen .... ſteuytingh voor 't ſwaeijen. lepels van d'onruſt ſpil polijſten. oock de rondſels ... Raemen van hout, om in 't ſchip te hangen [Fig. 87]. ſtaende op de vloer. hout op ſijn kant. gewichten aen de hoecken. Balans in reſerve die correct geſtelt is. de raemen vaſt ſetten als men die balans gebruijckt om te ſtellen. Hoe het werck te ſluijten, voor 't ſtof? alles met de balans in een geſloten kas. dewelcke boven uijt de raemen te laeten ſteecken. yſere aſſen en gaeten [Fig. 75], of beter gehard ſtael ... de gaten boven open laeten, dat is maer halve ronden. om de raemen te konnen uytlichten ... de koocker voor het gewicht en tegenwicht vaſt aen den binnenſten raem of planck hechten. dan ſal het gewight geen noodt hebben van ſlingeren alhoewel 2 voet langh. Het Horologie met ſijn kaſſe op de planck van den binnenſten raem vaſt ſetten ... modelletje maecken van Caertpapier of hout ... Onder in de planck daer

de kas van 't horlogie op ſal ſtaen een gat te maecken, en daer onder tegen aen de koker voor de gewighten. Onder in de grondt van deſe koker ſoo veel loodt te leggen dat het de kas van 't horlogie over endt houdt ſtaen. Selfs als het eerſt op gewonden is. Sullen dan geen looden aen de raemen noodigh ſijn [1]).

Inveni 15 Mart. 1694. Libram iſochronis recurſibus quod erat ſatis difficile, etiam poſt libram iſochronam de qua ab hinc anno in lib. H pag. 180 [2]).

Separatim conſideranda movens grave, et moles corporis moti, etiam cum utrumque in eodem reſidet [3]).

Pro gravitate deorſum trahente poteſt poni Elater ſine pondere [4]).

Moles mota [5]) conſideretur quaſi horizontaliter moveatur, cujus moles ut certum motum ac celeritatem accipiat, certa vi trahente [6]) opus eſt.

---

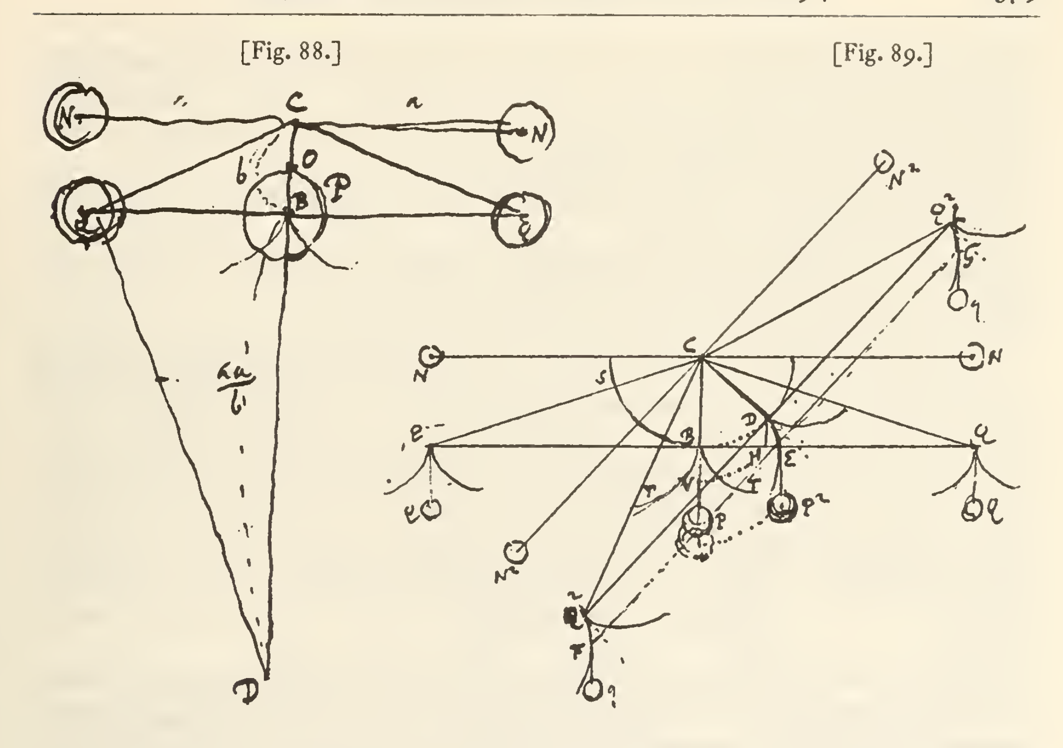
[1]) Traduction: „Limé en biseau... Longueur totale de $2\frac{1}{2}$ pieds [Fig. 85]. Trois pouces. La partie ronde de trois pouces au milieu sert à pouvoir suspendre par après, si l'on veut, le balancier à deux rubans: la barre à laquelle il est suspendu pourra ainsi passer par lui.

D'abord sur un couteau obtus, dans un creux à rayon d'un quart de pouce. Trempé. Il peut maintenant y avoir roulement [Fig. 86]. L'arête du couteau doit correspondre au centre du balancier [Fig. 85], ou plutôt être située un peu au-dessous de lui, pour que etc.... Faire la nouvelle plaque [voir le texte] assez haute pour faire aussi un essai avec les rubans. Empêcher par amortissement les oscillations trop larges. Polir les palettes du balancier. Les pignons de même ... Châssis de bois pour suspendre [l'horloge] dans le vaisseau. Placés sur le plancher [Fig. 87]. Le bois sur le côté. Des poids aux angles. Balancier correctement réglé en réserve. Fixer les châssis lorsqu'on se sert de ce balancier pour mettre les choses au point [?]. Comment protéger l'ouvrage contre la poussière? Le tout, y compris le balancier, dans une boîte fermée. Laisser celle-ci dépasser les châssis en hauteur. Les axes et les trous [Fig. 75] en fer, ou plûtot en acier trempé ... Laisser les trous ouverts par en haut, donc des demi-circonférences seulement, pour pouvoir enlever les châssis ... Attacher fermement le cylindre pour le poids et pour le contrepoids au châssis (ou planche) intérieur [daus une petite figure en marge on voit en effet une planche en guise de châssis intérieur; dans la Fig. 87 cette planche couperait l'horloge par le milieu; celle-ci doit donc être rehaussée pour pouvoir reposer sur la planche]. De cette façon le poids, quoique long de 2 pieds, ne risquera pas de ballotter. Fixer l'horloge avec sa boîte sur la planche du châssis intérieur ... Construire un petit modèle de carton ou de bois. Percer un trou dans la planche sur laquelle sera placée l'horloge; là dessous, contre [la planche], le cylindre pour les poids. Mettre tant de plomb au fond de ce cylindre que la boîte de l'horloge soit par là maintenue dans la position verticale. Même lorsqu'on vient de la remonter. Alors il ne faudra plus de plombs aux châssis."

[2]) Il s'agit de la „libratio isochrona" du 6 mars 1693: voir le début de la Pièce VI qui précède.

[3]) En séparant nettement la notion du poids d'un corps de celle de sa masse, Huygens se place

[Fig. 88.] [Fig. 89.]



Duc singula N, N, P [Fig. 88][7]) in quadrata distantiarum ab C: summam productorum divide per productum ex summa in N, N, P in CO distantiam centri gravitatis N, N, P. habebis CD longitudinem penduli isochroni. Ex propositione 5 de Centro Oscillationis[8]).

$$\frac{2aa + 2bb}{2b}$$

$$\frac{aa + bb}{b} \propto \text{CD bon.}$$

Pendulum compositum ex ponderibus æqualibus N N, in recta per punctum suspen-

---

au point de vue de Newton. Comparez notre remarque à la p. 45 qui précède (note 7).

4) Comparez les considérations de 1675 (p. 497) sur l'„incitatio".

5) Lisez plutôt „corpus motum".

6) La „vis trahens" est apparemment une quantité d'„énergie" (voir la note 6 de la p. 359 du T. XVI) déterminée. Comparez l'expression „vis motus" (même page).

7) Le poids P est supposé égal à la somme des poids égaux N, N.

8) P. 259 du présent Tome. Comparez le calcul de la p. 573 (note 2).

ſionis C, æqualiter diſtantibus, et ex pondere P, duobus ſimul N, N æquali, affixoque in virga perpendiculari CPD in B, Erit iſochronum pendulo compoſito ex ponderibus binis Q Q ipſis N N æqualibus, affixis in brachijs BQ horizontalibus quorum longitudo ipſis CN æqualis ſit, manente ſuſpenſione ex C [1]).

Pendulum ſimplex utrique iſochronum erit CD cujus pars BD tertia ſit proportionalis duabus CB, BQ.

Curvæ BT, inter quas P pondus ſuſpenditur, atque item pondera QQ, ſunt descriptæ ex evolutione circumferentiæ BS radium CB habentis.

Nota, EB eſt æqualis arcui DB [Fig. 89], Et percurritur a pondere P^2 (quatenus movetur horizontaliter) proportionaliter ut partes arcus DB. Ergo eadem vi, ſive deſcenſu ponderis P opus eſſet ad conciliandam eandem celeritatem pendulo compoſito ex N, N, et P in B affixo, atque ex N N, et P inter curvas ſuſpenſo; conſiderando tantum motum horizontalem ponderis P. Sed magis deſcendit pondus P poſteriore caſu quia curva DE longior rectâ DH. Itaque hinc fit ut paulo celeriorem motum accipiat pendulum, *ex* N N *et* P *pendente compoſitum*, quam *ex* N N *et* P *in* B *fixo*. quod ita eſſe conſtat, ob majores ſemper diſtantias rectæ EP^2 quam DH à perpendiculo CB.

Sicut pendulum ex N N et P appenſo inter curvas noſtras helicoides efficit pendulum iſochronis oſcillationibus, ſuſpenſum ex C. Ita quoque ex C eodem ſuſpenſum pendulum ex ſolis Q Q ponderibus, inter ſimiles curvas utrinque pendentibus, iſochronas oſcillationes habebit, et alterius illius penduli æquales. Hoc modo carere poſſumus gravitate ponderis P.

Demonſtratio æqualitatis penduli QCQ hinc petitur, conſiderando in utroque pendulo duos motus, quorum alter eſt ponderum Q Q et N N quatenus circulariter moventur. qui motus utrobique æquales ſunt. ut intelligitur motâ recta CB in CD, unde N N jam in N^2N^2, et Q Q in Q^2Q^2; ſed ipſa pondera Q Q jam quaſi eſſent in G et F punctis curvarum ſeu cornuum, quæ ſunt neceſſario in recta per E ducta et æquidiſtante Q^2Q^2. quæ FEG itaque et rectæ N^2N^2 parallela eſt.

Centrum gravitatis ponderum qq [Fig. 89] quod in P^2 et per EP^2 agere cenſendum, agit vi deſcenſus ſui ∞ BV, in rectam CD, ad transponendum GF in QQ, hoc eſt ad convertendum GF ponderibus qq oneratum ex ſitu GF in QQ et admovendum pondus P motu hoc quanta eſt diſtantia EB.

Similiter vero centrum gravitatis ponderis P^2 per eandem EP agit in rectam CD,

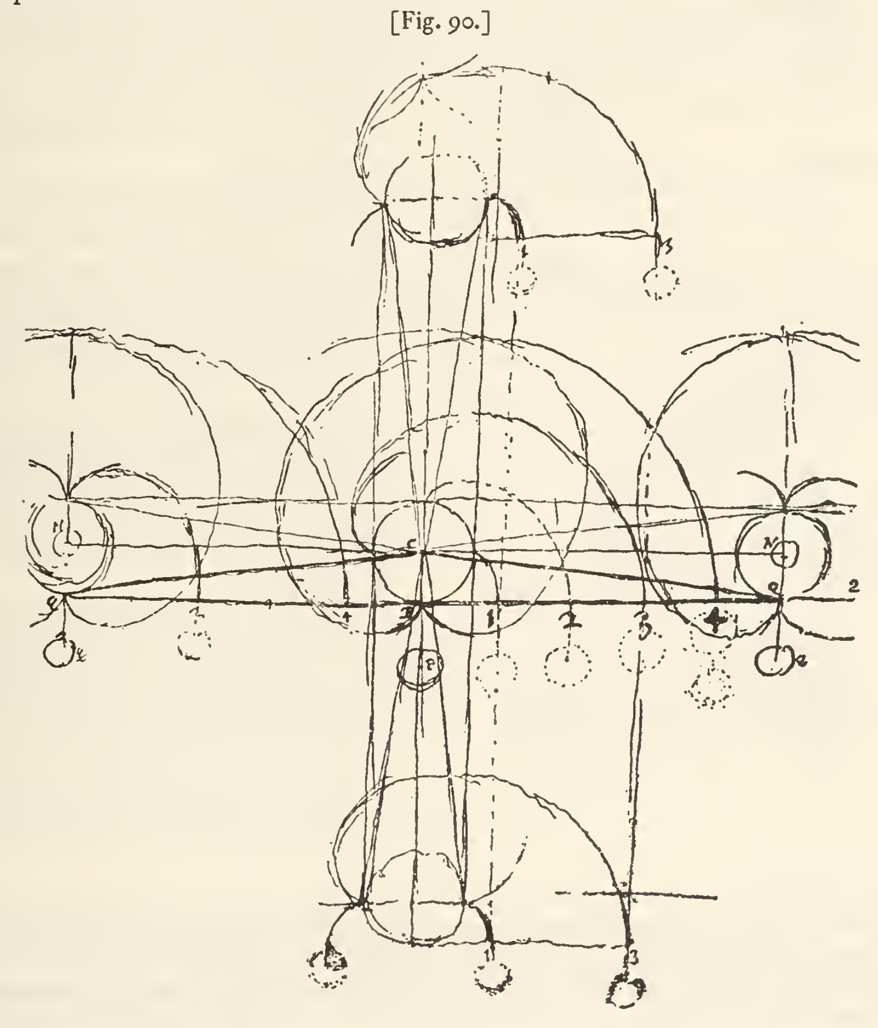
[1]) Puisque la formule $\frac{aa+bb}{b} = CD$ est identique à la formule $\frac{x^2+y^2}{x} = a$ de la note 2 de la p. 575.

ad transponendum N^2N^2 in NN (nam ipſa pondera N^2N^2 hic nihil juvant), et ſeipſum ab E in B.

Agunt ergo in æqualia et eodem modo. Unde et eosdem motus producere debent. atqui pendulum NNP eſt iſochronum (demonſtratio lib. H pag. 180). Ergo et pendulum QQ. Deſcendit autem centrum gravitatis ponderis P^2 per parabolam EV, ut demonſtravi lib. H pag. 180 [Fig. 66 et note 4 de la p. 564].

Egregium hic quod pondus brachiorum ipſius libræ non impediunt [lisez: impedit] quin reciprocationes ſiant iſochronæ [2]). faciunt enim lentiores tantum. atque ita quoque quodcunque corpus adjungetur, dummodo habeat centrum gravitatis in C puncto ſuſpenſionis libræ.

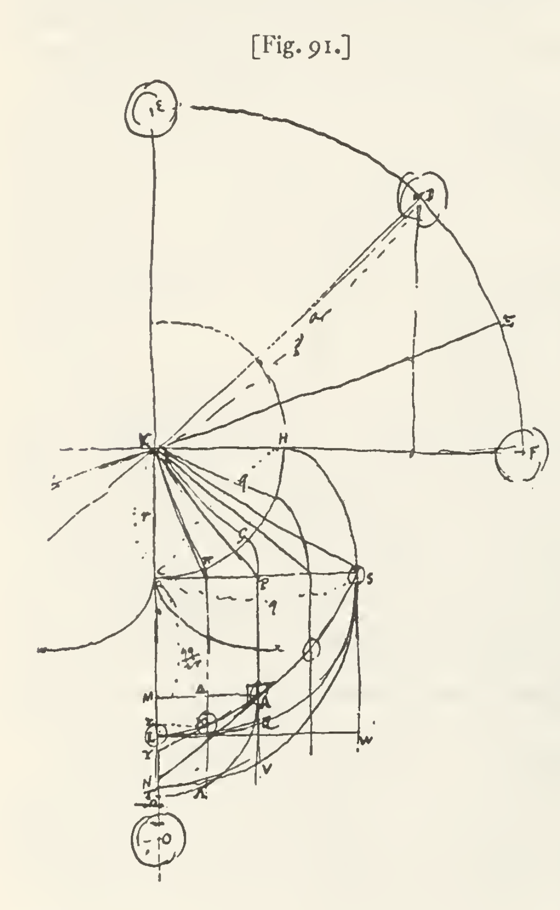
[Fig. 90.]



[2]) Voir à ce sujet la note 4 de la p. 567 qui précède.

La balance, ou pendule composé QCQ [Fig. 88, 89 et 90] suspendu en C, et les poids Q Q entre les helicoides, que je suppose icy [Fig. 90] continues, (si l'on veut a l'infini), et aussi les rubans qui soutienent les poids Q Q: ce pendule dis-je quand au lieu de balancemens, il feroit un ou plusieurs tours entiers sur le point C, il ira et viendra par des retours isochrones, et aussi vistes que s'il faisoit seulement de petits balancemens [1]). Et le centre de gravitè des poids Q Q sera tousjours le mesme que celuy du poids P suspendu entre de pareilles helicoïdes, qui commencent en B dans la droite QQ. Et les points de contact du ruban du poids P où il touche son helicoïde, coupera tousjours en deux egalement les points de contact des rubans Q Q avec leurs helicoïdes. Ainsi 1 est entre 1,1; 2 entre 2,2; 3 entre 3,3. &c. C'est ce que j'ay reconnu par cette figure [1]).

[Fig. 91.]



Ce pendule composè des poids Q Q est encore isochrone a celuy qui est composè des poids N N, au bout des bras CN, (qui sont en ligne droite) et du poids P double de chaque Q, comme il a estè dit p. 99 [p. 579—580].

Pondus S [Fig. 91] [2]) descendens per SL movet E per EF et simul O sursum per similem quadrantem, daturque proportio ponderum S ad E vel O, quæ *s* ad *e*.

Quæritur quam celeritatem acquirant pondera E et O, ubi ad lineam horizontalem FK pervenerint. Deinde quam acquirant cum utrinque per arcum DF ∞ $\frac{1}{2}$ EF moventur; Et quæ sit utrobique proportio celeritatum. GP est helicoides ex evolutione arcus

[1]) Comme la largeur de la page du manuscrit n'était pas suffisante, le chiffre 2 [Fig. 90] à droite est écrit un peu à gauche de l'endroit où il devrait se trouver, tandis que les chiffres 1 et 3 ne sont indiqués que dans les parties supérieure et inférieure de la figure, lesquelles correspondent aux parties droite et gauche.

[2]) Comparez la Fig. 91 avec la Fig. 66 de la p. 564. SL correspond à la parabole RL de la Fig. 66. S est le poids regulateur, EO le balancier.

GC, quam tangit perpendicularis PA. Celeritas P verſus C eſt eadem ac celeritas G verſus C. Ergo et celeritas ponderis A verſus M quatenus nempe eſt horizontalis, eadem quæ G verſus C [3]). ſed celeritas ponderis A verſus N erit ad celeritatem A verſus M, vel G verſus C, ut tangens AN ad AM vel PC vel GC.

Oportet pondera E et O, hoc eſt 2 e, celeritate acquiſita cum pervenere in rectam FK, ſurſum converſâ; itemque pondus S celeritate quam habebit in L ſurſum converſâ, ſi ducantur ſingulorum altitudines in ipſa pondera, fieri ſummam productorum æqualem ei quæ fit ex pondere S in altitudinem LC, quoniam ſolum pondus s, omnia movens, talem motum tribuere ipſis et ſibi debet quo æquale fiat momentum aſcenſus ponderum [4]) momento deſcendentis S ex altitudine CL.

Eſt autem celeritas quam habet E poſtquam deſcendit in F, et O poſtquam aſcendit ad eandem horizontalem FK, ad celeritatem ponderis S cum venit in L, ſicut FK ad KC, quia pondus E in arcu EF, et punctum H in arcu HC, et contactus fili et curvarum HS, GP ita ſimul feruntur, ut illa arcus ſuos, hoc rectam SC, eadem proportione ſecent.

Sit igitur x celeritas ponderis E cum eſt in F. KC ∞ r. CH ∞ q. Et KF ſit ∞ a. Ergo celeritas ponderis S in L erit $\frac{rx}{a}$.

Filum enim unde pendet pondus S, dum inde deſcendit hoc per parabolam SAL, ſemper pendet perpendiculariter. Ideoque pondus S, cum eſt in L, æquè celeriter movetur ac punctum C radij KC.

Sit n celeritas quam haberet S [5]) cadens acceleratione naturali per CL. Eſt autem $\frac{qq}{2r}$ ∞ CL altitudo deſcenſus ponderis S.

nn ——— xx ——— $\frac{qq}{2r}$ / $\frac{q^2xx}{2rnn}$ altitudo quo pervenire poterit pondus E vel O, cum ad horizontalem FK pervenerint.
m. $2e$

$\frac{2eq^2xx}{2rnn}$ productum ex $2e$ in altitudines quo poſſunt aſcendere poſtquam venere in horizontalem FK.

---

[3]) Huygens admet ici, comme antérieurement, et comme il le rappelle un peu plus loin, que la partie libre du ruban auquel le poids A est suspendu, reste constamment vertical.

[4]) Le „momentum ascensus" est donc ici la quantité d'énergie potentielle, pour nous servir de cette expression moderne (comparez la note 5 de la p. 341 du T. XVI) qui correspond à l'ascension du poids considéré.

[5]) Ou un autre poids quelconque.

qu. celer.is pond. S in L

nn —— $\frac{rrxx}{aa}$ —— $\frac{qq}{2r}$ / $\frac{q^2rrxx}{2raann}$ } altitudo ad quam pervenire poterit pondus S in L delatum.

s } m.

$\frac{sq^2rrxx}{2raann}$ productum ex s in altitudinem quo poterit ascendere postquam venit ab S in L.

Summa productorum $\frac{2eq^2xx}{2rnn} + \frac{sq^2rrxx}{2raann} \infty \frac{q^2s}{2r}$ productum ex s in altitudinem descensus sui CL, cum libere cadit.

$$2eaaxx + srrxx \infty saann$$

$$xx \infty \frac{saann}{2eaa + srr}$$

$$x \infty \sqrt{\frac{saann}{2eaa + srr}}.$$

Jam quæratur quam celeritatem habeat E cum pervenit in D, punctum medium quadrantis EF. ut videamus an hæc celeritas sit ad præcedentem x sicut PV applicata in quadrante CST ad radium CT vel CS. Sic enim esse debebat ut librationes fierent exactè isochronæ. Sunt enim celeritates acquisitæ in arcu EF sicut celeritates puncti contactus per lineam SC. Ideoque esse debent ut applicata PV ad CT, quod demonstratur ex motu in cycloide [1]).

Sit celeritas ponderis E in D ∞ y [Fig. 91].

a —— r —— y / $\frac{ry}{a}$ celeritas horizontalis ponderis S cum pervenit in A. quæ æqualis celeritati quam tunc habet punctum G.

Parabolæ LA latus rectum est ∞ 2KC sive $2r$. CS est ∞ CH sive q. Et CP ∞ $\frac{1}{2}q$.

---

[1]) Comparez la note 1 de la p. 501 qui précède. On voit ici que Huygens n'admet pas d'autre mouvement oscillatoire isochrone (c.a.d. à période indépendante de l'amplitude) que la vibration harmonique.

$$\begin{array}{cccc} & AM & AM \quad ML & \\ \text{l.rect. } 2r & \frac{1}{2}q & \frac{1}{2}q \Big/ \frac{\frac{1}{4}qq}{2r} & \infty\ \frac{1}{8}\frac{qq}{r}\text{ML} \end{array}$$

$$\frac{\frac{1}{8}\frac{qq}{r}\text{ML}}{\frac{1}{4}\frac{qq}{r}\text{MN}} \quad 2$$

$$\frac{1}{4}qq \quad \text{qu. AM}$$

$$\frac{1}{16}\frac{q^4}{rr} \quad \text{qu. MN}$$

$$\frac{1}{4}qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr} \quad \text{qu. AN}$$

$$\begin{array}{ccc} MA & AN & \\ \frac{1}{2}q & \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr}} & \frac{ry}{a} \Big/ \frac{ry\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{16}\frac{q^4}{rr}}}{\frac{1}{2}aq} \end{array}$$

celeritas absoluta ponderis S cum venit in A. nempe secundum tangentis directionem AN.

$$nn \quad yy \quad \frac{qq}{2r} \Big/ \frac{q^2yy}{2rnn} \Bigg\} \text{m.}$$
$$2e$$

altitudo quo perveniret pondus E vel O post emensum arcum ED.

$$\frac{2eq^2yy}{2rnn} \text{ productum.}$$

$$nn \quad \frac{\frac{1}{4}rryyqq + \frac{1}{16}\frac{rryyq^4}{rr}}{\frac{1}{4}aaqq} \quad \frac{q^2}{2r} \Big/ \frac{srryyqq + \frac{1}{4}syyq^4}{2rnnaa}$$ [2]

[2]) Hauteur à laquelle peut s'élever le poids S avec la „celeritas absoluta cum venit in A".

ſumma productorum

$$\frac{srryyqq + \frac{1}{4}syyq^4}{2rnnaa} + \frac{2eq^2yy}{2rnn} \infty \frac{3}{4}\frac{q^2s}{2r}$$

productum ex s in altitudinem deſcenſus ſui liberi ex CM [1]).

$$\frac{srryy + \frac{1}{4}syyq^2}{nnaa} + \frac{2eyy}{nn} \infty \frac{3}{4}s$$

$$srryy + \frac{1}{4}sq^2yy + 2aaeyy \infty \frac{3}{4}saann$$

$$yy \infty \frac{\frac{3}{4}aanns}{rrs + \frac{1}{4}qqs + 2aae}$$

$$y \infty \sqrt{\frac{\frac{3}{4}aanns}{rrs + \frac{1}{4}qqs + 2aae}}$$

$$xx : yy = \frac{1}{2aae + srr} : \frac{\frac{3}{4}}{2aae + srr + \frac{1}{4}qqs}$$

$$= 2aae + srr + \frac{1}{4}qqs : \frac{3}{4}2aae + \frac{3}{4}srr$$

$$xx : yy = 8aae + 4srr + qqs : 6aae + 3srr$$

$$= 4 : 3 - \frac{3qqs}{8aae + 4srr + qqs}.$$

Facile apparet futurum exacte xx ad yy ut 4 ad 3, ſi tantum motum horizontalem ponderis in A conſideraſſem ac tunc idcirco librationes iſochronas collectum iri absque vel minimo diſcrimine [2]).

Sit $r \infty 7$, $q \infty 11$, $a \infty 52\frac{1}{2}$, $s \infty 4$ pond. $2e \infty 4$ pond... 1452 $3qqs$, 784 $4rrs$, 44100 $8aae$

$$xx : yy = 4 : 3 - \frac{1}{31}$$

$$x : y = 2 : 1{,}723$$

debebat eſſe $x : y = 2 : 1{,}732$ hoc eſt ut $2 : \sqrt{3}$.

Eſt igitur minimus quidam defectus, ut nempe rectæ repræſentantes celeritates ponderis venientis ab E, in punctis D et F, non ſint exactè ut applicata PV ad CT, uti debebant eſſe, ſed ut linea deficiens circiter $\frac{9}{2000}$ ſive $\frac{1}{191}$ [3]) ſui parte à PV eſt ad CT. Quod cum ſit tam exiguum diſcrimen in tantis arcubus, ſatis apparet nullius momenti eſſe in hiſce librationibus [4]); ut magis ab aeris occurſu fortaſſe metuendum ſit.

---

[1]) $CM = CL - ML = \frac{q^2}{2r} - \frac{q^2}{8r} = \frac{3}{4}\frac{q^2}{2r}$.

[2]) Dans le cas d'une vibration harmonique le carré de la plus grande vitesse est en effet au carré de la vitesse du mobile au moment où l'écart a atteint la moitié de sa valeur maxima, comme 4 est à 3. Si Huygens n'avait considéré que le mouvement horizontal du poids S au point A, c.à.d. la vitesse $\frac{ry}{a}$, la hauteur à laquelle le poids S eût pu s'élever avec cette vitesse aurait été $\frac{rq^2y^2}{2a^2n^2}$, et l'équation contenant la „ſumma productorum" aurait été $\frac{srq^2y^2}{2a^2n^2} + \frac{eq^2y^2}{rn^2} = \frac{3sq^2}{8r}$, d'où $y^2 = \frac{3sa^2n^2}{4sr^2 + 8ea^2} = \frac{3}{4}x^2$.

Quantillo autem hinc inæquales fiant nondum liquet, et difficile eſſet inquirere, nec operæ pretium.

Pag. præcedenti habebamus $xx \top yy = 4 \top 3 - \frac{3qqs}{8aae + 4rrs + qqs}$. Ergo, ſi velim s eſſe ∞ $2e$[5]), ut ſimul inquiram in libram QCQ pag. 99 [Fig. 88 de la p. 579],

$$xx \top yy = 4 \top 3 - \frac{3qq}{4aa + 4rr + qq}.$$

Si examinaſſem an pondus E, ab D perveniens in F, in pendulo hoc compoſito acquirat celeritatem quæ ſit ad celeritatem quam habuit tranſiens in Ξ, (poſita KΞ media inter KD, KF) ſicut in quadrante MAΩ habet[6]) MΩ ad applicatam ΔΛ, pauca tantum mutanda fuiſſent. Poſitis enim x et y pro celeritatibus poſt DF et ΞF. Erit celeritas ponderis S poſt peractam AL ∞ $\frac{rx}{a}$. quia celeritates in arcu DF incedunt proportionaliter ut in arcu GC vel etiam in recta PC, in M vero ſit eadem celeritas quæ in L. tantum pro q ſcribendum $\frac{1}{2}q$, quia XZ ∞ $\frac{1}{2}$ AM.

Ita tandem fiet $xx \top yy = 4 \top 3 - \frac{\frac{3}{4}qq}{4aa + 4rr + \frac{1}{4}qq}$ hoc eſt $x \top y = 2 \top \sqrt{3 - \frac{\frac{3}{4}qq}{4aa + 4rr + \frac{1}{4}q^2}}$.

Cum debuerit eſſe x ad y ut ΩM ad ΛΔ, hoc eſt ut 2 ad $\sqrt{3}$.

Ita proxime quadruplo minor jam erit differentiola in defectu quadrati yy.

Hæ differentiolæ eo quoque minores erunt quanto brachia a longiora fient ceteris manentibus. Sunt autem tale quid errores qui hinc naſci poſſunt, quale in pendulis, quod appenſum pondus non eſt redactum ad punctum, ſicut requireretur ut cycloides recurſus perfecte iſochronos efficiant[7]).

Quatenus pondus movens pendet ad perpendiculum, et premit æquali gravitate, eatenus librationes ſunt iſochronæ. Sed minimum quid deeſt ne perfecte pendeat ad perpendiculum, neve eadem gravitate premat. quod tamen nullius momenti videtur; eoque minoris erit quo librationes lentiores faciemus, et minores. Si fuerint 2″ ſecundorum, deflectet filum ponderis moventis à perpendiculo quantum faceret pendulum

3) C.à.d. $\frac{9}{1723}$.

4) L'amplitude des oscillations des grands balanciers verticaux, projetés ou construits, était faible.

5) Comme dans le calcul numérique qui précède.

6) Ou plutôt „se habet".

7) Comparez le deuxième alinéa de la p. 518.

12 pedum [1]) cujus pondus imum eadem latitudine moveretur qua pondus movens. Eadem vero tempora ſignat libra cujus pondera moventia ſunt in extremis brachijs.

Quæritur quam celeritatem habeat pondus E [Fig. 91], cum ex D venit in F, ſimulque O tantundem per ſimilem arcum aſcendit.

Cum pondus E eſt in D, eſt pondus S in A, ita ut AP cadat in mediam CS. Sit AM perpendicularis in CL. Jam cum ſit poſita n celeritas quam habet pondus S cadens celeritate naturali per CL, erit $\frac{1}{2}n$ celeritas ponderis S, cadentis naturaliter per ML.

Eſt autem ML ∞ $\frac{1}{4}$ CL, hoc eſt $\frac{1}{8}\frac{qq}{r}$. Sit z celeritas ponderis E cum venit ex D in F.

$$\tfrac{1}{4}nn \text{ —— } zz \text{ —— } \tfrac{1}{8}\frac{qq}{r} \Big/ \frac{\frac{1}{2}zzqq}{rnn}$$

altitudo quo pervenire poterit pondus E vel O cum ad horizontalem FK pervenerint.

$$\frac{2e}{\dfrac{ezzqq}{rnn}}$$

productum ex $2e$ in iſtam altitudinem.

$$\begin{matrix}\text{KF} & & \text{KC} \\ a & \text{——} & z & \text{——} & z\Big/\dfrac{rz}{a}\end{matrix}$$

celeritas ponderis S cum erit delatum in L ex A [2]).

qu. celer. p. S in L

$$\tfrac{1}{4}nn \text{ —— } \frac{rrzz}{aa} \text{ —— } \tfrac{1}{8}\frac{qq}{r} \Big/ \frac{\frac{1}{2}rzzqq}{nnaa}$$

altitudo ad quam pervenire poterit pondus S in L delatum ex A.

m. s

$$\frac{\frac{1}{2}srzzqq}{nnaa}$$

productum ejus altitudinis in pondus S.

summa productorum

$$\frac{ezzqq}{rnn} + \frac{\frac{1}{2}srzzqq}{nnaa} \infty \tfrac{1}{8}\frac{qqs}{r}$$

productum altitudinis ML quo aſcendere poterit pondus S in ipſum s.

$$\frac{ezz}{nn} + \frac{\frac{1}{2}srrzz}{nnaa} \infty \tfrac{1}{8}s$$

$$aaezz + \tfrac{1}{2}srrzz \infty \tfrac{1}{8}nnaas$$

$$zz \infty \frac{\frac{1}{8}nnaas}{aae + \frac{1}{2}srr} \text{ vel } \frac{saann}{8aae + 4srr}$$

itaque apparet eſſe $zz \infty \frac{1}{4}xx$ invento pag. 103 [p. 584] et $z \infty \frac{1}{2}x$.

[1]) Comparez la note 5 de la p. 509 qui précède.

[2]) Le fil étant toujours supposé vertical (note 6 de la p. 563).

Sit porro celeritas ponderis E cum ex D venit in Ξ, medium arcus DF, atque item ponderis O per fimilem arcum elati. Sit inquam ifta celeritas ∞ u.

a —— r —— u $\big/ \frac{ru}{a}$ celeritas horizontalis ponderis S cum pervenit in X ex A, quæ æqualis nempe celeritati puncti Π verfus C.

XZ XY

$\frac{1}{4}q$ —— $\frac{1}{4}\sqrt{qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr}}$ —— $\frac{ru}{a}$ $\big/ \frac{ru}{aq}\sqrt{qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr}}$ celeritas abfoluta ponderis S cum venit in X, nempe in directione tangentis XY.

$\frac{1}{16}\frac{qq}{r}$ ∞ ZY, nam MN erat ∞ $\frac{1}{4}\frac{qq}{r}$ pag. 102 [p. 585].

$$\frac{1}{16}\,qq \quad \text{qu. XZ}$$
$$\frac{1}{256}\,\frac{q^4}{rr} \quad \text{qu. ZY}$$
$$\overline{\frac{1}{16}\,qq + \frac{1}{256}\,\frac{q^4}{rr}\ \text{qu. XY}}$$ [3]).

quad.a celeritatum

nn —— $\frac{rru + \frac{1}{16}uuqq}{aa}$ —— $\frac{qq}{rr}$ $\big/ \frac{qqrruu + \frac{1}{16}uuq^4}{2raann}$ altitudo ad quam afcendere poterit pondus S celeritate acquifita in X.

$$\frac{s}{\overline{\frac{sqqrruu + \frac{1}{16}suuq^4}{2raann}}}$$

nn —— uu —— $\frac{qq}{rr}$ $\big/ \frac{uuqq}{2rnn}$ altitudo quo poteft afcendere pondus E cum venit in Ξ.

productum ex s in altitudinem afcenfus liberi ponderis S ex cafu libero per MZ. $\frac{\frac{3}{16}qqs}{2r} \infty \frac{euuqq}{rnn} + \frac{sqqrruu + \frac{1}{16}suuq^4}{2raann}$ fumma productorum

$$\frac{3}{16}saann \infty 2euuaa + srruu + \frac{1}{16}suuqq$$

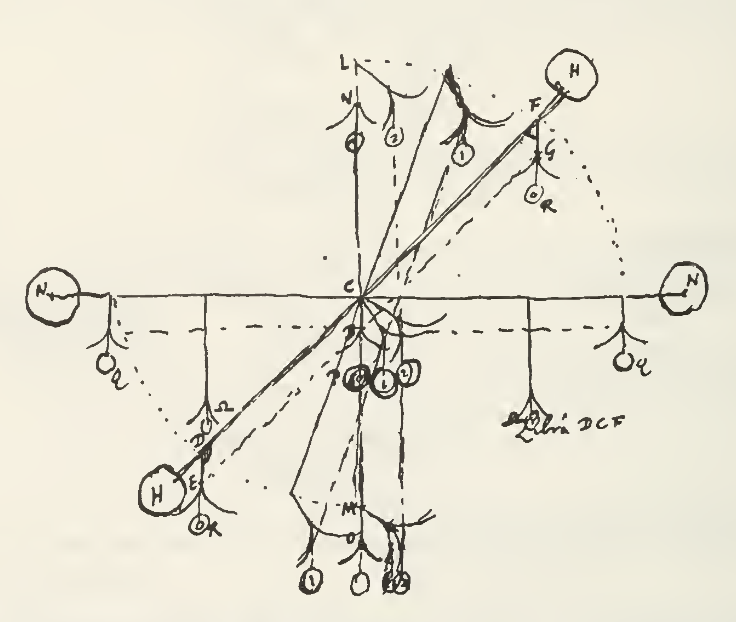
$$\frac{\frac{3}{16}saann}{2eaa + srr + \frac{1}{16}sqq} \infty uu$$ quod igitur tantillo majus quam $\frac{1}{4}yy$ pag. 103 [p. 586]. propter $\frac{1}{16}sqq$, quod debuerat effe $\frac{1}{4}sqq$. hinc diverfitas eft ex eo quod et motum ponderis S deorfum confidero [4]).

[3]) Huygens écrit par erreur: AY.

[4]) Comparez la note 2 de la p. 586.

Quod si esset sicut $zz \infty \frac{1}{4}xx$ ita $uu \infty \frac{1}{4}yy$; adeoque ut $z \infty \frac{1}{2}x$ ita $u \infty \frac{1}{2}y$: appareret esse ponderis E ad F euntis celeritatem in medio D, ad celeritatem ejusdem in F, sicut celeritas ipsius in medio Ξ, cum venit ex D, ad celeritatem quam tunc habebit in F. Et tunc essent in totis arcubus EF, DF, seorsim peractis, celeritates ubique ut ipsa spatia percurrenda, nempe in ratione dupla, eoque librationum tempora fierent æqualia. at nunc propter celeritatem u tantillo majorem quam oportebat, fient tempora minorum librationum tantillo breviora. Vel majorum librationum tempora tantillo longiora, sed illud insensibile erit puto: alias pauxillo majori circulo describendæ helicoides æquantes quam sit distantia ipsarum originis a diametro libræ horizontali.

[Fig. 92.]



Librâ DCF [Fig. 92] ponderibus H H oneratâ et undique equi[li]brium servante, si porro pondera æqualia R R ei appendantur inter helicoides nostras affixa, quarum radij genitores FG, DE ad horizontem perpendiculares sint, et brachijs CF CD æqualibus firmiter affixi atque angulis immutabilibus. Erit libræ quies hoc situ DF. Et ab hoc utrinque excurret reciprocationibus isochronis: quæque eorundem erunt temporum ac libræ NCN, ponderibus Q Q appensis inter helicoides prioribus pares quarum radij genitores perpendiculares brachijs, atque æque a centro C remotis. Vel etiam æqualium temporum ac libræ NCN cum appenso solo pondere P duobus Q æquivalente.

Ratio patet ex eo quod quavis æquali inclinatione harum trium librarum, centrum gravitatis ponderum binorum R R vel Q Q vel solius P, idem invenitur necessario, ut facile perspicitur; unde etiam eadem vi agit ad movenda pondera H H, vel N N.

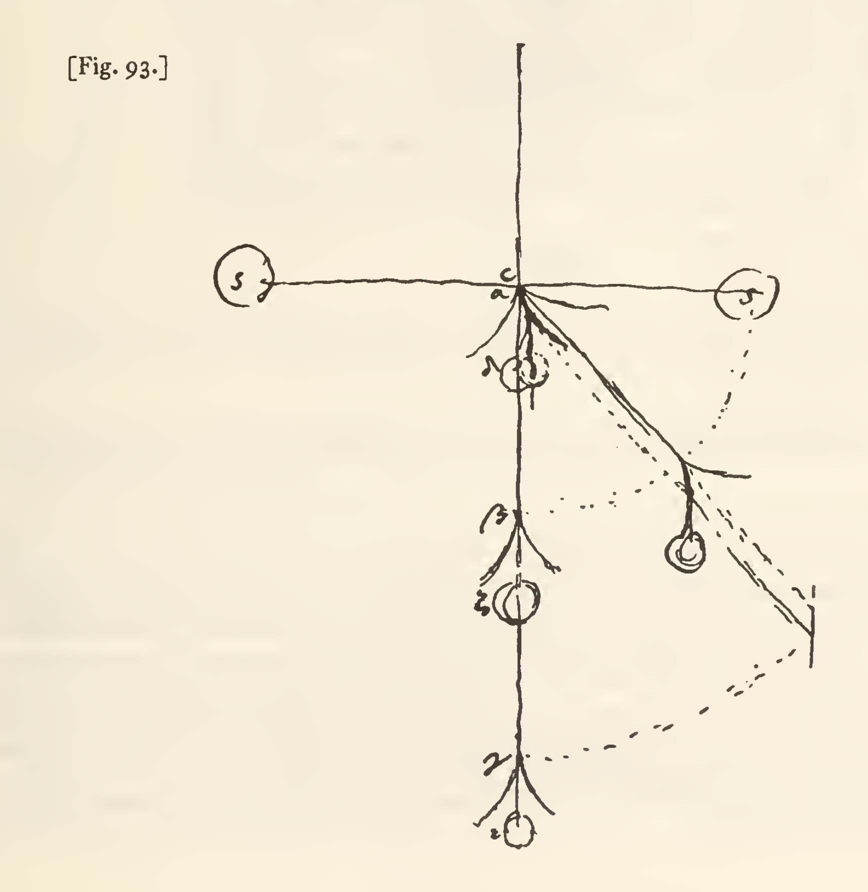
Quod ſi igitur ſumantur in perpendiculari LCO, CL, CM æquales CF, CD, et radij genitores helicoidum ponantur LV, MO, et ab originibus V, O, ipſæ helicoides lamellæ deſcendant interque eas pondera appendantur æqualia R, R, vel Q Q, his agitabitur quoque æqualiter libra gravata ponderibus N N.

Sed optime adhibentur pondera ſuſpenſa ut in Q Q vel Ω Ω, quia minus periculum eſt ne titubent motu laterali.

Solum vero pondus duplum P minus etiam obnoxium erit motui laterali. Sed in libra pag. 99 [Fig. 88 de la p. 579] ſola pondera Q Q adhibui, rejectis N N et P; quod libra ſic minus gravetur; minusque facile ad latiores vel anguſtiores reciprocationes redigatur, ex inæquali preſſu horologij. Nihil enim gravitatis aſcendit cum latius moventur pondera N N.

Ex ijs quæ hic oſtenſa ſunt apparet etiam pondera δ, ε [Fig. 93], ſuſpenſa inter helicoides in α, γ, quarum radij genitores æquales $\frac{1}{2}$ Cγ, eodem modo agitatura libram SCS ponderibus SS gravatam, ac ſolum pondus ζ, binis δ, ε æquale et inter ſimiles helicoides ex β ſuſpenſum, quarum radius genitor $\alpha\beta \infty \frac{1}{2}\alpha\beta$ [liſez: $\alpha\gamma$ ou Cγ]. Puncta α et C conveniunt. Sed hoc inutile ob nimiam agitationem ponderis ε.

[Fig. 93.]

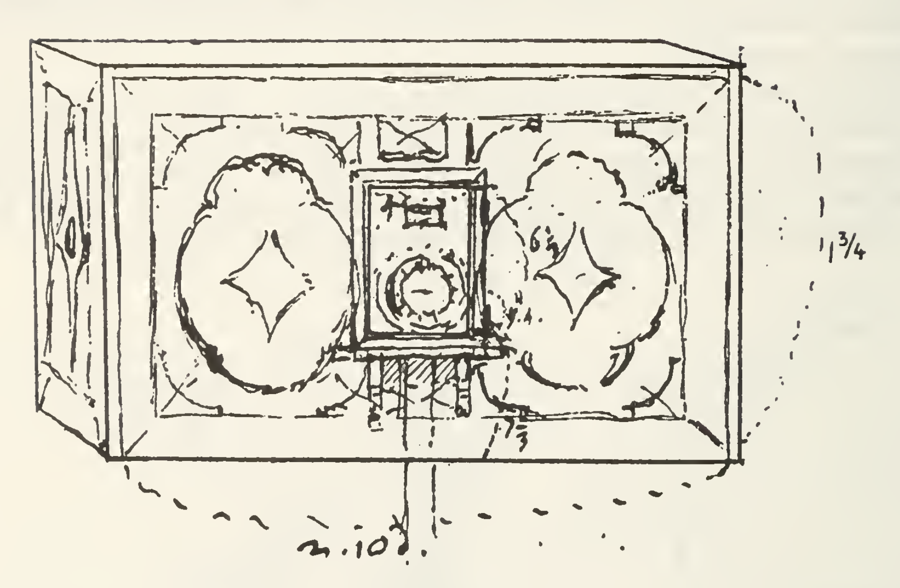


VIII.

LA DERNIÈRE HORLOGE MARINE DE 1694 [1]).



[Fig. 94.]



De kas [Fig. 94] hoogh $1\frac{3}{4}$ voet, breedt 2 voet 10 duijm, diep 6 duijm (van binnen).

Elcke bol $22\frac{1}{2}$ onc. Het conusje [?] 15 onc. Het langwerp. [?] 1 pond $\frac{19}{32}$ onc.

---

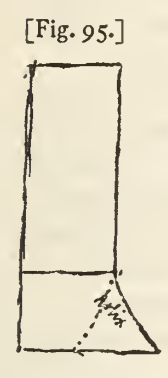
[1]) La Pièce est empruntée aux p. 108—111 et 124 du Manuscrit I. L'horloge était apparemment pourvue d'un balancier tel que celui décrit dans la Pièce VII, comme l'indiquent aussi les Fig. 95—98 qui suivent. Voir la fin de la note 3 de la p. 573 qui précède. Le 29 mai 1694 (T. X, p. 609) Huygens écrit à Leibniz qu'il a fait „executer et mettre en perfection" sa nouvelle invention, et le 16 juin suivant à de l'Hospital (T. X, p. 626) qu'il a „fait construire l'horloge, qui succede tres bien" et qu'il prétend „pouvoir porter sur mer". Le 1 octobre 1694 il n'avait pas encore proposé „ce nouveau moien de trouver les Longitudes a Mr les Directeurs de la Compagnie des Indes" et il ne l'a certainement pas fait dans les quelques mois qui lui restaient encore à vivre.

$22\frac{1}{2}$ Met 71 onc. het tegenwight afgetrocken, ginck wat raſſer als 't pendulum.
$22\frac{1}{2}$ Vrijdag 16 April 's avondts ten $8^{u}.35'.0''$ gelijck geſet.

15	17 —	's morgens ten	8.45.0	balans 18″ voor 18		
$16\frac{1}{2}$	eod. —	's av.	8.42.0	—	33″ voor	15
$76\frac{1}{2}$ } s	18 —	m.	8.30.0	—	52 —	19
$5\frac{1}{2}$	eod. —	a.	8.30.0	—	71 —	21
71	19 —	m.	8.44.0	—	90 —	19

$16\frac{1}{2}$ Met $54\frac{1}{2}$ onc. ging wat langſaemer als het pendulum. Ergo is de correctie
$54\frac{1}{2}$ door de boxhoorns in de balans wat te groot, doch volgens de demonſtratie ſoo moeſt die eerder noch te kleijn vallen. Soo is dit de reſiſtentie van de lucht, of eenighe fout in de balans, te imputeeren. of de boxhoorns onrechte figuer.

[Fig. 95.]



De boxhoorns hebbe bevonden niet wel geboghen te ſijn door den Horlogiemaecker, van der Cloeſen. Heb die netter geſtelt nae een plaetje van deſe figuer [Fig. 95], daer ick de helix ſelver op getrocken had, en afgevijlt. Sedert heeft de Balans, en het Pendulum van 3 voet ſeer gelijck gegaen. Soo dat van den 19^{e} April s'avonts ten 8 uren tot den 20^{en} s'achtermiddaghs te 2 uren, de ſlagen van beyde altijdt gelyck bleven. Ten 2 ur. 15′, was het pendulum ontrent $\frac{1}{4}$ van een ſeconde gevordert ſedert s'avonts te voren. Gingh met 72 onc. dat is $4\frac{1}{2}$ pond. en $5\frac{1}{2}$ onc. tegenwight.

Maendag 19 April 's avonds ten $6^{ur}.0'0''$ gelijck geſet.

20 —	's morg.	9. 0.0	balans 2″ voor. of niets want op 2″ ſeconden kan men op de wijſer van 't pendulum niet vaſt gaen.
eod. —	a.	9.20.0	balans 1″ voor.
21 —	m.	$10^{ur}.18'$.	balans 0″ voor. dat is beyde weer gelyk.

Een pond gewicht bij gedaen. De Balans wierd een weijnigh langſaemer.

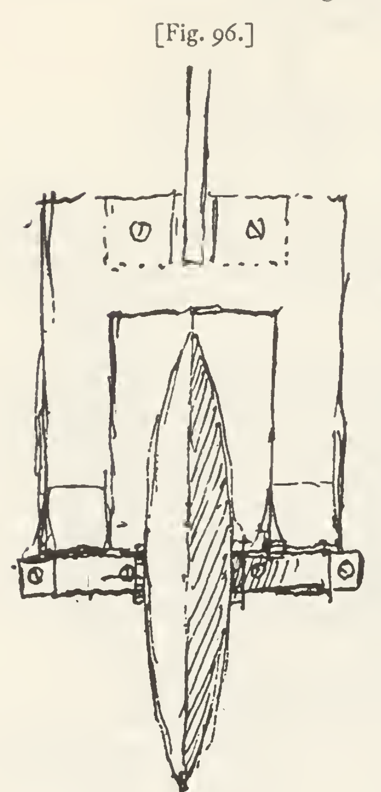
Boxhoorns overſien &c.

Den 21. a. 5.48′. nae dat de boxhoorns overſien en de bollen weer aengehangen had, vond dat de Balans ietwes langſaemer gingh als te voren. Dit komt daer van ſonder twijffel, dat de ſteelen van de boxhoorns ietwes verbogen ſijn door het verbuijgen vande boxhoorns.

21	a.	5.48′	gelijck geſet, na dat de ſchuyflooden verſet had.
April 22	m.	10.26′	Balans 9″ voor. of 8″.
—	a.	5.48′	Balans 12 voor in 24 uren. De Balans gingh van ſelfs wat ruijmer. het weder wat warmer.
April 22	a.	7. 0′	gelijck geſet en 1 pondt gewight bijgedaen.
23	m.	9. 0	Balans 6″ voor.

— a. 7. 0 Balans 7″ voor. moſt 12″ geweeſt ſijn. Ergo niet genoegh gecorrigeert door de boxhoorns.

[Fig. 96.]



Men ſoude aen ieder arm maer een loodt kunnen hangen, als hier nevens [Fig. 96], maer ſoude miſſchien al ſoo veel lucht vatten, als met de 2 looden aen ieder arm. en ſouden vier boxhoorns te maecken ſijn in plaets van 2.

maer ſoude minder ſlingeren konnen.

Soude minder waggelen, maer dit is niet te vreſen.

Sat. 24 Apr. 2^{ur}.10′. gelyck geſet. 't horologie beter vaſt geſet. de boxhoorns verboghen.

25 — 2. 0 Balans $2\frac{1}{2}$″ achter. Een pond gewight bij gedaen. Bevond dat de Balans 1″ in een uur won. Ergo al te veel gecorrigeert door de boxhoorns. Deſelve weer nae een nieuwe helix verboghen.

25 6.10 gelijck geſet. met ordinaris gewicht.

56 11.30 Balans 10″ achter in 17^{ure}. 20′. Een pond gewight bij gedaen. ten 11 ur. 40′. Vond dat de Balans in een uur meer als 2″ verloor. daer te vooren geen 1″ verloor. Ergo te weijnigh gecorrigeert door de boxhoorns. Ick hadde wat toe gegeven in 't open ſetten der ſelve.

Geloof dat wel ſoude ſijn in dien men ſe de rechte figuer van de helix conde geven. Doch het is niet licht die juijſt te treffen. Men ſoude met een ſchroefje de ſelve genoegſaem op haer rechte wijdte konnen brengen aldus

27 m. 10. 4 Balans 64″ achter. dat is bijna $2\frac{1}{2}$″ in een ure.

27 m. 10.34 gelijck geſet. een pond gewight bij 't Pendulum gedaen om te ſien of het die proef kan uytſtaen.

28 m. 9. 0 Balans 68″ achter in 22^{u}.26′. dat is ſeer nae $2\frac{1}{2}$″ in een ure. Soo dat het Pendulum die proef wel uytſtaet.

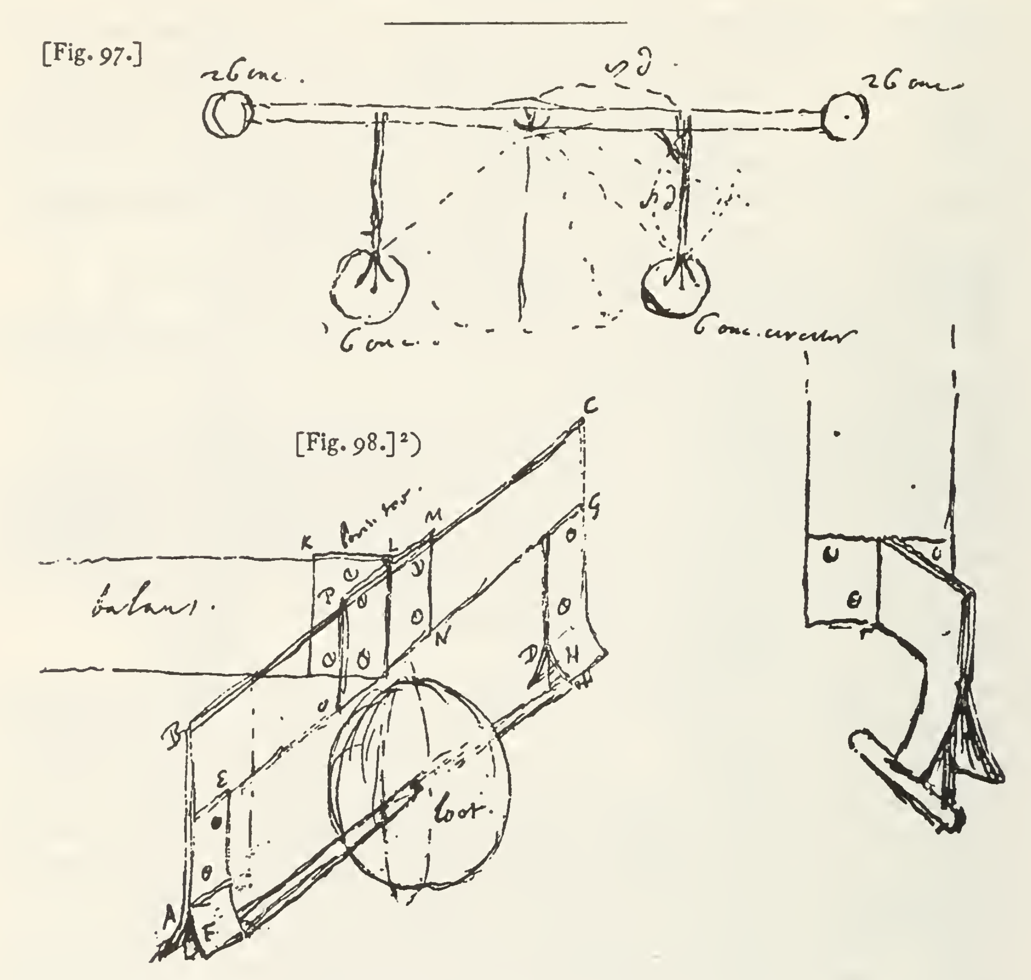
28 m. 11.14′ Gelijck geſet, nae dat de boxhoorns op 't netſte verboghen hadde, ſoo ieder apart als te ſaemen met het modelletie.



29 m.		11.20′	Balans 13″ achter in 24 uren. Bijgedaen 1 pond gewight. won 1″ in een uer. Ergo te veel gecorrigeert.
30 April		9.37′	gelijck geset, nae dat de boxhoorns ietwes geopent had, nae de passer en 't modelletie. en met het pond gewight bij gedaen, en sonder 't selve seer nae gelijcke gangh bevonden hebbende door de slaghen.
1 Maj.		10.15′	Balans 13″ voor. (onder aen de minutwijser van 't pend.). Een pond gewight bij gedaen bij dat van de Balans.
2 —		10.45	Balans 31 voor. Most 26″ wesen. Ergo noch te veel gecorrigeert.
4 —	m.	12. 0	gelijck geset. nae 't verbuygen van de helices.
5 —	m.	9.45	Balans 7″ achter. een pond gewight daer bij gedaen.
7 —	a.	9.30	Balans 8″ achter. corrigeert noch wat te veel.
8 —	m.	11.24′	Gelijck geset, nae dat de boxhoorns wat met de vijl geholpen had sonder verbuijgen.
9 —	m.	11. 4	Balans 17″ voor. daer een pond bij gehangen.
10 —	m.	12.24	Balans 37″ voor. soude noch iets te veel corrigeren.
10 —	m.	12.34	Gelijck geset; nae dat het wiggelen aen het rechter loodt verbetert had.
11 —	m.	9. 5	Balans 9″ voor. het pondt gewight af gehangen. Het wiggelen doet raffer gaen. daerom enckele draeden beter als de lintjes. en men moet van eersten aen het wiggelen beletten. 't welck door 't trecken aen de lintjes kan geschieden.
12 —	m.	9. 5	Balans 21″ voor.
Maj. 12 —	a.	9u.15′	29½″ balans voor. 3″ te veel. komt misschien de fout vant' Pendulum.
13	m.	10. 0	40″ balans voor. most wesen ontrent 35″. ergo 5″ te veel. de balans afgelicht, en gesien dat eenigh blinckende stof van de scherpe as daerse op draeght afgeveeght wier. het had nu 2 daghen vochtigh weer geweest met regen. den as moet min scherp gemaeckt werden en niet gepolijst noch oock de circel hollen, op dat rolle en niet en schure. de hollen vlacker. Met het microscopium gesien dat de 2 blinckende plaetsjes in de hollen daer de messen van den as op rusten eenighsins rosachtich van couleur waeren, 't welck teycken is van roest. Daerom de hollen met een weijnigh olie gestreecken.
14	m.	1u.8′	0″ gelijck geset.
15	m.	1.30	8″ Balans achter, een weynigh min. 1 pond bij gedaen.
16	m.	1.18	16″ Balans achter. is wel. meer olie aen de as van de balans gedaen.
17	m.	1. 8	25″ Balans achter.
18	m.	2. 5	32″ Balans achter.
19	m.	12. 0	40″ Balans achter. Met vander Cloesen de staele hollen in de messen vanden as door 't microscopium besien. vondt alleen 2 blinckende plaetsies in de hollen, maer geen slijtingh of swarte vuijlichheydt. De messen en was geen verandering aen te sien.

19	m.	12.17	0″ gelijck gefet.
20	m.	12.10	7″ Balans achter.
21	m.	12. 0	12″ Balans achter.

[Fig. 97.]



[Fig. 98.][2])

Dubbele draet [Fig. 97][1]). Haeckje aen den as van 't loodt. 't Waer beter dat beijde de boxhoorns aen malkander waeren.

ABCD [Fig. 98] een ftuck. EF, GH aengefchroefde ftucken. BC is veel te langh. KLMNOP een ftuck boven toe in KL, en aen de balans gefchroeft.

Het ftuckje boven op 't midden van de balans moet blijven, om dat het het centrum gravitatis van de balans, behalven de bollen, effen brenght op 't fcherp vande meffen der as.

[1]) On lit dans la Fig. 97: „26 onc. 8 d. 26 onc. 6 onc. 8 d. 6 onc. circiter".

[2]) On lit dans la Fig. 98: „balans. boven soo. loot".

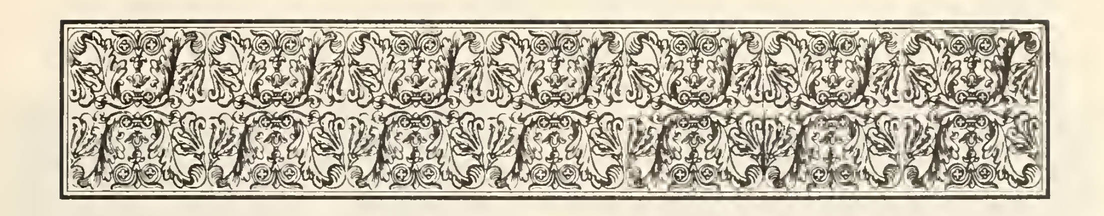
HUYGENS, ROEMER ET LEIBNIZ HORLOGERS.

I. L'échappement à ancre.

II. La forme des dents des roues: *A*. Forme épicycloïdale des dents pour les roues planes, d'après Roemer. *B*. Forme épicycloïdale des dents d'un pignon qui engrène dans une roue de champ à dents plates, et forme des dents d'une roue de champ qui engrène dans un pignon à dents plates, d'après Huygens.

III. Manière de faire qu'en montant l'horloge à ressorts elle ne discontinue pas son mouvement.

IV. Forme de la vis et de l'écrou servant à monter ou baisser le plomb du pendule.



Avertiſſement.

Le titre ſous lequel nous raſſemblons les quelques Pièces éparſes ſur l'horlogerie qui ſuivent ſert à indiquer que cet art ne peut être nettement ſéparé ni de l'aſtronomie pratique ni de la géométrie ou de la mécanique théorique. On aurait certainement tort de le juger indigne d'un philoſophe: comparez à ce ſujet les p. 32—33, ainſi que le cinquième alinéa de la p. 482.

Les noms de Roemer et de Leibniz ſe trouvent dans la Fig. 101 de la Pièce I: voir la note 1 de la p. 605.

Nous avons dit un mot ſur Roemer horloger dans la note ſur I. Thuret de la p. 505. Il eſt vrai qu'en cet endroit il ne s'agiſſait pas d'horloges; il y était queſtion de planétaires mus à la main. Mais les planétaires ſont plus anciens que les horloges à roues dentées: le fameux planétaire géocentrique d'Archimède a ſans doute exiſté et l'horloge à roues dentées provient peut-être du planétaire (voir cependant la note 3 de la p. 37 du T. XVII); en effet, toute horloge n'eſt-elle pas, vu la périodicité de ſon mouvement, une image de l'univers? ne peut-on pas dire que l'aiguille des heures et celle des minutes, telles que nous les voyons dans l'horloge de Coſter (T. XVII, p. 14, Fig. 1) et dans celles qui nous ſont familières, repréſentent le ſoleil et la lune parcourant les douze ſignes du zodiaque?

Aucune comparaiſon n'eſt plus familière aux philoſophes du dix-huitième ſiècle que celle, bien groſſière évidemment, du monde avec une horloge. Dans les Remarques ſur l'ouvrage de Sully de 1717, citées dans la note 2 de la p. 502 qui précède, Leib-

niz appelle le poids ou le reſſort moteur de l'horloge ſon „premier Mobile" [1]): c'eſt le πρῶτον κινοῦν, plutôt que le πρῶτον κινούμενον, d'Ariſtote [2]).

Comme Huygens, Roemer (1655—1710) s'intéreſſait ſurtout aux horloges en ſa qualité d'aſtronome. Il fit uſage toute ſa vie des horloges à pendule de Huygens. Nous reproduiſons ici [Fig. 99 et 100] une partie des Tables I et II de 1704 [3]) de la „Baſis Aſtronomiæ" de 1735 de P. Horrebow, diſciple de Roemer [4]). Dans ſon Ch. III („De horologiis obſervatoriis") Horrebow écrit (p. 24), après avoir cité Tycho Brahé ſur la néceſſiité d'obſervations fort exactes: „Indicat his verbis Brahæus, ſeſe non unum in finem adeo prolixe de hoc negotio agere; ego vero verba ipſius eum tantum in finem profero, ut gaudeant hujus ætatis homines, dudum iſtas difficultates per Chriſtianum Hugenium, qui ad horologia perpendiculum feliciter applicuit, ſublatas eſſe, qui proinde horologia ad eam, quam aſſequi ſuo tempore non potuit Tycho, motûs æquabilitatem perduxit: ut vere dici queat, Divino huic horologiorum Hugenianorum invento, cœleſtium motuum æmulo, omnem Roemerianoram [5]) rectaſcenſionum fidem & certitudinem inniti. Proindeque nobis ſemper Author erat, ſuasorque, ut omni ope iſta horologia, tanquam potiſſimam obſervatorii partem, menſurarumque animam, conſervaremus, & caute tractaremus" . . . „forte non opus eſt monere, non alia in obſervatorium Aſtronomicum admittenda eſſe horologia, quam Hugeniana, quorum perpendiculum tripedale ſingulis oſcillationibus minuta ſecunda temporis indicet, atque ultra perpendiculum horizontis ſex, ſeptem vel octo pollices excurrat" [6]).

---

[1]) „Les longues Pendules à Secondes font des vibrations assez egales, par la raison, qu'un petit arc de Cercle d'un si grand Rayon ne sçauroit guères être distingué sensiblement d'un Arc de Cycloïde. Cependant il faut avouer, que le premier Mobile et le Rouage ont encore quelque influence sur les Tems de la Pendule... la Pendule est un peu avancée par une grande augmentation de la force du premier Mobile".

Voir aussi sur Leibniz horloger le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 522 qui précède.

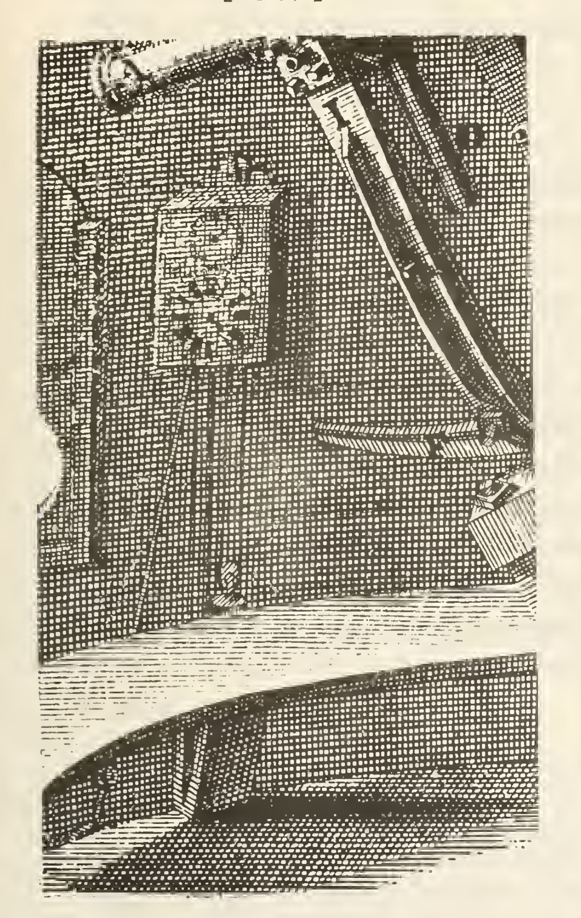
[2]) Physica (Περὶ φυσικῆς ἀκροάσεως), Lib. VII.

[3]) „L. Th. Skive delineavit. J. Friedlein sculpsit Haffniæ 1704".

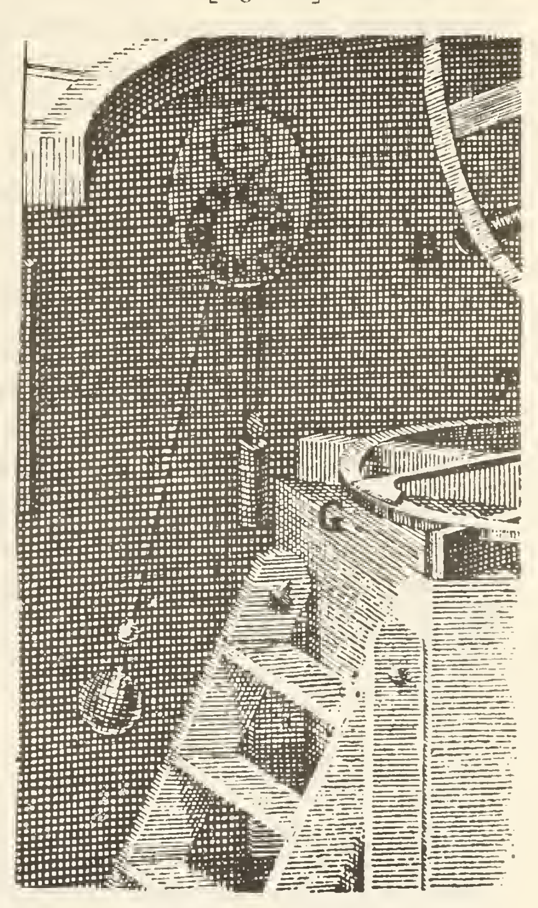
[4]) „Basis Astronomiæ, sive Astronomiæ Pars Mechanica, in qua Describuntur Observatoria, atque Instrumenta Astronomica Roemeriana Danica; simulque eorum usus, sive Methodi Observandi Roemerianæ. In usum publicum, & præsertim in gratiam unà prodeuntis valde insignis atque usûs amplissimi, nunquam non posteris memorandi Tridui Observationum Tusculanarum Roemeri, ex fundamentis exponuntur a Petro Horrebowio, Philos. & Med. Doctore, in Univ. Hauniensi Astron. Prof. ac Soc. Artium Paris. membro. Hauniæ, apud viduam beati H. Chr. Paulli, Anno MDCCXXXV.

[5]) Lisez: „Roemerianarum".

[Fig. 99.]







Ce paſſage fait voir clairement qu'à Copenhague on était bien convaincu que les horloges à pendule ſont de Huygens; comparez la note 9 de la p. 11 du T. XVII, et les p. 59—66 et 88—91 du préſent Tome [7]).

---

[6]) L'auteur ajoute: „Rotæ hujusmodi horologiorum sint orichalcicæ, tympana chalybea: sic enim minuitur attritus. Fabrica sit simplicissima, etc."
Dans l'horloge de Thuret de l'Observatoire de Leiden (voir la p. 19 qui précède) les pignons sont en acier et les roues en cuivre jaune. Il en est d'ailleurs de même dans l'horloge de S. Coster de 1657 (T. XVII, p. 14—16). Huygens ne dit pas de quel métal les pignons et les roues sont fabriqués, ni dans l'„Horologium", ni dans l'„Horologium oscillatorium".
Nous ignorons si les horloges de Roemer avaient été construites par Thuret.

[7]) Nous nous permettons de publier ici un renseignement sur les horloges publiques en Néerlande

Dans les Fig. 99 et 100 on voit le poids curfeur (p. 32, 338—347 et 429—432 qui précèdent). La verge du pendule eſt apparemment cylindrique: nous avons déjà dit à la p. 19 que la verge plate de l'horloge de Leiden (Fig. 12) nous ſemble dater de plus tard.

Obſervons en paſſant que Horrebow repréſente dans ſon ouvrage la „Turris Aſtronomica Haunienſis" de 1642 dont nous avons parlé à la p. 18 qui précède.

Roemer, pendant ſon ſéjour à Paris, ſe poſa la queſtion de ſavoir quelle doit être la forme des dents pour que deux roues ſituées dans un même plan s'engrènent le mieux poſſible, c.à.d. ſans fauts ni accotements. Le diſcours qu'il fit en 1675 à l'Académie ſur ce ſujet [1]) n'a pas été conſervé. Selon lui, les dents doivent avoir une forme épicycloïdale, comme Ph. de la Hire le dit auſſi dans ſon „Traité des épicycloïdes & de leurs uſages dans les Mécaniques" de 1695 [2]). En effet, Leibniz écrit en janvier 1698 à Jean Bernoulli [3]): „Dominus la Hirius ipſe, quod non ſatis mirari poſſum,

(nous avons parlé d'elles à la p. 66 qui précède) que nous ne possédions pas encore en rédigeant le T. XVII (p. 33—34, 79 et 545—546). Dans son ouvrage „De St. Stephenskerk te Nijmegen" (Nijmegen, H. ten Hoet, 1900) l'archiviste de cette ville H. D. J. van Schevichaven a déjà publié avant nous l'attache de la province de Gueldre du 19 octobre 1658. L'auteur y dit aussi (p. 207—208) que bientôt après plusieurs horloges de Nymègue furent transformées par Jan van Call en horloges à pendule (Jan Becker van Call, appelé aussi Jan van Batenburch, célèbre horloger d'origine allemande, devint citoyen de Nymègue en 1647; on peut encore consulter sur lui le T. I des „Penſchetſen van Nijmegen's verleden', par v. Schevichaven, Nijmegen, ten Hoet, 1898). Les résolutions du Conseil Communal du 1 décembre 1658, du 20 juillet et du 27 juillet 1659 se rapportent à ce sujet. La dernière p.e. parle de quatre horloges publiques transformées par Johan van Cal „omme die alle *cum pendulo* te doen gæn". Deux quittances du 28 juillet 1659 signées „Jan van Call" (archives communales de Nymègue) parlent en effet de „mæcken op de Wiemelpooert de Conſt des pendelums, met de reparatie desselfs ouden uurwercks, etc.". On voit qu'il est extrêmement improbable que l'horloge de la St. Eusebiuskerk d'Arnhem ait été une horloge à pendule déjà en 1652, tandis qu'il est fort possible que van Call ait transformé aussi cette horloge-là.

[1]) J. B. du Hamel „Regiæ Scient. Acad. Hiſtoria" 1701, écrit (Lib. II, Cap. III, p. 154, Ann. 1675): „D. Roëmer Tractatum à se elucubratum de Mechanicis, præſertim de rotis dentatis legit."

[2]) Voir sur ce Traité les p. 711 et 715 de notre T. X.

[3]) „Virorum celeberr. G. G. Leibnitii et Johan. Bernoullii Commercium philos. et math." I (1694—1699), Lausannæ & Genevæ, M. M. Bousquet. 1745, p. 347.

Epicycloidum usum ad figuras dentium sibi tribuere videtur in peculiari de iis dissertatione, cum tamen certum sit inventum esse Roemeri Dani; nam eram Parisiis eo tempore quo is invenit, remque non tantum ab ipso Roemero, sed & Hugenio intellexi".

La Partie *A* de la Pièce II qui suit confirme l'affirmation de Leibniz en ce qui concerne Roemer. Il n'en résulte pas que de la Hire ne puisse avoir eu, également vers 1675, la même pensée indépendamment de lui [4]). Leibniz ajoute: „Roemerum qui in Dania agit Regi æstimatus, miror sibi sua non vindicare". Toutefois les figures de Huygens ne démontrent pas que parmi les constructions proposées par Roemer il y en avait d'identiques à celles de de la Hire. Roemer s'est apparemment servi tant de l'épicycloïde ordinaire (*A*. § 2) que de l'épicycloïde raccourcie (*A*. § 1), tandis que de la Hire ne se sert que de l'épicycloïde ordinaire. L'application faite dans la Fig. 107 de l'épicycloïde ordinaire ne ressemble à aucune figure de de la Hire. Voir cependant aux p. 609—610 les trois derniers alinéas de la note 2 de la p. 607 qui suit.

Nous avons déjà dit (note 2 de la p. 400) que Huygens ne s'est occupé des épicycloïdes qu'après Roemer, qui paraît donc avoir attiré son attention sur ces lignes. Il est vrai que les ἐπίκυκλοι des astronomes grecs étaient connus à tout-le-monde (comparez la fin de la note 4). Notons que Huygens n'a cherché — ou du moins n'a accompli —, comme de la Hire, que la rectification et la quadrature de l'épicycloïde ordinaire.

---

[4]) De la Hire écrit dans la Préface de son ouvrage de 1695: „Il y a environ vingt ans que j'avois commencé à travailler à cet Ouvrage, & j'avois déterminé d'une maniere très-simple, que les dents des roues devoient avoir la figure d'une Cycloïde qui a pour base un cercle, ce que l'on appelle Epicycloïde. J'en conférai pour lors avec MM. Auzout, Picard et Mariotte: mais quelque tems après, ayant été admis dans l'Académie [ce qui eut lieu en 1678], je trouvai les quadratures des Epicycloïdes, tant de l'espace que de la ligne, à la maniere des Anciens, comme je les donne dans cet Ouvrage & je les communiquai à l'Académie. Mr. Huygens fit voir aussi celles qu'il avoit trouvées par une maniere fort différente de la mienne [fort différente en effet; voir sur le calcul de Huygens les p. 402—405 qui précèdent]; & dans le même tems Mr. l'Abbé de Vaumesle qui demeuroit en Normandie, m'envoya le résultat de ce qu'il avoit fait sur le même sujet, en me marquant que c'avoit été par la méthode de Mr. Descartes qui suppose des Poligones au-lieu de cercles [comparez les Fig. 141 de la p. 402 et 141 bis de la p. 403 qui précèdent]".

De la Hire parle aussi des „épicycloïdes intérieures" (hypocycloïdes), qu'il a donc peut-être considérées dès 1675; comparez sur les hypocycloïdes les l. 4—6 de la p. 41 qui précède, et le dernier alinéa de la note 2 de la p. 399. D'après Gino Loria „Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte" (nous citons la traduction allemande de F. Schütte, Leipzig, Teubner, 1902, § 208 à la p. 497) nous pourrions faire mention d'autres auteurs plus anciens.

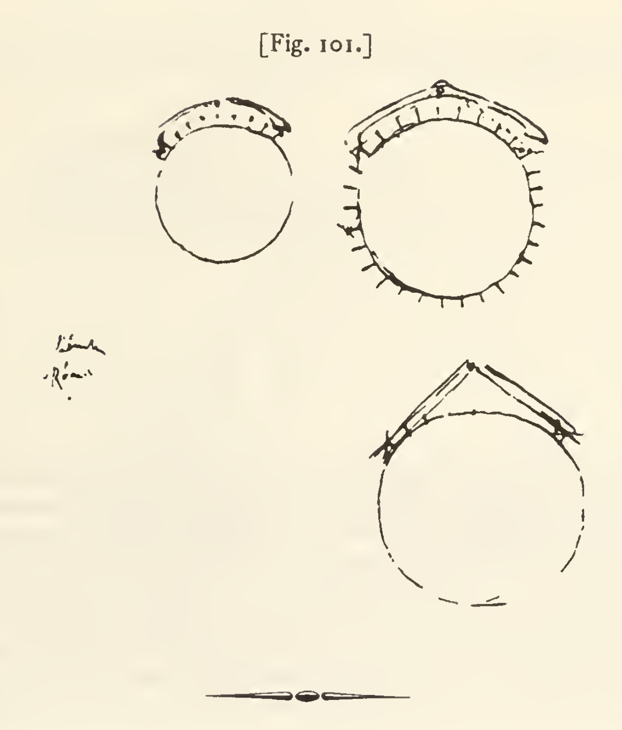
La Pièce III — nous ne disons rien de la Pièce IV qui ne donne qu'un détail de construction — est une explication par Huygens du „maintaining power" dans les horloges à ressort. La grande majorité des horloges n'étaient pas encore munies de ce dispositif (dû à un constructeur inconnu; comparez la dernière ligne de la p. 5 et les premières lignes de la p. 6 du T. XVII), comme le font voir les paroles suivantes de Leibniz dans les Remarques de ± 1715, citées aussi dans la note 1 de la p. 600: „Entre les Causes, qui changent la justesse de l'Horloge et de la Montre vulgaire, est aussi le Tems, qui se perd en les remontant, lorsqu'elles sont arrêtées pendant ce temps là, comme il arrive ordinairement; car le tems de la remonte n'est pas toujours le même: Mais des bonnes Pendules, et d'excellentes Montres ont ou peuvent avoir une construction, suivant laquelle elles continuent d'aller, pendant qu'on les remonte". Comparez le deuxième alinéa de la p. 514 qui précède, ainsi que la note 1 de la p. 64 du T. XVII.

I.

L'ECHAPPEMENT À ANCRE [1]).

1675.

[Fig. 101.]



---

[1]) La Pièce I, qui ne consiste que dans la Fig. 101, a été empruntée à la p. 35 du Manuscrit E, portant la date du 20 janvier 1675. C'est la page où il est question pour la première fois du „balancier de montre reglé par un ressort [spiral]" tel que le représentent les figures reproduites à la p. 408 du T. VII (comparez le début de la Pièce I à la p. 522 qui précède). On lit dans la Fig. 101: „Libnitz, Römer", ce qui semble indiquer que ces deux savants ont fait connaître à Huygens l'existence de l'échappement à ancre, qui était alors fort probablement une nouveauté. Il est dommage que Huygens n'ajoute aucune remarque à sa figure. À la p. 39 (note 3) du T. XVII nous avons dit que l'échappement de Galilée peut être considéré comme le précurseur de l'échappement à ancre. Nous voulions dire que l'échappement de Galilée est

un échappement libre, comme l'échappement à ancre; catégorie à laquelle appartient d'ailleurs aussi celui à détente des chronomètres. On n'a cependant aucune preuve d'une dépendance à cet égard des horlogers anglais, ou autres, de constructeurs italiens, de sorte qu'on doit dire, nous semble-t-il, avec J. Drummond Robertson („The Evolution of Clockwork", Ch. VIII „The Anchor Escapement", p. 131): „The pin-wheel escapement of Galileo was not divulged to the world, and the new invention proceeded upon wholly different lines".

Observons que Huygens et les horlogers qu'il connaissait ne se sont jamais servis ds cet échappement, dont l'usage ne s'est répandu qu'au dix-huitième siècle. Roemer et Horrebow ne s'en servaient pas: voir ce que nous disons dans l'Avertissement (p. 600) à propos des Fig. 99 et 100.

La première horloge connue possédant un échappement à ancre est, paraît-il, l'horloge d'église qui se trouve actuellement dans le Science Museum à Londres et porte l'inscription „Gulielmus Clement Londini fecit 1671". On attribue souvent cette invention à R. Hooke. En 1696 W. Derham écrit à la p. 96 de son livre „The Artificial Clockmaker" — citée dans le Ch. VIII de „The Evolution of Clockwork" —: „Dr. Hook denies Mr. Clement to have invented this; and says that it is his invention, and that he caused a piece of this nature to be made, which he showed before the Royal Society, soon after the Fire of London [1666]".

En 1675 Römer et Leibniz étaient tous les deux à Paris, le premier depuis 1671, le second depuis 1672. En 1673 Leibniz s'était rendu à Londres. Il paraît probable que c'est là qu'il avait fait connaissance avec l'échappement à ancre. La Fig. 101 a été publiée pour la première fois dans notre article „Christiaan Huygens en het ankerechappement" (Revue „Hemel en Dampkring", Wolters, Groningen, Mars 1934).

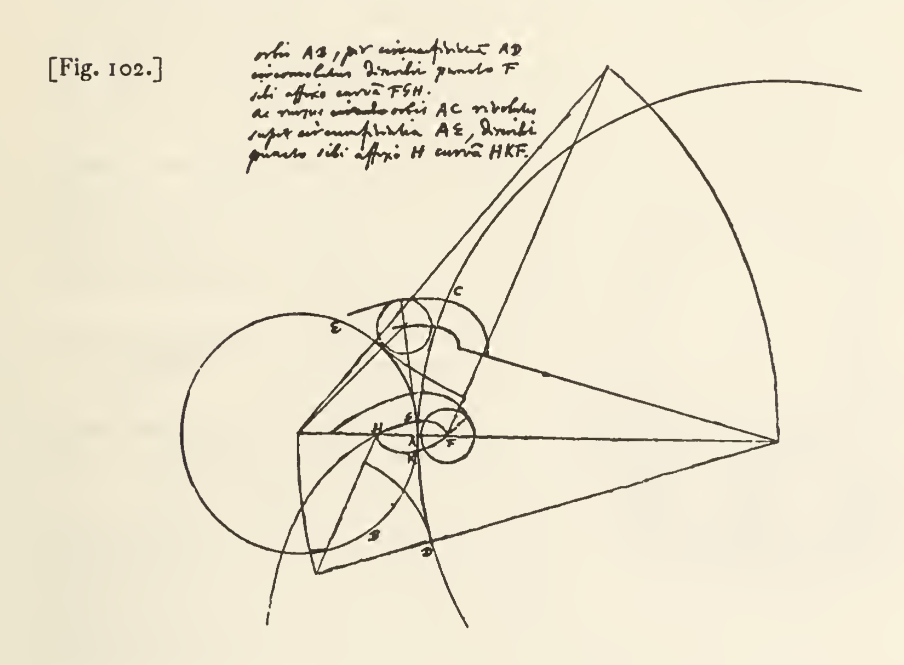
II.

LA FORME DES DENTS DES ROUES.

[1674]

A. Forme épicycloïdale des dents pour les roues planes, d'après Römer [1]).

[Fig. 102.]



§ 1. Rotæ Romeri, æquali vi continue in ſe mutuo agentes [Fig. 103].

Orbis AB [Fig. 102], par circumferentiam AD circonvolutus deſcribit puncto F ſibi affixo curvam FGH. Ac rurſus orbis AC revolutus ſuper circumferentia AE, deſcribit puncto ſibi affixo H curvam HKF [2]).

---

[1]) Les Fig. 102—106 et le texte correspondant aux trois premières ont été empruntées aux p. 1—5 du Manuscrit E, datant sans doute de 1674, puisque le Manuscrit D ne contient encore que des dates de 1673, et que la p. 26 du Manuscrit E porte la date du 19 décembre 1674.

[2]) Le point F, attaché au petit cercle EAB roulant de haut en bas sur le grand cercle immobile, décrit une épicycloïde raccourcie — nous nous servons de ce terme souvent employé pour

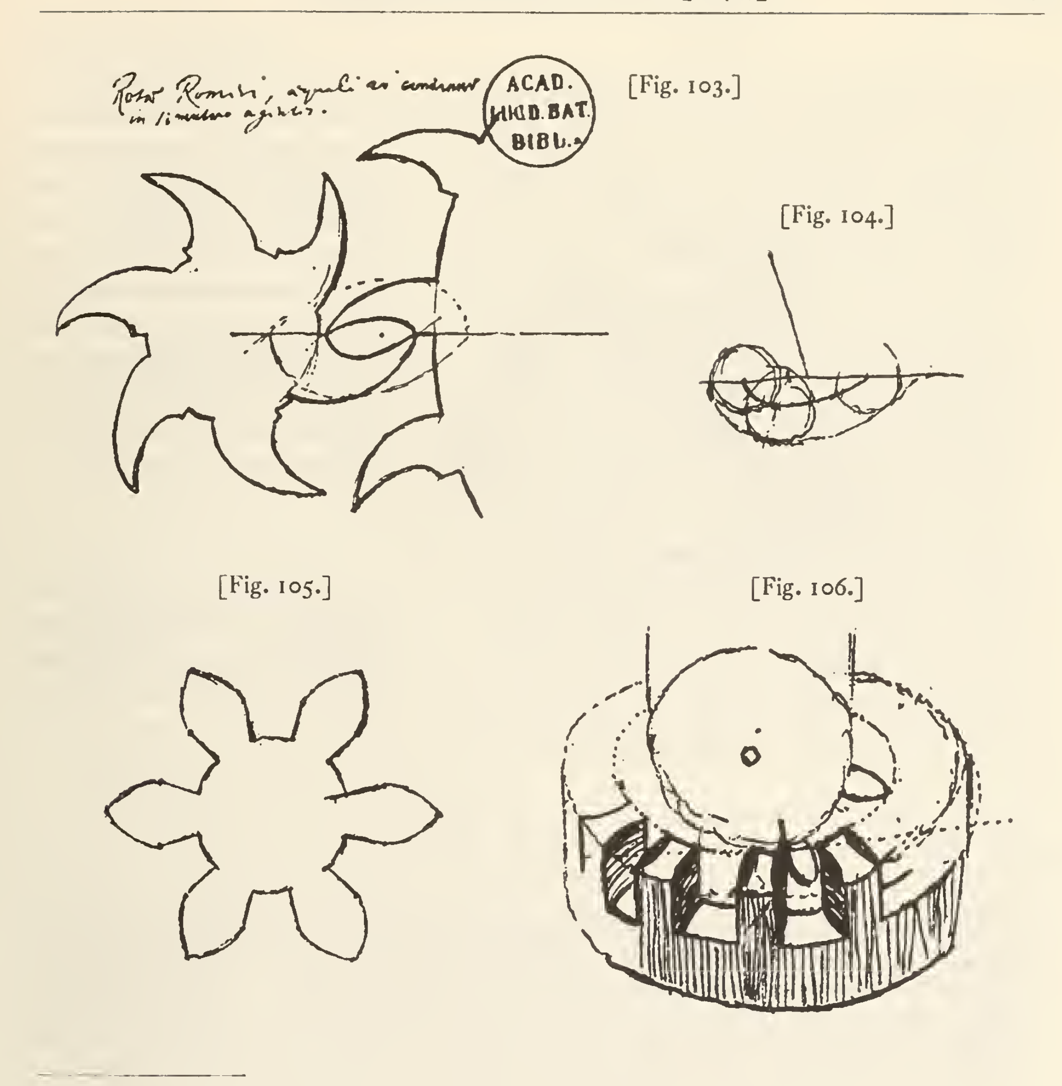
désigner l'épicycloïde à boucles, quoique certains autres auteurs parmi lesquels Gino Loria (ouvrage cité dans la note 4 de la p. 603) parlent au contraire dans ce cas d'une épicycloïde allongée —; FGH est le demi-contour de la boucle, dont l'autre demi-contour, symétrique avec le premier par rapport à la droite HF serait obtenu par le roulement du petit cercle de bas en haut. Huygens dit, sans doute d'après Roemer, que lorsque le grand cercle roule *de bas en haut* sur le petit cercle immobile et que le point H est attaché au grand cercle, celui-ci décrira une épicycloïde qui viendra couper la droite HF précisément au point F. Pour voir qu'il en est ainsi, il faut remarquer que le mouvement des deux cercles l'un par rapport à l'autre est absolument le même, que ce soit le petit ou bien le grand qui roule. On peut toujours rendre le cercle roulant immobile et mettre l'autre en mouvement, par rapport à une table p. e., en donnant à l'ensemble des deux cercles un mouvement tournant approprié par rapport à cette table. Supposons, pour fixer les idées, que, dans le premier mouvement considéré le point bleu B vienne s'appliquer sur le point vert D pendant que le point bleu F décrit la ligne bleue FGH et vient donc en fin de compte coïncider avec le point vert H attaché au grand cercle immobile: il est évident que la même coïncidence doit avoir lieu lorsque, le petit cercle bleu restant immobile et le grand cercle vert roulant sur lui également *de haut en bas*, le point vert D vient s'appliquer sur le point B et que le point H décrit au-dessus de la droite HF sa ligne verte. Or, si l'on considère au contraire, comme Huygens, un mouvement roulant *de bas en haut* du grand cercle sur le petit, il est évident que le point vert H décrira cette fois la ligne HKF symétrique par rapport à la droite HF avec la ligne verte HF supérieure.

La Fig. 102 fait fort bien voir que les lignes FGH et FKH ne sont pas symétriques par rapport à la droite FH: malgré la coïncidence des points extrêmes la ligne verte supérieure HF ne coïncide nullement avec la ligne bleue HGF, comme on pourrait le croire.

Il est évident que les mêmes coïncidences se produiront lorsque les cercles tournent chacun autour de son centre, toujours en roulant sans glisser l'un sur l'autre, puisqu'alors aussi on peut mettre l'un d'eux en repos par un mouvement rotatoire donné à l'ensemble.

Dans la Fig. 103 on reconnaît l'aire dyssymétrique HGFKH de la Fig. 102, ainsi que le point A où se touchent les deux circonférences désormais imaginaires. Supposons que la grande roue mène la petite. L'extrémité de la dent de la grande roue, correspondant au point vert H de la Fig. 102, s'appliquera constamment sur la „ligne HKF", qui constitue la partie supérieure du contour d'une des dents de la petite roue, lorsque les deux circonférences imaginaires roulent l'une sur l'autre. En d'autres termes, lorsque les dents ont la forme indiquée dans la Fig. 103, que la grande roue tourne d'un mouvement uniforme et que ses dents sont toujours en contact avec celles de la petite roue, celle-ci aussi tournera uniformément.

Quant à l'expression „*æquali vi* continue in se mutuo agentes", il est évident que, s'il n'y a aucun frottement, et que les roues tournent uniformément, ce mouvement continuera indéfiniment, sans que les dents exercent l'une sur l'autre aucune pression. Dans la pratique, où il y a des frottements et où il s'agit aussi d'accomplir un certain travail, il faudra qu'un moment agisse sur la grande roue pour maintenir son mouvement uniforme de vitesse angulaire déterminée; la grande roue exercera à son tour un moment sur la petite roue, et il faudra que ce moment, pour vaincre le moment résistant supposé constant, ait lui aussi une grandeur constante. La grande roue en mouvement uniforme ne peut donc manquer, lorsque le mouvement de la petite roue est également uniforme, c.à.d. lorsque les dents sont constamment en contact, et que la petite roue accomplit constamment le même travail, d'exercer sur elle un moment constant.



[Fig. 103.]

[Fig. 104.]

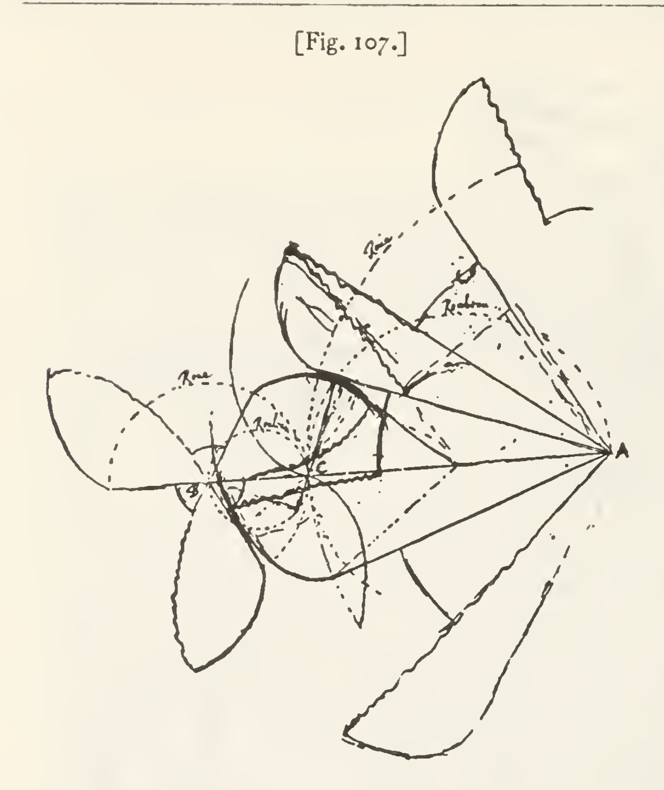
[Fig. 105.]

[Fig. 106.]

On voit que la forme des dents n'est pas entièrement déterminée: la dent de la grande roue, dans le cas considéré, n'agit que par son point extrême; quant à la dent sur laquelle elle agit, son contour supérieur seul doit avoir la forme indiquée dans la figure. Si l'on veut que la petite roue puisse aussi mener la grande, ce ne sera toujours que la partie inférieure du contour de la grande roue qui devra avoir la forme indiquée dans la figure.

Le problème peut d'ailleurs être considéré plus généralement. Pour qu'il y ait constamment contact, les mouvements des deux roues étant uniformes, les dents pourront aussi avoir d'autres formes que celles considérées jusqu'ici. Les dents d'une des roues, p. e. de la petite roue menant la grande, pourront même avoir toutes sortes de formes: il s'agit seulement de choisir convenablement les dents correspondantes de l'autre roue. Supposons p. e. que les dents de la petite roue soient de petits cercles attachés à elle, tels que le cercle à centre F de la Fig. 102

[Fig. 107.]



§ 2. Rotæ Romeri ex descriptione epicyclicarum [1]).

Dans les pignons au deſſus de 4 dents qui ſont mûs par une roüe, il faudroit oſter les courbures epicycloides des dents, et ne laiſſer que les lignes droites tirees du centre, afin qu'elles ne fuſſent preſſees que quand elles ſont dans la droite AB [Fig. 107]. Car ainſi le frottement le plus nuiſible feroit oſtè [2]).

[Voir auſſi ſur ce ſujet une Pièce de N. Fatio de Duillier de 1686 que nous avons publiée aux p. 117-118 du T. IX].

(qui peut, ou qui peut ne pas toucher la circonférence BAE). Il faudra alors remplacer la ligne HGF par la ligne indiquée dans la Fig. 102 dont tous les points se trouvent écartés de ceux de la ligne HGF à une distance égale au rayon du petit cercle à centre F. C'est ce qu'indiquent aussi la Fig. 104 et les lignes pointillées de la Fig. 103. L'extrémité de l'ancienne dent de la petite roue de la Fig. 103, qui correspondait au point F de la Fig. 102, étant maintenant remplacée par un cercle, il faudra que le contour inférieur de la dent menée de la grande roue (contour correspondant à la ligne HGF de la Fig. 102) soit remplacé par la ligne pointillée supérieure de la Fig. 103.

De la Hire dans son travail cité à la p. 602 fait une remarque du même genre: il parle de la transformation d'une cheville punctiforme d'une des roues en un cercle et de l'adaptation de la forme des dents de l'autre roue à ce changement. Il dit en général (Prop. VI du Chapitre „De l'Usage des Epicycloïdes dans les Mecaniques") que l'on peut donner aux dents d'une des roues „quelle figure on voudra: mais alors les dents de l'autre roue dont la figure était en Epicycloïde, doivent avoir une forme composée de celle de l'Epicycloïde et de celle de la dent proposée". Il est évident que cette composition est bien plus difficile dans tous les cas où la dent proposée n'a pas précisément la forme d'un cercle (ou partie de cercle).

Huygens n'indique pas comment ont été obtenues les Fig. 105 et 106. Cette dernière fait voir que probablement Roemer s'est aussi occupé du cas où l'une des roues est intérieure à l'autre. Comparez le dernier alinéa de la note 4 de la p. 603 qui précède.

---

[1]) La Fig. 107 et le texte qui l'accompagne sont empruntés à la p. 167 du Manuscrit E, datant probablement de la fin de 1678, puisque la p. 165 porte la date du 3 décembre 1678 et que la p. 175 est datée 1679 (comparez la première ligne et la fin de la note 1 de la p. 400 qui précède).

La Fig. 107 représente apparemment un pignon de trois dents (ou ailes) mené par une roue, les contours de toutes les dents étant formés par des lignes droites, des lignes épicycloïdales et des lignes quelconques. Ces dernières sont les lignes sinueuses de la figure. Quant aux épicycloïdes, contrairement au cas considéré dans le § 1, il doit s'agir ici d'épicycloïdes *ordinaires*. Les lignes courbes des ailes du pignon formant avec les rayons auxquels elles se rattachent des angles de 180°, sont des fragments de l'épicycloïde ordinaire décrite par un point quelconque du „Rouleau" droit de diamètre CA (moitié du diamètre de la „Roüe" droite) lorsque ce „Rouleau" roule, de haut en bas, sur la „Roüe" gauche immobile; tandis que les lignes courbes des dents de la roue, faisant également des angles de 180° avec les rayons auxquels elles se rattachent, sont des fragments de l'épicycloïde ordinaire décrite par un point quelconque du „Rouleau" gauche de diamètre BC (moitié du diamètre de la „Roüe" gauche) roulant de bas en haut sur la „Roüe" droite immobile. Huygens a tracé les deux épicycloïdes nommées décrites par le point C considéré comme faisant partie de l'un ou de l'autre „Rouleau". En effet, si les courbe sont ces formes-là, et qu'un rayon déterminé partant du centre A touche, en son point situé sur le „Rouleau" droit, une des ailes du pignon, comme la figure l'indique (quoique l'on n'y distingue pas nettement la place précise du point de contact), cette méme droite restera en contact — le point de contact se trouvant toujours sur le „Rouleau" droit — avec la courbe de l'aile du pignon, jusqu'au moment où le rayon qui limite l'aile considérée aura pris, en se mouvant dans le sens des aiguilles d'une montre, la positiou BC. En ce moment la courbe qui fait partie du contour de la dent de la roue commencera à presser le rayon nommé en son extrémité; elle continuera à le presser en un point situé sur le „Rouleau" gauche tant qu'il y aura contact de la dent avec l'aile du pignon.

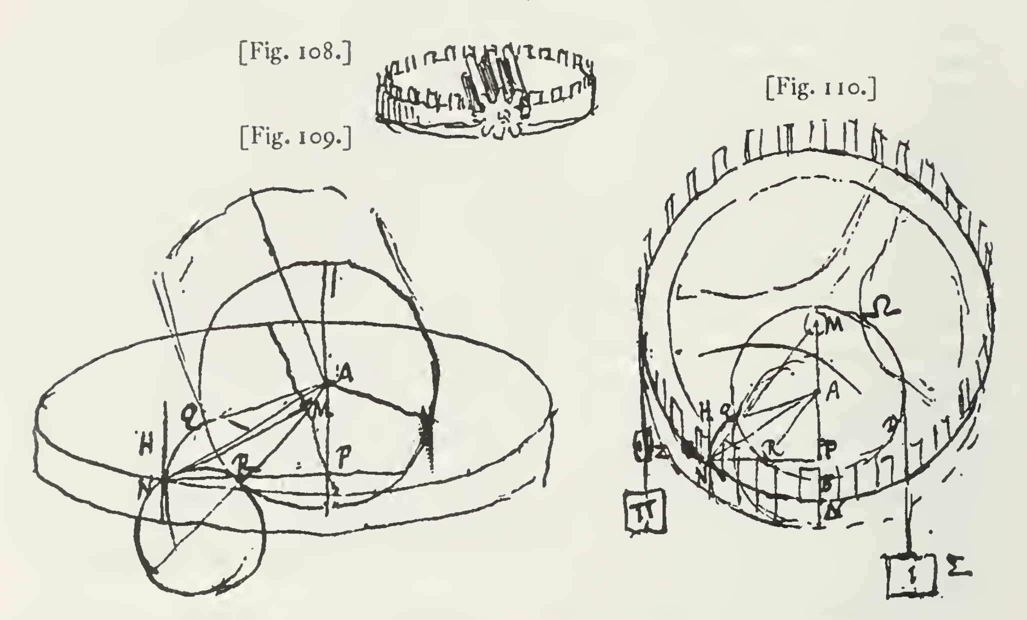
Pour le faire voir, il suffit de démontrer que le lieu des points de contact des tangentes tirées du point A aux épicycloïdes semblables plantées, non seulement en trois points mais partout, sur la „Roüe" gauche, est le „Rouleau" droit. Il en résultera évidemment aussi que le lieu des points de contact des tangentes partant du point B aux épicycloïdes plantées sur la „Roüe" droite est le „Rouleau" gauche. Or, la proposition énoncée résulte immédiatement du fait que le point C est le centre instantané de rotation — lorsque le „Rouleau" droit roule sur la „Roüe" gauche — correspondant à tous les points où les épicycloïdes plantées sur la „Roüe" gauche coupent le „Rouleau" droit: les normales aux épicycloïdes en ces points-là passent donc par le point C. Comparez la note 4 de la 401 qui précède. Et l'on voit qu'une rotation uniforme de la roue correspond à une rotation uniforme du pignon.

Les considérations de Roemer sur la Fig. 107 différaient sans doute des nôtres: voir la note 5 de la p. 613 qui suit. Il est évident que si l'on réussit à donner aux dents une forme telle, que le rapport des moments que les deux roues exercent l'une sur l'autre est constant, il s'ensuivra qu'à une rotation uniforme d'une des deux roues correspond une rotation uniforme de l'autre roue.

[2]) De la Hire („De l'usage des épicycloïdes etc.". Prop. VI et VIII) fait une remarque analogue: „On doit toujours éviter dans les dents des roues de faire qu'elles travaillent au-dessus de la ligne AC [horizontale] qui joint leurs centres, à cause que le frottement y est fort grand, & qu'au contraire il n'est pas presque considérable au-dessous... parce que les roues ayant leur mouvement du dessus au dessous de cette ligne les faces des dents qui se rencontrent en s'écartant l'une de l'autre ne se frottent qu'en échappant... au lieu que, lorsque le frottement se fait par la rencontre des parties que rentrent l'une sur l'autre, l'empêchement au mouvement est fort considérable".

B. Formam dentium invenire in rotis Coronarijs [Fig. 108] quam in rotis planis invenit Romerus [1]).

§ 1. Forme épicycloïdale des dents d'un pignon qui engrène dans une roue de champ à dents plates, d'après Huygens.



16 Nov. 1680. Parisijs. Circulus QBD [Fig. 110] intelligendus esse sectio superficiei cylindricæ [Fig. 108 et 109] terminantis dentes rotæ verticalis quousque plani sunt. Item circulus ΔN intelligendus esse parallelus et æqualis circulo rotæ horizontalis cujus dentes perpendiculares et rectilinei [2]).

[1]) La partie *B* de la Pièce II (que nous divisons, comme la partie *A*, en deux §§) est empruntée aux p. 39—43 du Manuscrit F.

[2]) Le cercle vertical QBD est donc une section du cylindre tournant. Ce n'est pas la section droite extrême; le point B (voir le quatrième alinéa du texte) est situé plus bas que le point Δ, ce que la Fig. 110 ne fait pas bien voir. Le cylindre à section circulaire (comparez la Fig. 108) est d'ailleurs imaginaire, tout comme les „roües" circulaires des Fig. 103 et 107. Le rayon AB du cylindre est par hypothese — quatrième alinéa du texte — la distance à l'axe du pignon du point de contact des dents, lorsque le contact a lieu en B dans le plan vertical passant par MΔ. Le cercle horizontal NΔ à centre M est une section de la roue de champ Ω passant par le point de contact N situé sur la dent HN. Les dents de la roue de champ sont apparemment supposées sans épaisseur.

La surface cylindrique „terminat dentes ... quousque plani sunt". Apparemment les dents

Ponatur rotæ BD verticalis [Fig. 110] dens QN [Fig. 109 et 110] impuliſſe rotam horizontalem a Δ ad N, ſitque rotæ BD dens QN impellens dentem NH rotæ ΔN [3]). Oportet jam ductâ NP a puncto contactus N ad radium rotæ AB, qui ad centrum terræ tendit, ut ipſa faciat intervallum AP à centro rotæ minoris, ſubduplum intervalli MP [4]) quod intelligo eſſe ſinum complementi arcus ΔN in rota majori dupla. Nam ſuſpenſo pondere Π quod trahat circonferentiam rotæ majoris ducto fune ſuper trochlea Z, et ponderi æquali Σ, quod trahat circonferentiam rotæ minoris, oſtendetur eas manere in equilibrio.

Quia enim linea dentis NH premit ſecundum ſibi perpendicularem lineam NP quæ et in radium horizontalem MΔ perpendicularis eſt, perinde eſt ac ſi brachium MP premeretur perpendiculariter a baculo NP, ei vero reſiſtit brachium AP perpendiculare ad horizontem, et ſunt vires ponderis Π rotam AN circumagentis duplæ virium ponderis Σ rotam BQ circumagentis ut ipſa brachia rotis affixa MP ad AP. Ergo pondera rotas in ſe mutuo agentes in æquilibrio tenebunt [5]).

Cum contactus dentium eſt in plano verticali per MΔ erit intervallum inter tactum et centrum rotæ horizontalis æquale radio MΔ, inter tactum vero et centrum rotæ

du pignon, lorsqu'on les parcourt en s'éloignant du centre A, sont d'abord planes, comme celles de la Fig. 107; elles possèdent deux surfaces planes passant par l'axe du pignon. C'est à partir de la génératrice du cylindre passant par le point B, donc au-dessous d'elle, que la dent du pignon dont la surface plane située à gauche se termine là, acquiert une certaine courbure qu'il s'agit de déterminer.

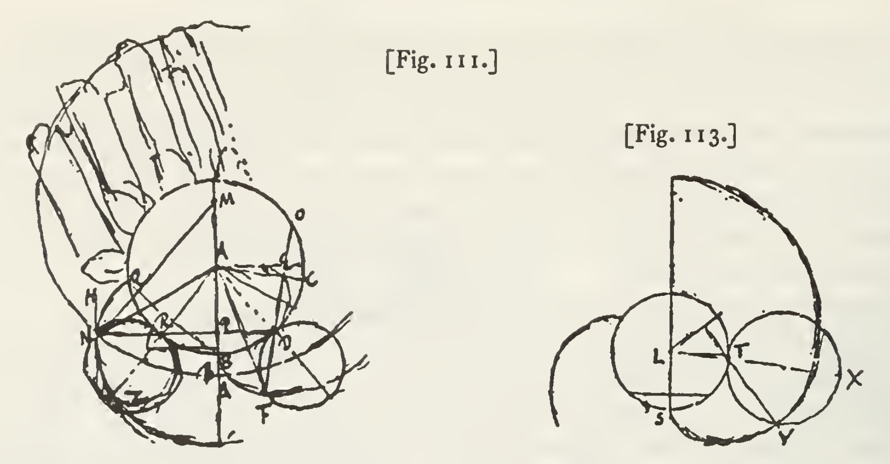
Nous avons parlé du point de contact B: en général il n'y a qu'un seul point de contact entre une dent du pignon et une dent de la roue de champ (supposée sans épaisseur). Toutefois dans le cas où la dent de la roue de champ se trouve précisément à l'endroit ici considéré, il est évident que la surface plane poussante de la dent du pignon la touche suivant une *droite*; nous voulions dire que B est le point le plus bas de cette droite de contact.

3) Par hypothèse (fin de la phrase suivante) le rayon MΔ du cercle horizontal est le double du rayon du cylindre circulaire imaginaire.

4) MP, partie du rayon MΔ, est une droite horizontale, comme la Fig. 109 le fait bien voir.

5) Soit F la force exercée dans le sens PN par une dent du pignon sur la dent HN, et dans le sens NP par la dent HN sur la dent du pignon; et supposons qu'il ne faille tenir compte que du contact de ce couple de dents seulement. Pour que la roue de champ soit en équilibre, il faut que les moments F.MP et Π.MΔ soient égaux. De même l'équilibre du pignon exige qu'on ait F.AP = Σ.AB. On obtient par division $\frac{AP}{MP} = \frac{\Sigma}{\Pi} \cdot \frac{AB}{M\Delta}$.

Par hypothèse $\frac{AB}{MD} = \frac{1}{2}$ (note 3). Puisque les poids Σ et Π sont égaux par hypothèse, il en résulte que l'on doit avoir, pour toute position de la dent HN, AP = $\frac{1}{2}$ MP. Il s'agit de donner à la dent du pignon, qui pousse la dent HN, une forme telle que cette éqnation soit vérifiée. Puisque les poids Π et Σ sont constants, c.à.d. puisque le moment extérieur agissant sur le pig-



[Fig. 111.]

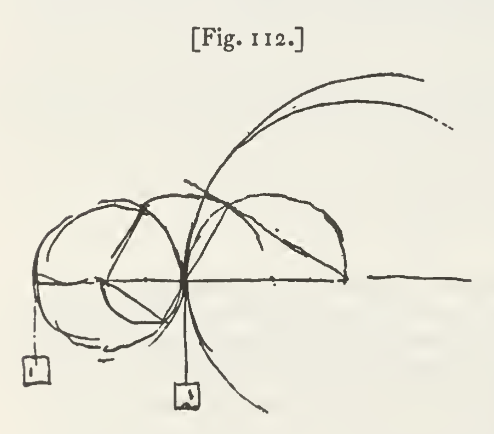
[Fig. 113.]

verticalis erit æquale radio AB. Cumque poſito tactu in N, ſit AP ∞ $\frac{1}{2}$ MP, patet punctum N eſſe altius puncto tactus dicto quod ſit in plano verticali per MΔ [1]).

BC arcus quivis [Fig. 111] bifariam ſecetur in D, ducatur ſinus DE cujus dupla ſit EDF. Erit F unum è punctis curvæ quæ eſt Epicycloides. Nam facto circulo DF ſub-

---

non est constant et qu'il en est de même du moment exercé par la roue de champ, les moments F.MP et F.AP resteront aussi constants durant le mouvement.


[Fig. 112.]

La Fig. 112 de la p. 38 du Manuscrit F semble indiquer que dans le cas des roues planes (partie *A* de la présente Pièce) Roemer s'était servi, comme Huygens le fait dans la Fig. 110, de la considération de poids suspendus aux contours des „roües". On voit aussi des poids suspendus de cette manière dans les figures de de la Hire. La Fig. 112 montre en outre les „rouleaux" de la Fig. 107.

Roemer avait sans doute donné de bonnes raisons pour se borner à la considération d'un seul couple de dents et à celle de poids Π et Σ égaux. Voir à ce sujet les Prop. III et IV de l'article de de la Hire. Il est évident qu'il résulte de la constance du rapport des moments exercés par les deux roues l'une sur l'autre dans le cas de l'engrenage d'un seul couple de dents convenablement taillées, que la rotation uniforme d'une des roues correspond à une rotation uniforme de l'autre: cette uniformité subsiste lorsque plusieurs couples de dents s'engrénent simultanément. Voir aussi le cinquième alinéa de la note 2 de la p. 607.

[1]) Voir ce que nous avons remarqué dans la note 2 de la p. 612 au sujet de la Fig. 110.

duplo ad BD ipſumque tangentem in D, ductaque ED ad circonferentiam in F, fit arcus DF ſimilis DO vel BC, ideoque arcus DF dimidio BC, hoc eſt ipſi DB æqualis. Unde F in epicycloide è circulo DF ſuper BD revoluto, cujus initium B.

∠ PAR ∞ ΔMN [Fig. 110 et 111][2]. erit arcus RB ſimilis NΔ, qui ipſius eſt duplus. Et quia AP ∞ $\frac{1}{2}$ MP, erit RP perpend. AP et NRP linea recta. et NR ∞ RP. Et QR arcus ∞ RB. Super R puncto ſit deſcriptus circulus RNZ [Fig. 111], tangens BQ in R et diametrum ſubduplam habens circuli BQ. productâ DR erit arcus RN ſimilis RBD, ideoque æqualis RB ſeu RQ. Unde punctum N in Epicycloide QN.

Rota BD habens dentes formatos ſecundum BF [Fig. 111], ſed horizontaliter longos dum ipſa verticali poſitu convertitur impellitque dentes rotæ duplo majoris Ω [Fig. 110] horizontali ſitu poſitæ ac proinde dentibus perpendiculariter erectis ac rectilineis, ſemper æquabili vi rotam hanc circumagit.

Et quod mirum, hæc ipſa rota BD conveniret rotæ ſibi æquali, quæ in eodem cum ipſa plano eſſet poſita[3]).

Si rota ST [Fig. 113] ſubtriplam diametrum habeat rotæ coronariæ quam circumducere debet, erit forma dentium ex epicycloide SV cujus circulus genitor TV æqualis ipſi ST. Nempe radius rotæ LT cum diametro TX æquantur radio rotæ Ω. idque ita ſemper ſe habet, in quavis proportione rotæ ST ad Ω[4]).

Unde ſi ST ipſi Ω æqualis fuerit, epicyclois ad punctum reducta erit. unde nulli dentes curvi, ſed ipſæ extremitates radiorum ut LS in dentes rotæ Ω agere debebunt.

---

[2]) Le point R est d'après la construction indiquée le point d'intersection du rayon AR et de la circonférence de cercle QBD. Huygens démontre que ce point se trouve sur la droite NP et en occupe le centre.

Il en conclut ensuite que le point de contact N se trouve sur l'épicycloïde QN (faisant en Q un angle de 180° avec AQ) décrite par un point d'une circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ AB roulant sur la circonférence de diamètre AB. C'est l'épicycloïde considérée aussi à la p. 399 qui précède. La Fig. 111 fait voir que l'horizontale RN est normale à l'épicycloïde. La forme de la partie courbée de la dent du pignon qu'il s'agissait de déterminer (fin du deuxième alinéa de la note 2 de la p. 612) a donc été trouvée: la surface considérée est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à celles du pignon et dont l'épicycloïde est la section droite.

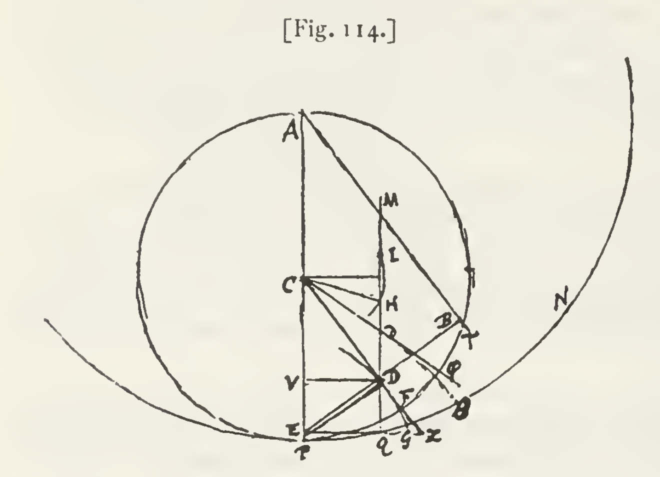
[3]) En effet, dans le cas de la Fig. 107 (et dans celui de la Fig. 112), le „rouleau", qui produit l'épicycloïde par sa rotation sur une „roüe", a un rayon égal à la moitié de celui de cette „roüe" dans le cas où les deux „roües" ont même diamètre.

[4]) D'après l'équation de la note 5 (p. 613), on a (en prenant toujours $\Sigma = \Pi$), AP $= \frac{1}{3}$ MP, lorsque, ce que Huygens suppose ici [Fig. 111], AB $= \frac{1}{3}$ MΔ. Il en résulte que dans la Fig. 110 l'arc BR est désormais le tiers de l'arc QB. Il en est de même dans la Fig. 111 et il faut donc, pour que le point N, intersection de PR prolongée avec la circonférence RNZ, vienne s'appliquer au

Hæc ST conveniret rotæ duplæ planæ. Quod si ST rota ad quadruplam coronariam aptata esset, conveniret planæ sibi triplæ. Et sic deinceps [1]).

§ 2. Forme des dents d'une roue de champ qui engrène dans un pignon à dents plates, d'après Huygens.

[Fig. 114.]



19 Nov. 1680.

Je concois le grand cercle PGN [Fig. 114], qui est la roue de champ — GD dens [2]) — couché plat sur ce papier; et le cercle PTA, qui est celuy du pignon, c'est a dire qui en termine toutes les dents, qui sont plattés, je le conçois dressé perpendiculairement sur ce papier. Mais en sorte que la commune section des plans de ces 2 cercles est dans la ligne EQ [3]). Quand la dent platte du pignon est par CD, et la dent GD presse, ou est pressee en D, la ligne de

---

point Q par le roulement de cette circonférence, que le rayon du cercle roulant RNZ soit égal à celui du cercle BRQ.

Lorsque AB $= \frac{1}{n}$ MΔ, donc aussi AP $= \frac{1}{n}$ MP, on aura: arc BR $= \frac{1}{n}$ arc QB, ou bien: arc QR $= (n - 1)$ arc BR. Le rayon x du cercle roulant doit être tel d'après la Fig. 11 que arc QR : 2 arc RB $= x$: AB, rayon du cylindre. Il en résulte $x = \frac{1}{2}(n - 1)$ AB. Par conséquent, comme le dit Huygens, le rayon du cylindre augmenté du double du rayon x, est toujours égal au rayon MΔ de la roue de champ.

[1]) La roue „ST" à rayon AB (section plane du cylindre des Fig. 109 et 110, menant la roue de champ à rayon n.AB) a des dents dont la surface épicycloïdale est déterminée (note 4, p. 516) par le roulement du cercle à rayon $\frac{1}{2}(n - 1)$ AB sur le cercle à rayon AB. Or, d'après ce que nous avons dit dans la note 1 de la p. 611, la roue plane à rayon AB qui mène une autre roue plane de rayon $(n - 1)$ AB, possède également des dents dont la forme épicycloïdale est déterminée par le roulement du „rouleau" — Fig. 107 et Fig. 112 — à rayon $\frac{1}{2}(n - 1)$ AB sur le cercle à rayon AB.

[2]) Dans le § 2, contrairement à ce qui a été supposé dans le § 1, ce sont les dents de la roue de champ qui sont courbées de manière à être constamment en contact avec les dents plates du pignon, les mouvements de la roue et du pignon étant l'un et l'autre uniformes. Ainsi que Huygens le dit un peu plus loin, le rayon du cercle PTA est d'abord supposé (comme dans le § 1) égal à la moitié de celui du cercle PGN.

[3]) Il existe évidemment un *cylindre* qui „termine toutes les dents" du pignon. Le „cercle PTA,

preſſion eſt perpendiculaire à CD, ou parallele à EB. Et comme le point D eſt au deſſus de Q [4]), la ligne de preſſion eſt donc dans le plan perpendiculaire ſur QE. Que ſi la preſſion ſe faiſoit ſuivant la ligne QE ou une a luy parallele, la force [5]) s'en meſureroit par la diſtance entre E et A centre de la roue de champ. Mais ſe faiſant par une parallele à BE, elle eſt moindre que elle feroit ſelon la raiſon de AB à AE comme il ſe demonſtre dans les mechaniques. Il faut donc que AB, et non AE, ſoit double de CD [6]), qui meſure abſolument la preſſion de la dent CDF du pignon [7]). AB debet eſſe dupla CD.

C centre du cercle PTA. A centre du cercle PQN de double diametre. Le point Q donne QE perpend. ſur CP. QM parallele à CP. Il faut trouver dans QM le point D, par ou eſtant menè le rayon CDF, et EB perpend. à CD et rencontrant AT parallele a CD, la droite AB ſoit double de CD.

CV ∞ x. AE ∞ b. EQ ∞ c.

CD	CV	EA	AB
$\sqrt{xx+cc}$	x	b	$\frac{bx}{\sqrt{xx+cc}} \infty 2\sqrt{xx+cc}$

$$bx \infty 2xx + 2cc$$

$$\tfrac{1}{2}bx - cc \infty xx$$

$$\tfrac{1}{4}b \text{ Ϙ}[8]) \sqrt{\tfrac{1}{16}bb - cc} \infty x[9]).$$

Conſtructio. Centro C, radio CH ∞ $\frac{1}{4}$AE ſcribatur circonferentia quæ ſecet rectam

qui est celuy du pignon" est une section droite de ce cylindre, savoir le cercle qui donne avec celui de la roue de champ (d'où s'élève la courbure des dents) l'intersection EQ.

4) Huygens dit donc que le point de contact de la dent considérée avec la surface plane d'une aile du pignon se projette toujours sur le contour du cercle de la roue de champ. En d'autres termes, la dent (supposée apparemment sans épaisseur) est par hypothèse une partie de la surface cylindrique élevée perpendiculairement sur la circonférence du cercle de la roue de champ.

5) „La force de la pression" est évidemment son moment par rapport à l'axe de rotation.

6) Comparez la note 5 de la p. 613.

7) C.à.d. qui est le bras de levier de la pression exercée par, ou sur, la dent du pignon.

8) Le signe Ϙ signifie $\pm$.

9) Soit AP, rayon du cercle de la roue de champ $= R$. La Fig. 114 fait voir $c^2 = R^2 - b^2$. On a donc $x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{\frac{17}{16}b^2 - R^2}$. Par conséquent b est comprise entre les limites $R\sqrt{\frac{16}{17}}$ et R. Pour $b = R\sqrt{\frac{16}{17}}$ on a $x = R\sqrt{\frac{1}{17}}$ et $c = R\sqrt{\frac{1}{17}}$. On peut trouver des limites analogues dans le cas du „pignon double de la roue de champ", etc.

QM, parall. AP, in H et I. ponaturque HD vel ID æqualis radio CH, erit D vel D punctum quæsitum [1]). CDF erit dens planus rotæ quam pignon vocant. Sumatur arcus PG æqualis arcui PF. Erit arcus GQ distantia perpendicularis QD ab initio curvæ GD, quæ formam dentis refert. Similiter posito arcu $P\theta \infty P\varphi$ erit θQ distantia perpendicularis QD ab initio curvæ, quod initium nunc est in θ.

Le pignon double de la roue de champ $\frac{bx}{\sqrt{xx+cc}} \infty \frac{1}{2}\sqrt{xx+cc}$ [2])

$$bx \infty \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}cc$$

$$2bx - cc \infty xx$$

$$b \,\text{ᛈ}\, \sqrt{bb-cc} \infty x.$$

Pignon quadruple de la roue de champ $\frac{bx}{\sqrt{xx+cc}} \infty \frac{1}{4}\sqrt{xx+cc}$ [2])

$$bx \infty \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}xx$$

$$4bx - cc \infty xx$$

$$2b \,\text{ᛈ}\, \sqrt{4bb-cc} \infty x.$$

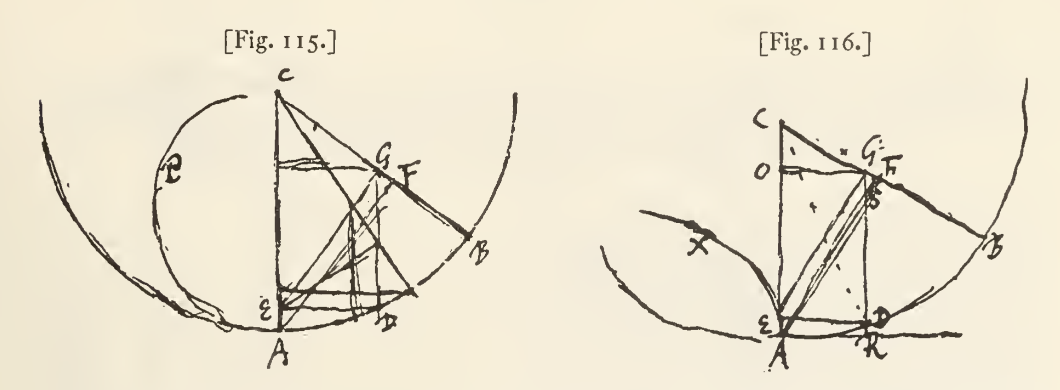
Pignon et roue de champ suppofez egaux [2]). La construction universelle est dans

[1]) Suivant l'équation le point D le plus bas est obtenu en prenant CV = CH + $\frac{1}{2}$ HI; DD = HI donne ensuite le point supérieur D.

[2]) Dans le cas où le rayon du pignon est double (ou quadruple) de celui de la roue de champ — ou bien égal à ce dernier —, l'égalité des moments exige que l'on ait AB = $\frac{1}{2}$ CD (ou = $\frac{1}{4}$CD) — ou bien AB = CD.

la page precedente [3]) et pour ce cas des roues egales l'equation feroit $\frac{1}{2}b \text{ ̶ } \sqrt{\frac{1}{4}bb - cc}$ ∞ x. Et jam hic A et C in unum punctum conveniunt.

[Fig. 115.] [Fig. 116.]



CB aiſle platte du pignon, qui eſt venue de CA en CB [Fig. 115]. AX figure de la dent de la roue de champ. Le bout A de cette dent ſera en B (a cauſe de l'egalite des roues et de leur converſion egale), en concevant maintenant le cercle AB pour celuy de la roue de champ duquel s'eleve la courbure des dents.

Je veux ſcavoir un des points de la courbe AX dont le bout eſt venu en B, ſcavoir le point ou cette dent courbe touche a la dent platte CB du pignon cylindrique. [Soit AF perpend. ſur CB, et AR ſur AC. Et cherchez avec une regle parallele à CA, ou il faut placer GR en ſorte que ſa partie GS ſoit egale a DR] [4]). Alors la ligne DG eſt celle qu'il faut elever perpendiculairement ſur le plan de cette feuille, au deſſus du point D, ſcavoir ſuivant la ſurface cylindrique ſur la baſe AC [5]) de la roue de champ. Et le point G de cette ligne ainſi elevée ſera un des points de la courbe de la dent qui commence en B [6]).

Cette courbe eſt a peu pres comme une demie cycloide du cercle CPA [Fig. 116] enveloppee autour dudit cylindre mais elle eſt plus platte entre l'extremite et le ſommet qui convienent exactement [7]).

---

3) Début du § 2.

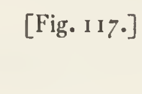
4) La phrase que nous avons placée entre crochets, a été biffée par Huygens. En effet, cette construction ne s'accorde pas avec l'équation trouvée qui donne CO ou x et par conséquent la place du point G [Fig. 115] lorsque b (CE) ou c (ED) est donnée.

5) Il faut sans doute lire AB. Comparez la note 4 de la p. 617.

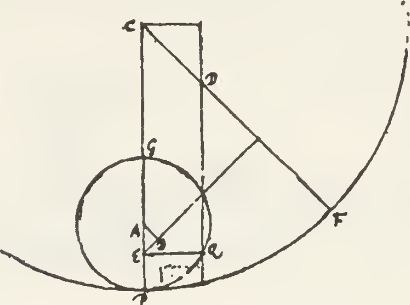
6) Pour trouver un point de la dent AX (la courbe AX se trouve en réalité sur la surface cylindrique dont il vient d'être question), il faut décrire sur cette surface vers le côté gauche à partir du point G — situé au-dessus du point D par rapport au plan du papier — un arc horizontal égal à l'arc AB. On trouve tous les points AX en tenant compte de tous les points G correspondant à des angles ACB quelconques.

7) ?

Pignon quadruple de la roue de champ [Fig. 117 et 118].



[Fig. 117.]



[Fig. 118.] [1])

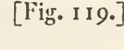


───

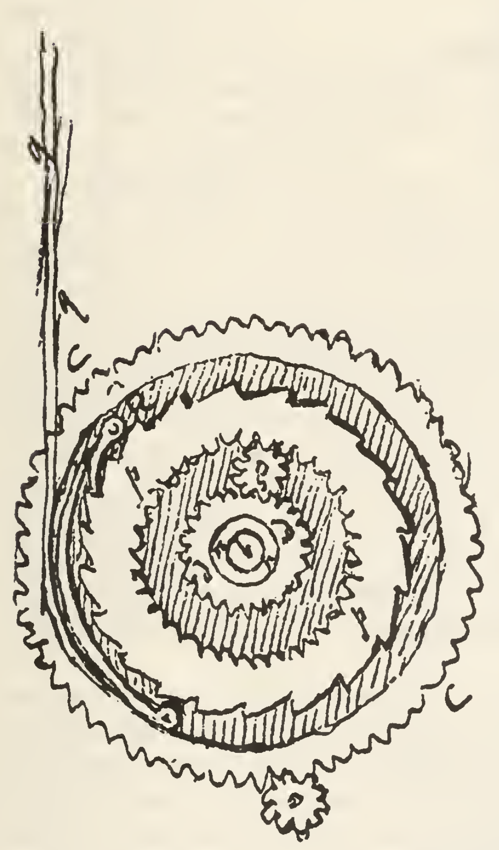
[1]) ?

III.[1]

MANIERE DE FAIRE QU'EN MONTANT L'HORLOGE ELLE NE DISCONTINUE POINT SON MOUVEMENT, DONT LES HORLOGERS SE SERVENT SANS EN SCAVOIR RENDRE RAISON.



[Fig. 119.]



CC [Fig. 119 et Fig. 120] eſt la roue dentee ſur la quelle eſt poſec la fuſec, qui s'y enfonce un peu. Le cercle *pp* eſt de fer, et rivè a la fuſée, ayant les dents d'arreſt en dehors, que la piece Q empeſche de tourner a droite. Le meſme cercle *pp* a des dens en dedans qui engrainent dans le pignon *s*, attachè ſur la roue CC. La roue *dd*, qui eſt attachée a la virole *nn*, engraine auſſi dans le pignon *s*. Et l'axe court *aa* tient attachè a cette virole. Lors qu'on tourne cet axe à droite et avec luy la roüe *dd*; le pignon *s* tourne a gauche, et fait tourner de meſme le cercle dentè *pp*, avec la fuſée qui y eſt attachée. ce qui fait remonter la corde ſur la fuſée, le cercle CC demeurant en repos avec ſon axe *bb*.

La reſiſtence que trouvent les dents du pignon *s* à faire tourner à gauche la fuſée, qui attire le tambour par la corde *qq*; cette reſiſtence dis je fait que les dents oppoſees du meſme pignon *s* doivent ſouffrir une pareille preſſion par les dents de la roüe *dd*, qui tourne a droite. la quelle preſſion fait effort ſur la roüe CC (parce que le pignon *s* y eſt attachè) pour la faire tourner à droite. Et ainſi la Roüe C travaille pour faire aller l'horloge pendant que la fuſee remonte le reſſort, en tournant à gauche.

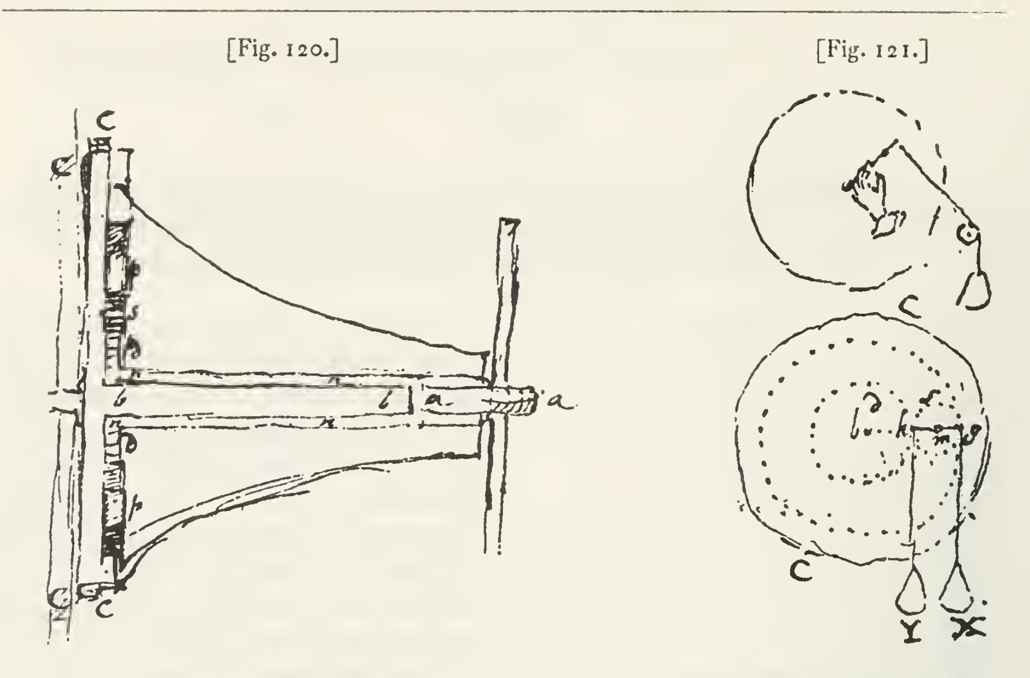
Si le cercle dentè interne de *pp* eſt double de la roue *dd*, l'horloge ſe remontera avec la moitiè de la force[2]) d'un remontoir ordinaire et en recompenſe le nombre des

---

[1]) Manuscrit F, p. 175.

[2]) Ici il s'agit, peut-on dire, d'un moment. Il en est de même plus loin.

[Fig. 120.] [Fig. 121.]



tours que fera la clef ſera auſſi double de l'ordinaire. Il arrivera auſſi que les dens de la roüe CC agiront avec plus de force que lorſque l'horloge va, et cela dans la raiſon de 3 à 2. Car ſi la roüe CC fait effort, lors que l'horloge va, comme ſi elle eſtoit tiree au point *g* [Fig. 121] par le poids *X*, Et que *gh* ſoit une balance ayant les bras egaux *gm*, *mh*; il faudra un poids *Y* egal a *X* pour tenir la balance en equilibre. Le poids *X* eſt l'effort du grand reſſort qui tire la fuſee. *Y* la force qu'il faut aux dents de la roüe *dd* pour faire tourner le pignon *s* en ſorte qu'il faſſe tourner le cercle *pp*. Mais comme le poids *Y* n'agit qu'a la moitiè de la diſtance du centre *b* de ce que fait le poids *X*, il adjoute ſeulement une partie de force aux deux parties que [ca]uſe le poids *X* a l'action de la roue CC.

Ainſi cette force devient a celle du remontoir ordinaire comme 3 a 2, car en montant l'horloge a l'ordinaire il ne faut au point *g* que la force pour attirer le poids *X* [1]). Mais la difficultè qui procede de l'engrenage des dents fait qu'elle devient quelquefois double et plus. Il paroit au reſte par cette explication que tant que la roüe *dd* eſt plus petite a raiſon de la roue interne *pp*, la force de la roue CC en remontant ſurpaſſe moins ſa force en allant. Et que l'on remonte d'autant plus facilement mais avec plus de temps ou de tours.

[1]) On lit encore en marge: „La force pour remonter est a la force ordinaire comme *bh* a *bg*. la force des dents de la roüe CC en remontant est augmentée selon la raison de *bg* + *bh* à *bg*".

IV.[1]

FORME DE LA VIS ET DE L'ECROU SERVANT À MONTER OU BAISSER LE PLOMB DU PENDULE.

Om het loot van 't pendulum met een schroef daer onder te konnen opwaert en neerwaert schuijven.

GHCD [Fig. 122] is het loot vant pendulum steeckende op de spil die hier vierkant is, en van K tot L met een schroef.

CD is een kopere plaetje passende onder tegen het loot, en hebbende in midden een gat daer de spil door steeckt.

AB is een ringetie van koper, met een rondt gat in midden, 't welck wijder is nae boven als nae onder. Door dit ringetie, eer dat men 't op het plaetje CD met penneties vast maeckt, steeckt men het cylindertie EF, dat naer boven wat uijtgeset is en van binnen met een moer, die omde schroef voors. past.

Als men dan dit cylindertie d'een of d'ander wegh om draeijt soo sal noodsaeckelijk het loot GABH op of neerwaert gaen. Waerdoor de slinger licht op sijn maet gestelt sal werden.

[Fig. 123.]

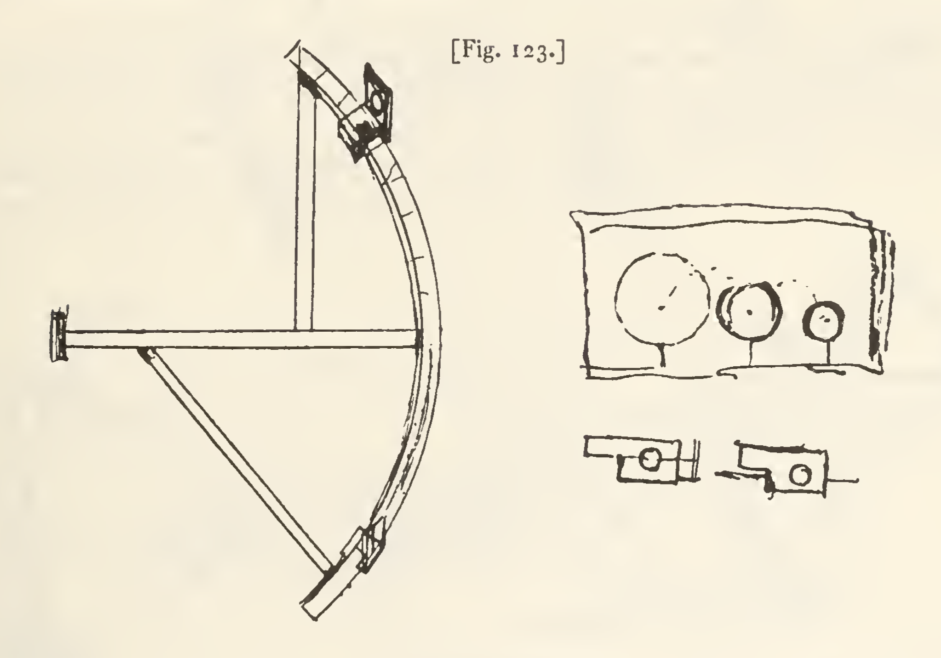


[1]) Manuscrit F, p. 294, datant de 1687.

INSTRUMENTS NAUTIQUES.

INSTRUMENTS NAUTIQUES[1].

[Fig. 123.]



Schuyfje van kopere plaet om het glas min en meer opening te laeten. Of drij verſcheyde ronde gaeten in een ſchuijf [Fig. 123].

Lignum [Fig. 124] oleo imbuatur ne ab aeris humiditate torqueatur.

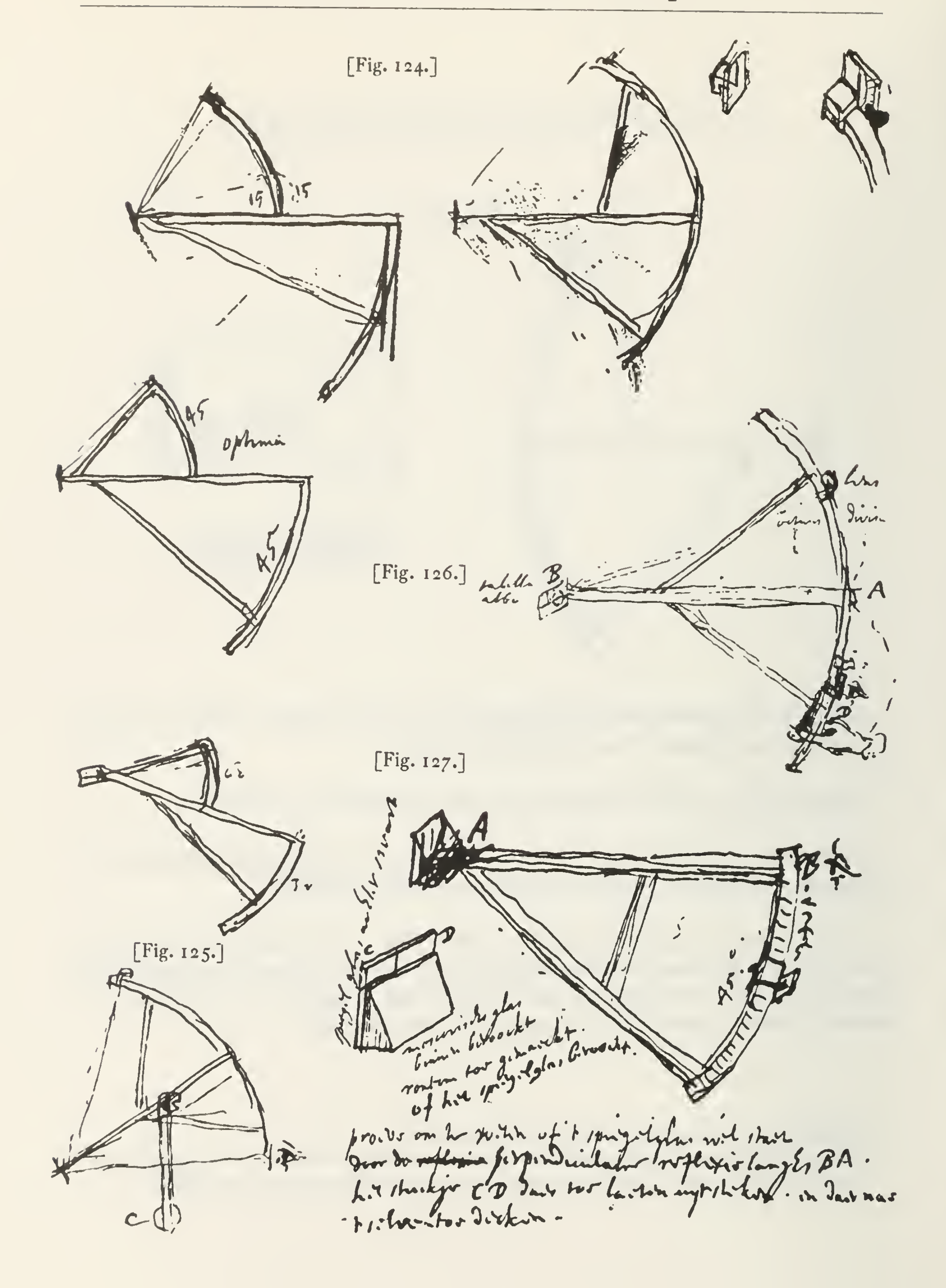
In magnis ſolis altitudinibus[2]) pondus C [Fig. 125] affigendum quadranti quo commodius ſuſtineatur. Lens ſit æquabiliter craſſa circa margines.

Lens vitrea in curſore ſeu pinnacidio mobili [Fig. 126]. Tabella alba. Octans diviſus in triadas graduum. AB perpendicularis in tabellam B. Oportet ut imago ſolis B bifariam dividatur a recta quæ mediam tabellam ſecat, utque eadem ab horizonte bifariam dividatur. Octans diviſus in gradus et decima graduum.

---

[1]) Manuscrit F, p. 221—225, datent de 1685 ou 1686.

[2]) Parmi les figures de la Fig. 124 on en voit une où les deux angles au sommet sont respectivement de 60° et de 30°: c'est le „quartier anglais" dont il est question à la p. 371 qui précède.



[Fig. 124.]

[Fig. 126.]

[Fig. 127.]

[Fig. 125.]

Cochlea ad movendum pinnacidium D utiliter adhiberetur qualis in inſtrumentis Hevelianis [1]).

Solis imago diſtincta apparebit et ſemper oculo rotunda. Dummodo lens et oculus æqualiter diſtent. hanc imaginem horizon bifariam dividat.

Den boogh alleen in graden verdeelt [Fig. 127], en aen de loper van 't viſier een koperplaetjen, begrijpende een graed, gedeelt in 12 deelen ieder doende 5 minuten.

[On lit dans la figure:] ſpiegelglas achter ſwart. moſcoviſch glas binnen beroockt rontom toe gemaeckt. of het ſpiegelglas beroockt. proeve om te weten of 't ſpiegelglas wel ſtaet. door de perpendiculaire reflexie langhs BA. het ſtuckje CD daer toe laeten uytſteken. en daernae 't ſelve toe decken.

[Fig. 128.]

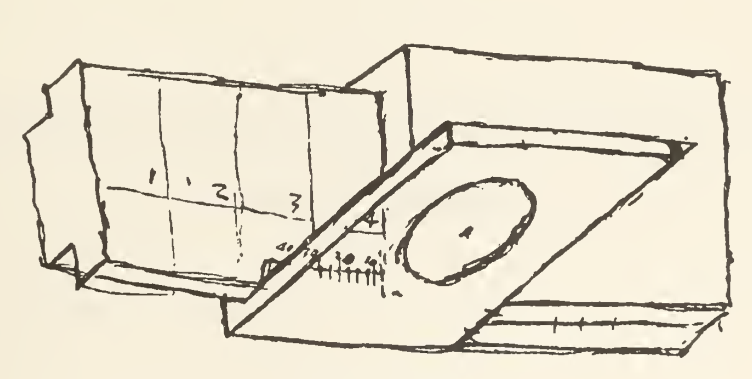


Figure sans texte.

1) La Pars Prior de 1673 de la „Machina Cœlestis" de J. Hevelius — à la p. 6 du T. XVII nous avons dit simplement: „Machina Cœlestis" de 1673; mais la Pars Posterior est de 1679 — traite des „Instrumenta astronomica omnia, quibus auctor hactenus sidera rimatus ac dimensus est, etc.". Les „cochleæ" y sont souvent mentionnées et représentées dans les figures; voir à ce sujet l'„Index Rerum" de la Pars Prior. Le Caput XIV traite „de instrumentorum pinnacidiis, sive dioptris"; l'auteur y explique à la p. 287 „pinnacidiis quâ ratione cochlea sit adhibita".

RÉSULTATS DE QUELQUES EXPÉDITIONS MARITIMES.

RÉSULTATS DE QUELQUES EXPÉDITIONS MARITIMES.

A. L'EXPEDITION DE 1669 DE TOULON À CANDIE ET RETOUR DU DUC DE BEAUFORT ET DE DE LA VOYE [1]).

La Voye [2]) met le retardement journalier d'une minute ſeulement, mais ſon erreur de calcul de 10″ fait voir que ce retardement eſt environ de 1.2″. comme il eſt auſſi par ce calcul depuis le 18 Juin juſqu'au 19 Jul.

Il y a quelque difficultè en ce que la Longitude de Toulon a l'iſle de Maretimo en allant luy ſemble avoir eſte de 23′.40″ (c'eſt a dire en corrigeant ſon abus de 23″, et en diminuant la longitude de 7″ par jour). Et qu'en retournant de Candie la Longitude entre ce lieu et la meſme iſle de Maretimo ſemble n'avoir eſtè [que] de 53′2″. Partant toute la longitude entre Toulon et Candie ne ſeroit que de $1^h.16'.42''$. La quelle pourtant il a trouvée en retournant, de $1^h.19'.13''$, et en allant encore un peu plus grande, ſi l'on regarde ſon obſervation du 18 juin, auquel jour la longitude eſt 1.20.56, qui eſtant diminuée, comme il veut, a raiſon de 7″ par jour depuis le 30 maj. vient $1^h.18'.43''$ et adjoutant 1 min. vers l'Eſt, vient pour le lieu de mouillage et d'ou il compte la Longitude en retournant, 1.19.43.

30 Maj.	$1^h.20'56''$
18 Jun.	2.13
19	1.18.43
7″	1
133 | 2′13″	1.19.43.

[1]) De la Voye retourna seul en France; voir la p. 116 qui précède. Nous avons déjà dit (p. 373) que nous ne possédons plus son rapport. Nous aurions pu dire à la p. 10 que dans le voyage de Candie le poids servant à tenir l'horloge verticale était de plus de 300 livres (T. IX, p. 290).

[2]) La Pièce est empruntée aux p. 208 et 209 du Manuscrit F.

Suivant Lodewijk Huygens de la Voye avait fait d'abord, sans beaucoup de succès, un autre voyage pour éprouver les horloges (T. VII, p. 27). Les „Comptes des bâtiments du Roi" de J. Guiffrey font mention d'un voyage aux Indes: „3 décembre 1669, Sr de la Voye, mathematicien, envoyé aux Indes Orientales pour faire expérience de l'horloge à pendule pour les longitudes 900*fl*; scavoir 600*fl* pour quatre mois de ses appointemens commenceans au 1er décembre et finissans au dernier mars 1670 et 300*fl* pour son voyage et port des pendules et instrumens mathématiques de Paris à la Rochelle". S'agit-il ici d'un voyage *antérieur* à celui de Candie? Cela paraît peu probable.

Mais il faut confiderer que les lieux ou il obfervoit les Longitudes pres de Maretimo le 9 Juin et le 9 Sept. n'eftoient pas a la mefme longitude de Maretimo, puifque depuis l'heure de l'obfervation le navire faifoit du chemin, en forte qu'on peut bien pofer que Maretimo eftoit a l'Eft de Toulon de 24'.40" et a l'Oueft de Candie de 54'.2". Ce qui fait enfemble 1h.18'.42".

Les réfultats de ce calcul diffèrent de ceux donnés dans l'„Horologium ofcillatorium" (p. 118 qui précède), comme l'indique le tableau fuivant:

	Toulon-Maretimo	Maretimo-Candie	Toulon-Candie
Différence des longitudes			
fuivant la Carte de Viffcher	8°10' [2])		
fuivant le Globe de Blaeu [1])			24°30' [2])
fuivant „la Carte du veftibule"			23°30' [2])
fuivant la Carte de de Wit de 1672	6°40' [2])		22°30' [2])
fuivant la Carte de Doncker	5°40' [2])		16°45' [2])
fuivant l'„Hor. ofc." (p. 118)	6°20' = 25 min. 20"	14°10' = 56 min. 40"	20°30' = 1h. 22 min.
fuivant le préfent calcul	6°10' = 24 min. 40"	13°30½' = 54 min. 2"	19°40½' = 1h. 18 min. 42"
fuivant les cartes modernes	6° 9' [3]) = 24 min. 36"	13° 4' [3]) = 52 min. 16"	19°13' = 1h. 16 min. 52"

En 1685 Huygens ne calcule pas, fuivant les données du rapport, la différence des méridiennes de Toulon et de l'île Sapienza [4]). Elle eft fuivant l'„Hor. ofc." (p. 118) de 16°26', fuivant les cartes modernes de 15°46'.

---

[1]) Il s'agit du célébre cartographe d'Amsterdam Willem Jansz. Blaeu (1571—1638).

[2]) C'est à la p. 211 du Manuscrit F que Huygens donne les différences des longitudes entre les endroits nommés suivant les cartes de de Wit de 1672 („Caert van Europa"). de Doncker („Zee-atlas Doncker drukker in 1665"), de Visscher et „du vestibule [de la maison du Plein]" („Caerte van Europa int voorhuijs").

À propos de Doncker Huygens ajoute „foo ick fijn Caerten wel verftaen". En effet, H. Doncker — édition nommée — n'indique pas bien les degrés des longitudes de ses méridiennes. Nous trouvons les mêmes distances que Huygens en admettant, ce qui est douteux, que les degrés des parallèles ont chez Doncker tous la même longueur, savoir celle qu'il indique sur ses cartes par une ligne droite représentant un degré.

Quant à Visscher, Huygens a sans doute eu une autre carte que celle („Europa delineata et recens edita per Nicolaum Visscher") qui se trouve dans l'„Atlas contractus Orbis Terrarum præcipuas ac novissimas complectens tabulas, Amstelodami, ex officina Nicolai Visscher"; car suivant celle-ci nous ne trouvons pour Toulon-Maretimo que 6°20' (et pour Toulon-Maretimo 22°10').

La carte de l'Europe qui se trouve dans l'„Atlas" de Frederick de Wit (tot Amsterdam, in de Calverstraet bij den Dam inde Witte Paskaert) donne pour Toulon-Maretimo 8°50', pour Toulon-Candie pas moins de 25°45'. Ce n'est donc pas cette carte-là que Huygens a consultée. Voir encore sur les cartes mentionnées par Huygens les Additions et Corrections à la fin de ce Tome.

Notons qu'à la même p. 211 du Manuscrit F Huygens donne 6°35' et 19°45' pour

Ce tableau fait voir que Huygens a ſu tirer en 1685 des obſervations de de la Voye des nombres fort approchés des vraies valeurs[5]), meilleurs que ceux publiés dans l'„Horologium oſcillatorium". La différence des méridiennes de Toulon et de Maretimo (voir la note 3) est même parfaitement correcte.

Les 53 min. 2″ trouvées par de la Voye en retournant de Candie à Maretimo s'écartaient encore moins de la vraie valeur que le nombre donné par Huygens. Et en adoptant $1^h.16'42''$ pour la longitude entre Toulon et Candie on aurait été (plus ou moins par haſard) bien près de la vérité.

Dans ſon „Hiſtoire de l'aſtronomie moderne", T. II, 1821, p. 553 Delambre dit qu'on trouve „aujourd'hui" 19°22′34″ou $1^h.17$ min. 30″ pour la différence des méridiennes de Toulon et de Candie.

B. L'EXPEDITION DE 1672—1673 DE J. RICHER À CAYENNE.

Seecker Fransman wiens relatie gedruckt is[6]), ſuſtineert geobſerveert te hebben in Cajana, gelegen aen de Cuſt van Weſtindien 4 graden 56 min. benoorden de Linie Equinoctiael de Lenghde van een ſimpel pendulum wiens ieder ſlagh een ſeconde doet, aldaer minder moet weſen een linie en een vierdepatt (ſijnde een linie $\frac{1}{12}$ part van een duijm), als die tot Parijs ofte oock alhier in Hollandt en Engelandt bevonden werdt, ſijnde op alle deſe plaetſen deſe lenghde de ſelfde, te weten van 3 voet 2 duym en $\frac{1}{3}$ van een duijm. Doch dewijl hij geen circumſtantien van ſijne obſervatien bij en braght ſoo heeft men ſijn ſeggen te beſwaerlycker konnen gelooven, de ſaecke nochtans ſeer aenmerckenswaerdigh ſijnde ten aenſien van onſe ſlingerwercken, dewelcke indien dit waer was . . .[7]).

Toulon-Maretimo et Toulon-Candie d'après les observations de de la Voye. Le calcul du texte donne, comme on voit, des valeurs plus approchées.

[3]) 6°9′ est la moyenne de 6°7′ et 6°11′, valeurs correspondant aux points extrêmes de Maretimo. De même 13°4′ est la moyenne de 13°1′ et de 13°6′.

[4]) On lit encore à la p. 209 du Manuscrit F à propos du même voyage: „En allant Maretimo. Alicate [Licata] en Sicile. 16 Jun. Sapienza inſula a l'oueſt de la Morée. Cap de Matapan de la Morée et a l'oueſt de l'iſle de Serigues [Cerigo]. l'Etandia inſ. [Standia]. — St. Tropés. iſle d'Ieres [îles de Hyères]. Iſle de S. Pierre [S. Pietro]. Golfe de Palme, en Sardaigne. Cap de Tolaſe [Teulada] en Sardaigne. Maretimo. Cap de Paſtaro [Passero] en Sicile. Sapience 4 Sept. L'iſle Serigotte [Cerigotto] en revenant.

[5]) Supposées invariables.

[6]) La Pièce est empruntée à la p. 225 du Manuscrit F, datant de 1685 ou 1686.

[7]) Traduction: „Un certain français dont la relation a été imprimée, soutient avoir observé qu'à Cayenne, située près de la côte de l'Inde Occidentale, à 4°36′ au nord de l'équateur, la

Richer avait publié ſa relation en 1679. On la trouve ſous le même titre („Obſervations aſtronomiques et phyſiques faites en l'iſle de Caienne"; par Monſieur Richer) dans le T. VII de 1729 des „Mémoires de L'Acad. Royale des Sciences, depuis 1666 juſqu'à 1699". L'article I du Chap. X qui traite „de la longueur du pendule à ſecondes de temps" eſt en effet fort bref. L'auteur ne publie aucun protocole, mais ſe contente de dire que „cette obſervation a eſté réiterée pendant dix mois entiers, où il ne s'eſt point paſſé de ſemaine qu'elle n'ait eſté faite pluſieurs fois avec beaucoup de ſoin".

Suivant la p. 275 du T. IX Richer avait été envoyé à Caïenne avec une inſtruction de Huygens.

On voit qu'en 1685 ou 1686 Huygens doutait toujours de la vérité de l'obſervation, quoiqu'il eût calculé déjà en 1666 (T. XVII, p. 285 et 286) la période des oſcillations en tenant compte de la force centrifuge réſultant, peut-être, de la rotation de la terre. Ce doute ſubſiſtait encore en mai 1687 (T. XVI, p. 377).

Vers la fin de 1687, après avoir écrit [1]: „Si terra eſſet ſphærica [2], tum gravitas abſoluta ad vim centrifugam in E [point ſur l'équateur] ſicut 289 ad 1 [3])", Huygens exécute différents calculs ſur le raccourciſſement du pendule. Comme il a publié ſes réſultats quelques années plus tard dans le „Diſcours de la cauſe de la peſanteur", nous ne nous étendrons pas ici ſur cette matière.

Avant d'écrire les lignes citées, Huygens avait reçu le rapport de de Graaf, dont il eſt queſtion dans la Partie C qui ſuit, lequel mit fin à ſes doutes ſur la diminution de la peſanteur réſultant de la rotation de la terre [4]).

Remarquons encore à ce ſujet qu'en juillet 1687 Newton avait publié ſes „Philoſophiæ naturalis Principia mathematica", et que Huygens fit ſans doute immédiatement connaiſſance avec ce livre [5]).

C. L'EXPEDITION DE 1686—1687 DE TEXEL AU CAP DE BONNE ESPERANCE ET RETOUR; RAPPORTS DE HELDER ET DE DE GRAAF.

Le Journal de Th. Helder [6]), ſe rapportant au voyage d'aller, a été conſervé. Nous poſſédons auſſi une copie, de la main de Huygens, du rapport de de Graaf du voyage de retour.

---

longueur d'un pendule simple à secondes est inférieure d'une ligne et d'un quart (la ligne étant $\frac{1}{12}$ du pouce) à celle qu'on trouve à Paris ou ici en Hollande ou en Angleterre, la longueur étant la même partout en ces lieux, savoir 3 pieds et $2\frac{1}{4}$ pouce [mesure de Rijnland; comparez la p. 571]. Comme d'autre part il ne publia pas de récit détaillé de ses observations, on n'a pas été convaincu par son affirmation. La chose serait certes fort importante et constituerait une propriété remarquable de nos pendules lesquelles, s'il en était ainsi ...".

Cassini notamment n'était pas convaincu.

[1]) Manuscrit F, p. 300. Les p. 297 et 311 portent respectivement les dates du 6 novembre et du 3 décembre 1687.

[2]) Comparez le troisième alinéa de la note 7 de la p. 284 du T. XVII et les l. 5—2 d'en bas de la p. 31 qui précède: déjà à la p. 259 du Manuscrit F Huygens avait dit positivement: „formam ſphæricam tellus non habet".

[3]) Comparez la fin de la note 4 de la p. 326 du T. XVI.

[4]) Le 3 octobre 1687 Huygens écrit qu'il est en train d'examiner le Rapport de de Graaf (T. IX, p. 222). Le 1 septembre il ne l'avait pas encore reçu (T. IX, p. 208).

Le début du Journal de Helder, qui compte 25 pages, fait apparemment défaut, puisqu'il va du 24 mai au 26 septembre 1686, tandis que Huygens (T. IX, p. 287) cite e.a. ce que Helder avait rapporté le 20 mai. En outre Huygens dit en octobre 1687 (T. IX, p. 222) avoir reçu un livre de Helder contenant des calculs („boeck van sijne uitreekeningen") en original et en copie de la main de l'auteur, et un autre sur la concordance des horloges allant jusqu'au 2 octobre. Nous ignorons si à sa demande il reçut encore d'autres pièces provenant de Helder; il semble bien que non: consultez le troisième alinéa de la p. 289 du T. IX. Nous ne possédons ni le livre des calculs ni celui des concordances.

Le Rapport de de Graaf débute par un examen (4 pages) de la marche des horloges fait sur terre, du moins pour l'une d'elles, au Cap de Bonne Espérance. Au titre „T'ondersoecken de gangh van de Horologien A en B; of hoeveel dat deselve in een Etmael of 24 uren te ras of te langsaem loopen", Huygens ajoute la remarque suivante: „Om dese manier vande gangh der Horologien te ondersoecken, te verstaen, moet men nae sien de Instructie [T. IX, p. 55—76] bij mij aen de Graef en Th. Helder medegegeven. Dit ondersoeck is geschiet aen de Caep de B. Esper.ce het horologie B aen Landt zijnde".

Vingt-cinq observations de de Graaf se rapportent à B, deux seulement à A. Voici ces deux dernières:

			A
Febr. 3. A	12.37.38	Dito 3.	12.37.38
6. A	12.35.23	7.	12.34.47
	23.57.45		23.57. 9
	0.18		18
	57.27		23.56.51
	6		3
	23.57.33 verachteringh		23.56.54 veracht.
	dagh. 42"$\frac{1}{2}$ [7]		dag^{x}. 46$\frac{1}{2}$

Les calculs pour l'horloge B ont tous la même forme. Voir sur ces calculs, où entrent des nombres tirés de la table de l'équation du temps, la p. 60 du T. IX (ou la p. 208 du T. XVII).

L'horloge B avançait en janvier de près de 3′ par jour; de Graaf corrigea la marche en février et de nouveau en mars en déplaçant un peu le poids du pendule, de sorte que le retard journalier ne fut ensuite que d'une douzaine de secondes.

Le Rapport continue: „Den 20 April. Nadat wij sijn onder Seijl gegaen, soo isser in

---

5) Le 11 juillet il écrit à Fatio de Duillier: „Ayons le livre de Newton" (T. IX, p. 191).

6) Voir sur lui la note 3 de la p. 539 qui précède.

7) En marge: imo 49″; en effet le tiers de 147 est 49; c'est la seule correction apportée par Huygens aux vingt-sept calculs. Du 3 au 6 février l'horloge A retardait donc de 49″ par jour.

de vergadering beſloten, dat men ſoude ſeijlen Noordt Weſt ten Weſten, tot op de Breedte van S. Helena. Maj. 9. Op de Breedte van S. Helena ſijnde heeft men vorders de Coers Noordweſt ten Noorden geſtelt tot op de Breedte van Aſcenſion. De Koers is geſtelt van Aſcenſion tot op de Breedte van 't Eylandt S. Iago [Sao Thiago, une des îles du Cap Vert] N. Weſt [comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 283 du T. IX]". Le 6 juin on réſolut de faire voile vers lè N. N. Oueſt, etc.

Viennent enſuite une dizaine de pages ſur „Het daghelyx verſchil der Horologien A en B" et les „Toevallen ontrent de Horologien". Depuis le 25 mai juſqu'au 15 août la dite différence B — A fut notée preſque tous les matins et tous les ſoirs; de 19'50" elle monta à 93'26". Le premier jour elle augmenta de 28", le dernier de $54\frac{1}{2}$". Le 1 juin de Graaf dit avoir conſtaté „dat met 't ſlingeren van 't ſchip B ongelyck loopt". Le 10 juin il dit: „Bevonden A mede ongelyck te gaen. Wij hebben evenwel geoordeelt de Rekening op A voort te maecken, om dat de ſelve de ſlingher wel 't beſte doorſlingert. Deſe ongelyckheijdt van gangh geſchiet door holle ſee en beſonder wanneer de dijningh van voren komt". Le 24 juin on conſtata que le reſſort du petit barillet de B était briſé: il fut remplacé par un autre [1]). Cette partie du Rapport ſe termine par les mots: „Den 15 dito [c.à.d. le 15 août] op de middagh in Texel (godt lof) behouden met 't ſchip 't wapen van Alcmaer gearriveert A° 1687 [2])".

Dans les quinze dernières pages „Aengaende de vindingh der Lengde" de Graaf calcule la longitude d'après l'Inſtruction le 10 mai, le 27 mai, etc.; la colonne V de la table qui occupe les p. 279—282 du T. IX indique les jours et les réſultats du calcul. Voici p. e. le calcul du 10 mai:

May 10. Geobſerveert de ſon boven den horiz. 5.50, als 't horol. wees op 8.19'.45" uren 'ſavonds.

Compl. ſons h.	84°10'		Uren door 't horol. B [comparez la p. 637].	
Compl. Zuyd. Br.	73.19	0.01868	8.19.45	
Compl. decl.	107.29	0.02055	5.	verachteringh in 20 daghen.
	264.58		8.24.45	
	132.29		16.34	
	59.10	9.93382	8. 8.11	
	25. 0	9.62594	19.22	
		2 19.59899	8.27.38	
		9.79949	6.47.28	
komt ſin.		39 .4 2	1.40. 5	verſchil in Lengde ten W.
		78 .8		

of 5.12.32 uren. dit van
12 uren komt 6.47.28.

[1]) Le reſſort était en cuivre, comme nous l'avons déjà dit à la p. 514 (note 3).

[2]) Remarquons en passant que l'Alcmaer faisait partie d'une flotte (premier alinéa de la p. 286 du T. IX).

Comparez fur ce calcul, conforme à celui de Inftruction, la p. 67 du T. IX. Si l'on appelle, comme dans la note 1 de la p. 226 du T. XVII, h la hauteur du foleil au-deffus de l'horizon, d fa déclinaifon et α l'angle pofitif ou négatif qu'il a parcouru dans fon orbite circulaire à partir du point culminant, on a $\sin h = \sin\beta \sin d + \cos\beta \cos d \cos\alpha$ pour un obfervateur placé à la latitude β. Cette formule peut s'écrire

$$\cos\alpha = \frac{\sin h - \sin\beta \sin d}{\cos\beta \cos d} \text{ ou } \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos(\beta - d) - \sin h}{2\cos\beta \cos d}} \text{ ou bien}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin[45^\circ - \frac{1}{2}(h + d - \beta)].\sin[45^\circ - \frac{1}{2}(h - d + \beta)]}{\cos\beta \cos d}}.$$ C'eft là la formule employée par Huygens qui correspond aux calculs de de Graaf [3]).

Huygens difcute les réfultats dans fon Rapport du 24 avril 1688 (T. IX, p. 272—291). Il explique (p. 287—288) pourquoi les obfervations du voyage d'aller font fans valeur: on n'avait pu déterminer avant le départ combien les horloges avançaient ou retardaient par jour; de plus les poids des pendules baiffaient parfois quelque peu fpontanément par fuite du ballottement du vaiffeau.

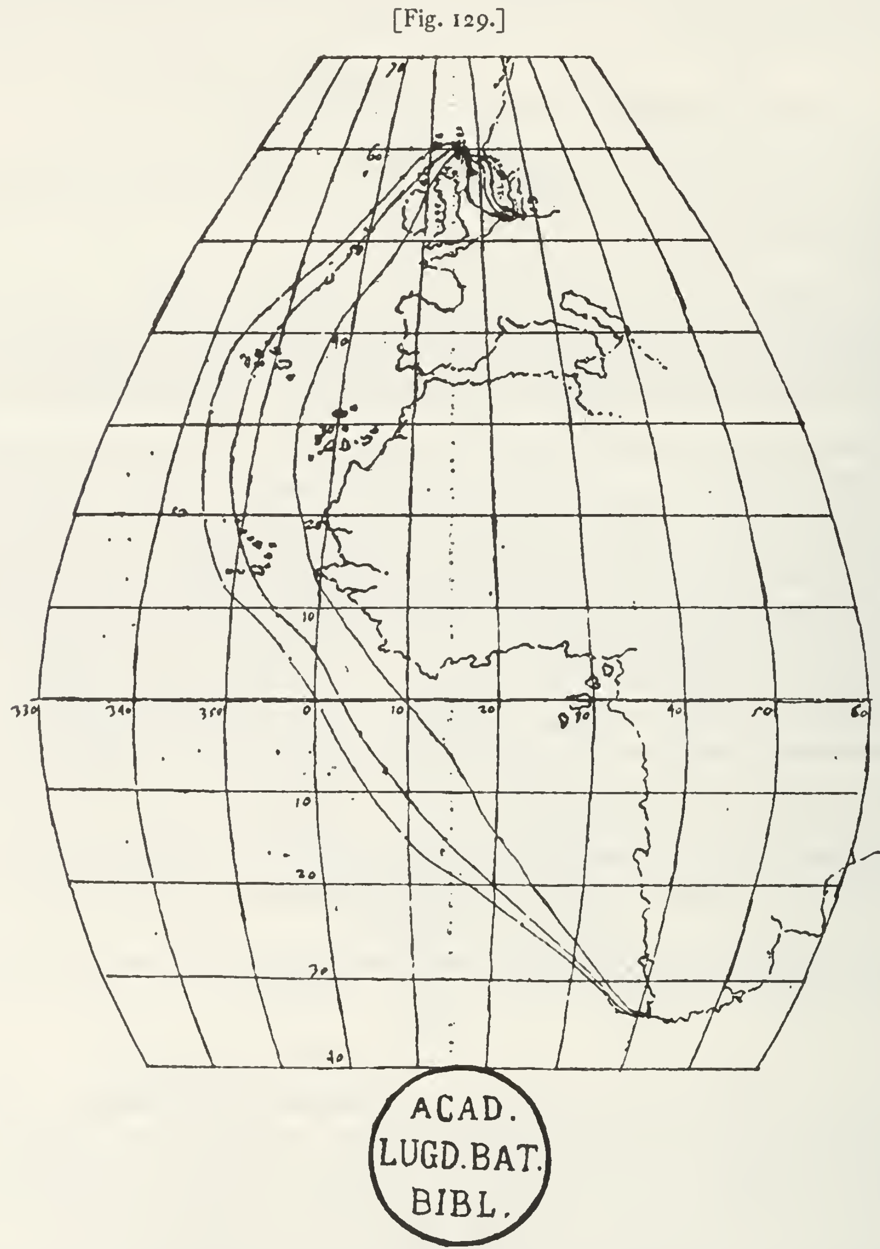
Huygens parle d'accidents de ce genre furvenus le 29 mai et le 3 août et notés par Helder tant dans fon Journal que dans les „Toevallen ontrent de horologien". Dans le Journal nous ne trouvons rien à propos de l'accident du 29 mai. À la date du 24 mai, jour du départ, Helder parle du „lootsman die heel bekommert was dat het fchip mocht kommen te ftooten alfoo er maar een voet water meer was als het fchip diep gingh"; il continue: „Bij de droogen komende gingh bij de horologien zitten en befpuerden oock groote alteraetien aen de horologien in 8 a 9 reyzen dat het fchip grondt raakten maar byzonder de laatfte reys waardoor ze ook heel getroebuleert wierden en de penduleums deed beven zonder duer te flaan". Le 30 juillet l'horloge A s'arrêta parce qu'une des dents de la roue de rencontre s'était déformée. On répara l'horloge détraquée. Helder dit enfuite: „Den 3 augufti s'avonds haakten de flinger af en bevondt dat het lootien van't pendulem was neergezakt. ik heb het dan zo na op de tijkens gezet als ik kon en het weder doen gaan zo bevond ik fmorgens den 4 dat het weer zijn gewone ganck hadt. dit voorval [c.à.d. tout ce qui s'était paffé depuis le 30 juillet] veroorzaakt groote confutzie [confuezie?] in deze zaak".

D'après Huygens (T. IX. p. 273) de Graaf dans le voyage de retour s'eft fort bien acquitté de

3) Le cahier du rapport contient en outre, d'une main inconnue, 6 pages contenant les résultats de l'estime des pilotes de l'Alcmaer. La copie commence comme suit: „Van de bekome Lengtens en Breedtens getrocken uijt een Journaal, komende van de Caap de Bonesperance na 't patria met Alkmaar A° 1687 den 20 April. April 20 lichte ons anker voor zonsondergangh met een klyn luchje, savons t Robbe Eylant op sey etc. dito 21 pijlde smorgens de Tafelberg Z. Z. Oost van ons $2\frac{1}{2}$ a 3 mijlen, voors de heele dagh in stilte gedreven [comparez la p. 283 du T. IX]. dito 22, de gegiste Z. Breten 33:38 min. Lengte 36:42". Etc. jusqu'au 15 août. La latitude est estimée („gegist"), lorsqu'il y a des nuages, mesurée („bevonden") lorsque le soleil est visible.

fa tâche („feer wel en forghvuldigh”). Prefque tous fes calculs furent faits fur l’horloge A qui fe montra la meilleure (T. IX, p. 286); comparez les paffages du Rapport de de Graaf cités plus haut.

[Fig. 129.]



La Fig. 129, empruntée à une feuille féparée qui fe trouve dans le Rapport de Huygens, fait voir, comme la Carte à la fin du T. IX (dont il a déjà été queftion à la p. 544 qui précède), que

les longitudes calculées à l'aide des horloges ſuivant l'Inſtruction ne ſont pas juſtes, mais qu'elles deviennent juſtes, ou peu s'en faut, lorſqu'on tient compte de la diminution de la peſanteur due à la rotation de la terre. Dans les colonnes VI et ſuiv. de la Table du T. IX (p. 279—282) Huygens avait fait une erreur de calcul qui fut remarquée par de Volder (T. IX, p, 341, dernier alinéa); il l'a corrigée dans les deux manuſcrits de ſon Rapport; la Table nommée a les valeurs corrigées [1]). Dans la note 11 de la p. 284 du T. IX nous avons remarqué qu'„il y a erreur" dans la „ſomme 2 uren 59 min. 7 ſec." du 5 août qui conduit au chiffre „1 ure. 12 min. 43 ſeconden" devant trouver ſa place dans la colonne VIII. C'eſt vrai, mais l'erreur n'eſt, ici comme ailleurs, que de 30″ et a été corrigée par Huygens dans la Table; c'eſt pourquoi la colonne VIII donne 1.12.13 et non pas 1.12.43; ceci conformément aux corrections de de Volder (T. IX, p. 342), La correction a toutefois été mal faite par de Volder, nous ſemble-t-il, car au lieu de $2^h.59'7''$ (5 août) nous trouvons $2^h.59'37''$: il eût donc fallu *ajouter* 30″ à $1^h.2'43''$ au lieu d'en *retrancher* 30″ (d'après le dernier alinéa de la p. 284 du T. IX). En prenant donc 1′17″ dans la colonne VII et 1.13.13 dans la colonne VIII, nous obtenons 18°18′ pour le chiffre correſpondant de la colonne IX, qui eſt 18°3′ chez de Volder. On voit encore fort bien dans les manuſcrits de Huygens qu'il avait d'abord écrit 18°11′. Heureuſement de Volder ne s'eſt pas trompé dans le dernier chiffre [2]): il dit (p. 343) que la dernière différence de la colonne IX n'eſt pas 14°1′, comme Huygens l'avait écrit, mais 14°8′. Ici il ajoute donc les 7′ — ou plutôt 7′30″ [3]) — comme il aurait dû le faire partout. Sa concluſion qu'auprès de Texel l'erreur des horloges, lorſqu'on tient compte de la rotation de la terre, ne dépaſſe pas $2\frac{1}{2}$ mijlen (voir ſur la mijl hollandaiſe la note 3 de la p. 231 du T. XVII) reſte valable.

La Fig. 129 ſemble être antérieure à la Carte du Rapport de Huygens; en comparant l'allure des trois lignes, on voit que dans la Fig. 129 elles convergent moins bien vers Texel que ſur la Carte: l'une d'elles ſe termine près de Danemark. Huygens ne doit avoir fait un calcul plus exact que plus tard.

Obſervons que dans la Fig. 129 il ſe ſert du ſyſtème où les rapports des longueurs des degrés des parallèles entre elles ſont exacts, tandis que la Carte du Rapport, empruntée en grande partie à Rembrandtſz. van Nierop (T. IX. p. 285) eſt une „projection de Mercator" (comparez la note 1 de la p. 232 du T. XVII). Aux p. 211 (datant de 1685) et 313 (datant de 1687 ou 1688) du Manuſcrit F on trouve quelques remarques de Huygens reſpectivement ſur la projection de Mercator (qui n'y eſt pas nommé) et ſur les cartes où, „dans chaque parallele les degrez [ſont] egaux et dans la vraije proportion aux degrez de l'Equateur" („projection de Flamſteed").

Nous avons déjà dit à la p. 514 que la preuve expérimentale donnée de la rotation journalière de la terre et de l'exiſtence de la force centrifuge correſpondante a été le réſultat le plus remarquable de cette expédition. On peut toutefois ſe demander ſi elle a pu ſervir de plus, comme celle de 1669, à corriger tant ſoit peu les cartes.

———

1) Elles n'étaient évidemment pas corrigées dans le Rapport préſenté aux Directeurs de la Cie. des Indes Orientales qui fut mis par eux entre les mains de de Volder. La Carte du T. IX ne tient donc pas compte des corrections, mais l'erreur est faible (voir le texte).

2) Il ne s'est trompé, semble-t-il, que dans le chiffre du 5 août, précisément le jour que Huygens prend comme exemple à la p. 284 du T. IX.

3) Dans les manuscrits du Rapport Huygens corrige en effet 14°1′ en $14°8\frac{1}{2}'$: l'erreur diminue ainsi encore un peu plus.

Dans ſon Rapport (T. IX, p. 286—287) Huygens dit que ſuivant la ligne corrigée des horloges l'île Fulo [Foul iſland], ainſi que l'île Fairhil [Fair iſland], les Orcades [Orkney iſlands] et la partie ſeptentrionale de l'Ecoſſe doivent ſe trouver à peu près trois degrés plus vers l'Eſt que dans la carte de Rembrandtſz. van Nierop. La différence des longitudes de Fulo et de Texel ne ſerait pas de 8°, mais de 5° à peine.

Il eſt vrai, ajoute-t-il, que d'autres cartes donnent des chiffres plus bas; ſans avoir vu celle des pilotes, il conclut qu'elle ne donne qu'environ 4° pour la dite différence.

Or, la carte des pilotes avait apparemment raiſon, puiſque les cartes modernes indiquent une différence de 4° à quelques minutes près. Ce que Huygens dit à propos des Orcades etc. eſt également vrai.

Telles qu'elles étaient, les horloges pouvaient donc ſervir, paraît-il, lorſque la mer n'était pas fort agitée, à corriger les cartes par trop défectueuſes. S'il était impoſſible d'obtenir avec elles des réſultats brillants — voir auſſi la note 3 de la p. 646 qui ſuit —, il ſerait cependant exagéré de dire que la valeur de quelques réſultats obtenus — comparez la p. 635 qui précède — fut abſolument nulle.

Remarquons encore que Huygens avait prié Helder de meſurer la longueur du pendule à ſecondes au Cap, ce dont il n'avait pas reçu de rapport (T. IX, p. 292 et 276). La note 1 de la p. 292 dit que peut-être, par quelqu'oubli, la pièce relative à ce ſujet n'eſt pas parvenue aux mains de Helder, puiſqu'elle n'était pas reliée avec le reſte de l'Inſtruction. Il y a cependant à Leiden une copie de l'Inſtruction et de cette pièce, d'une main qui ſemble bien être du dix-ſeptième ſiècle, où la pièce eſt — où plutôt était [1]) — reliée avec le reſte. Helder a fort bien pu avoir eu cette pièce en mains. Quoiqu'il en ſoit, Huygens n'a pas connu de meſure directe de la longueur du pendule à ſecondes au Cap.

D. L'EXPÉDITION DE 1690—1692 DE TEXEL AU CAP DE BONNE ESPÉRANCE ET RETOUR; RAPPORT DE DE GRAAF.

Nous avons déjà obſervé (p. 515) que le Rapport de de Graaf ſur cette expédition n'exiſte probablement plus. Quatre pages de 1692 intitulées „Toevallen ontrent de horologien", écrites et ſignées par de Graaf (comparez la p. 307 du T. IX), ſe trouvent dans le cahier du Rapport de Helder de 1686. Du 20 au 25 mai les horloges étaient à bord du „ſchip de Hoop ten ancker leggende aan de Caap". Elles furent enſuite „op het ſchip Spierdijk geplaaſt om daarnede naar het vaderlant te retourneren".

Nous avons parlé déjà deux fois (p. 513 et 515) des remarques manuſcrites de Huygens ſur le Journal perdu de de Graaf de 1692. C'eſt auſſi de ces remarques, que Huygens envoya à de Volder, qu'il eſt queſtion aux p. 424 et 434 du T. X. Nous les publions ici ſans autres commentaires que

---

1) La reliure étant dans un état de délabrement.

quelques notes. Vers la fin on trouve dans les notes la traduction de certains passages où Huygens parle de la rotation de la terre, et aussi de la nécessité (comparez les p. 515—516 qui précèdent) de construire des horloges ne présentant pas les mêmes inconvénients que celles construites jusqu' alors.

Verklaeringh en aenmerckingen op het Journael van Jo. de Graef en 't geen ontrent de Horologien is voorgevallen in de laetste proeve der Lengdevindingh A° 1690, 1691 en 1692.

Tot confirmatie van 't geen ick in mijn brief aen de Ed. Gr. achtb. Heeren Bewinthebberen hebbe derven verseeckeren, dat het effect van de Horologien geensins soodaenigh is geweest als gemeent is, maer dat sij ter contrarie seer wel precis de Lengdemeting volbracht hebben voor soo veel haer effect bij onvermijdelycke toevallen of bij misverstandt niet belet is geworden, of door misrekeningh verkeert uytgeleijt. soo hebbe ick noodigh geacht hier te raporteeren [1]) 't geen ick soo uijt monde van Mr. de Graef, die de conduite daervan gehouden heeft, als uijt sijn Journalen en aenteyckeningen hebbe bevonden.

1. Het blyck dan eerstelyck uyt het begin van het Journael op de uijtreyse gehouden, hoe dat sedert het ophangen der horologien in 't schip Brandenburgh, van den 22 Dec. 1690 tot den 29 der selve maendt alle devoiren sijn aengewendt om den loop der horologien door de Son te examineren, en op de rechte ure te stellen doch te vergeefs soo uyt d'oorsaeck van het continueel doncker weer, als van de verre distantie van Landt.

Hier door sijn de Horologien sonder dienst te konnen doen gebleven tot aen 't Eylandt S. Jago ontrent Capo Verde.

2. Ondertusschen heeft men bevonden als blijckt uyt de aengeteeckende Toevallen der Horol. pag. 151, 152. 153. dat het horologie B defectueux en geen goedt werck was, hebbende dickmaels stil gestaen en ongelycke beweging van de slinger bethoont, daer het andere A genaemt sich altijds wel hieldt, behalven dat het den 4 Febr. nae een swaere storm bevonden wierdt accidentelijck in sijn ijsere beugels als verhangen en verwart te sijn, ende daerom onmoghelijck niet aen de gangh te hebben konnen blijven. 't Selfde defect van 't horologie B is gedurigh op de verdere reijs aen de Caep en de westreys geobserveert, als oock alreeds in't nemen van de Proef in t Jaer 1687.

3. Aen 't Eylandt S. Jago heeft men der horologien gangh dat is hoe veel daghelijx te ras of te langsaem gaen [2]) tegen de Son beginnen te obserueren volgens myne instructie als pag. 27 van dit Journael te sien is en de manier daervan pag. 77 en 78. En dit van den 26 Maert tot den 1 April, zijnde den 2 April weder van S. Jago ver-

[1]) Leçon alternative: beschrijven.

[2]) Leçon alternative: voor of achtering.

trocken nae de Caep en aldaer gearriveert den 3 Jun. op welcke reijſe ick bethoonen ſal dat de lengde tuſſchen beijde, door de horologien perfect is afgemeten, gelijck Mr. de Graef 't ſelve oock ſoude gevonden hebben, ſonder ſeeckere miſrekeningh, als hier ſal blijcken.

4. Deſe reijſe is in 't breede beſchreven in 't Journael van pag. 27 tot pag. 60. En in 't korte vervat inde Tafel van pag. 67 tot 71. In welcke den inhoudt van ieder Colomne uijt de inſcriptie aen 't hoofdt der ſelve geſtelt te ſien is. Ick hebbe eenighe deſer Colomnen de openſtaende getallen geſuppleert, en in eenighe de verkeerde getallen gecorrigeert, welckers faute bij nae alleen hier uyt is ontſtaen dat Mr. de Graef de correctien van wegen de verſcheyde loop des pendulums nae maeten der Breedte welcke de IX colomne maecken bij abuys geaddeert heeft bij de ure des Lengdeſchils tuſſchen S. Jago en de Caep dat is by de getallen der VIII colomne als hij die moſt aftrecken, en ter contrarię afgetrocken als hij die moſt adderen. Waer van ick de reden in margine van voorſz. Tafel heb aengeweſen, ende de ſelve hier terſtondt noch breeder ſal expliceren, op dat het in 't toekomende voor inſtructie magh dienen.

5. De correctie die ick gedaen hebbe in de getallen van de IX Colomne is van weijnigh importantie, zijnde alleen van 24 ſeconden tijdts, die op den 18 April te veel waeren gereekent, waerdoor tot den 10 Maj. overal deſe 24 ſeconden te veel ſijn, en van hier tot den 28 Maj. noodſaeckelijck weder te weijnigh, gelyck licht kan naegerekent werden volgens den Regel hier op gegeven in mijn Raport van de Proeve des Jaers 1687. Doch deſe faute kan maer $\frac{1}{10}$ van een graed verſchil inde Lengde maecken.

6. Maer het verkeert adderen en ſubtraheren deſer getallen van die van de VIIIste colomne daer ick van geſeght hebbe is van veel grooter belang. Om dan in te ſien dat hier in abuys geweeſt is, ſoo ſegghe dat dewijl de horologien uyt reden van 't omdraeyen der aerde hoe nader de Linie, hoe langſamer gangh kryghen, volgens t geſtelde in mijn gemelte Raport, ſoo is ſeecker dat altijdt als men nae de Linie zeylt van noordelijcker of zuydelijcker geweſt de ure van het horologie uijt deſe reden moet verachteren, en bij gevolgh doen ſchijnen dat de ure der plaets daer men afgeſeijlt is vroeger of minder is alſſe weſen ſoude ſonder deſe vertraegingh. En dat ter contrarie als men verder van de Linie afzeijlt, het horologie moet raſſer gangh krijgen en dienvolgens de ure van de plaets des vertrecks laeter of meerder verthoonen als ſoude doen ſonder deſe verhaeſtingh.

7. Dewijl dan van den 2 April dagh des vertrecks van S. Jago tot den 7 Maj. nae de linie toe geſeylt is, en de Noorder Breedte gingh verminderende, ſoo is het horologie gedurigh verachtert en heeft tot deſe tydt toe de ure van S. Jago vroeger doen ſchynen (ſoo veel deſe reden kon importeren) als het anders ſoude gedaen hebben. Ende was deſe verachtering op den 8 April 0'.35" van een ure als in de Tafel te ſien is. Schynende dan vroeger te zijn aen S. Jago ſoo ſcheen het deſe 0'.35" weſtelijcker te leggen ten reſpecte van de plaetſe des 8 Aprils als het anders volgens het horologie leggen ſoude. Aengeſien nu dat men ooſtelijck van S. Jago was, ſoo ſcheen de ure van

't lengdeſchil deſe o 35" meerder te ſijn als anders ſoude gedaen hebben. En bij gevolgh moeten de o'.35" afgetrocken werden van de ure des Lenghdeſchils ſonder de Correctie tuſſchen S. Jago en de plaets van 't ſchip den 8^{en} Aprils gevonden: in plaets dat M. de Graef die by gedaen heeft[1]), als uyt meergemelte Tafel te ſien is daer hij o'.35" vande 9de col. adderende bij o.12'.47 van de $8.^{ste}$ col. kryght o.13.22 inde 10de in plaets van o.12.12 die ick vinde. Maer waerom dat in t Journael pag. 30. in plaets van deſe o'35" geſtelt werdt 1'.4". weet ick geen reden van.

8. Het ſoude miſſchien klaerder rekeningh maecken als men deſe vertragingh o'35" bij de ure der horologie die t wees ten tyde van d'obſervatie addeerde, ſijnde deſen 8^{en} April geweeſt $5.^{ur}$ 11'8" (als te ſien is pag. 30) om alſoo de ure van 't horologie te hebben die het ſonder dit ſoude geweſen hebben. maer de uytkomſt ſoude deſelfde geweeſt ſijn, want dan de ure aen de Son te S. Jago pag. 30 ſoude gekomen hebben 5.25.28. waer van getrocken 5.37.40 komt o.12.12. gelyck ick in de X^{de} colomne geſtelt hebbe. Deſe verkeerde additie van M^{r}. de Graef van gemelte $8.^{en}$ April is van gelijcken voorgevallen den 4 en 5^{en} Maj.

9. Want alhoewel ſedert den 14 April van de Linie af zuydwaert gezeijlt is, ſoo werdt eerſt op den 10 Maj. de geheele vertraeging van't horologie tuſſchen S. Jago en de Linie voorgevallen en gecolligeert, overtroffen bevonden door de verhaeſting die gecolligeert is van de Linie af tot op dien dagh. Van waer dan voorts die vorderingh aen 't horologie bevonden werdt die ick in de gecorrigeerde IX. col. geſtelt hebbe. Waer door de ure van S. Jago meerder of laeter ſchijnende als anders doen ſoude, ſoo ſcheen het deſe minuten en ſeconden ooſtelijcker te leggen. En ſcheen daerdoor de ure van 't lenghdeſchil minder te ſijn alſſe was, dewijl men met het ſchip ooſtelijck van S. Jago ſich bevondt. Soo dat deſe vorderingh hier moſt geaddeert werden bij de ure van 't lenghdeſchil, gelyck ick gedaen hebbe, in plaets dat M^{r}. de Graef die afgetrocken hadde.

10. Ende ſoude hier weder de ſelfde uytkomſt geweeſt ſijn indien men deſe vorderingh afgetrocken hadde van de ure aen S. Jago volgens het horologie berekent, en dan voort gewerckt volgens de Inſtructie. Het abuys van M^{r}. de Graef is ſoo ick geloof hier uyt ontſtaen dat hij genomen heeft als een generalen regel 't geen ick in mijn Raport van d'eerſte Proeve geſecht hebbe in d'Explicatie der 7e Colomne van de Tafel aldaer. alhoewel het alleen paſte op de voorval van doenmaels, op welcke het wel geappliceert was.

11. Hebbende dan aldus de getallen vande $IX.^{de}$ en $X.^{de}$ Colomne gecorrigeert ſoo

---

[1]) Sur une des trois feuilles séparées qui se trouvent dans cette Pièce et que nous ne reproduisons pas, Huygens écrit encore: Dit deel der Inſtructie ſal in 't toekomende klaerder geſtelt werden. On voit qu'il songeait déjà à de nouvelles expériences.

ſijn die van de XI^{de} oock noodſaeckelijck daerdoor verandert, dewijlſe uyt de getallen vande X.^{de} ſpruijten, nemende voor ieder ure tijdts 15 graeden in lengde.

Maer ſedert den 18 Maj. heb ick de getallen in de X. en XI. col. gesuppleert en op den 13 Jun. oock die vande VIII en IX colom. alles volgens rekeningh gegrond op Obſervatien van M. de Graef. welcke rekeningh bij hem anders uytvallende en eyndelijck op d'aenkomst aen de Caep al te veel van de waerheijdt afgaende, apparentelijck oorſaeck geweest is dat hy de voorſz. getallen open heeft gelaeten.

12. In de XI col. heeft hij de getallen nae behooren geſtelt [1]) behalven de 24 ſeconden die doorgaens te veel of te weynigh heeft, gelyck ick hier te vooren aengemerckt hebbe. Doch deſe getallen vind ick in ſijn Journael geheel anders geſtelt van den 8 April tot den 28 Maj. en merendeels veel te kleijn ſonder dat ick eenighe reden of ordre daer in vinde, als bij ex. dat hij van den 14^{en} Maj. tot den 28 Maj. altijdt ſtelt 3 min. 4 ſec. [2]).

13. In de VIII^{te} Col. heb ick het getal ſpecterende tot den 24 April gecorrigeert ſtellende 0.18.32 in plaets van 0.22.48 t welck miſrekent was, als aengeweſen heb in t Journael pag. 37.

14. Alle deze noodſaeckelijcke verbeteringen in de Tafel van 't Journael gemaeckt en beweſen hebbende, ſoo ſiet men dat de Lenghde tuſſchen 't Eyland S. Jago en de Caep de B. Eſp^{e}. door de horologien is gevonden van 48 gr. 14 min. [3]). En om dat volgens de Caert van N. Viſſcher [4]) hier nevensgaende S^{t}. Jago 7 graden weſtelijcker leght als de Pico de Teneriffe, daer het begin der Lengden geſtelt werdt, ſoo komt de lengde van de Caep 41 gr. 14 min. t welck ſeer net met de voorſz. Caert over een komt.

15. Maer der Stierhuyden giſſingh is ſeer afgedwaelt. Want nae ick bemercke uijt haer Breedte van den 28 Jun. anno 1692 in t Journael vande weerreijs, pag. 109, ſoo leght in haer Caert de Caep op de lenghde van ontrent 38 gr. gelijck ick ſulx mede uijt het Journael van de Reijs van A° 1687 bevonden hadde. Maer nae haer rekeningh ſoo waeren ſij den 2 Jun. op de Lengde van 44 gr. 0'. en den 3 Junij, doen ſij den Tafelbergh 9 mylen Ooſt N. Ooſt van haer ſaghen, op de lengde van 45 gr. 42 min.

---

[1]) En marge: Correctie anders in 't journael.

[2]) En marge: 0.1.4 .. 8 *Apr.*; 0.1.22 .. 11 *Apr.*; 2.17 .. 18 *Apr.*; 3.4 .. 23 *Apr.*; 3.7 .. 24 *Apr.*; 2.41 .. 30 *Apr.*; 1.45 .. 4 *Maj.*; 1.45 .. 5 *Maj.*; 0.11 .. 10 *Maj.*; 3.4 .. 14 *Maj.*; *vergeten* .. 18 *Maj.*; 3.4 .. 20 *Maj.*; 3.4 .. 23 *Maj.*; 3.4 .. 24 *Maj.*; 3.4 .. 28 *Maj.*; *vergeten* [corrigé en 3.4.]. 3. *Jun. Dese correctie van wegen d'ongelijcke gangh na mate der breedte heeft de Graef in 't Journael, contrarie als in sijn Tafel, sonder reden of ordre.*

[3]) La différence des longitudes du Cap et de Sao Thiago n'étant que de 42° environ suivant les cartes modernes, on voit que le résultat déduit par Huygens des observations avec les horloges, était en réalité peu satisfaisant.

[4]) Voir la p. 435 du T. X et la p. 634 qui précède.

volgens mijn aenmerkingen in margine van pag. 57 en 58. en daer bij gedaen 40′ minuten voor de voorfz. 9 mijlen. foo vondenfe de Caep op de Lenghde van 46 gr. 22′ min. in plaets van de 38 gr. daer fe leght in haer Caerte, foo dat fij 8 gr. 22 win. over landt feylden gelijck men dat noemt zijnde alhier op defe Breedte over de 100 duytfche mylen.

Doch nae de Caert van N. Viffcher was haer dwaling minder en maer van 5 gr. 22 min. En daerom ftaet te bedencken of defe Caert niet naeder de waerheijdt is als die vande O. Ind. Compagnie die fij gebruyckt hebben. Want geen van beijde tot noch toe op feeckere demonftratie gegrondt fijn.

16. Ick hebbe in myn bygaende Caerte [5]) de tweederhande Courfen van 't fchip Brandenburg afgeteyckent d'eene volgens de Stierluijden giffingh met de roode linie, d'andere volgens de metingh der Horologien met de fwarte, en dat volgens de Breedten inde Eerfte Colom, en Lengden inde 2de en 11de Col. der meergemelte Tafel foo dat op ieder dagh dat de Langhde berekent is, de plaetse van 't fchip in beyde linien fijn aengewefen. Alleenlyck heb ick op den 23 April en den 4 Maj. de plaetfe daer het fchip naer 't horologie geweeft foude fijn daer de XX ftaen, een weynigh buyten de fwarte linie gelaeten; fijnde nae apparentie hier iet gemift is [6]) door de fons hooghte niet precijs genoch geobferveert te hebben, dewijl het fchip niet wel foo fchielijck in eenen dagh door de ftroom verfcheijdelijck kan gedreven werden. Daerom heb ick de linie niet door de X getrocken, maer wel door de naefte plaetfen van den 24 April en 5 Maj. die fekerder fijn om dat beijde door 't obferveren der fonne in den horizont verkregen fyn als men fiet pag. 36 en 42.

17. Hier is nu aenmerckens waerdigh hoe veel defe 2 Courfen van malkander fomtijdts afgaen, waer van indien iemandt dencken mochte de faute van 't horologie oorfaeck te fijn, foo foude ick feggen fulx weynigh waerfchynelyckheydt te hebben. Want fijnde de Lengde tuffchen S. Jago en de Caep, foo net bij 't horologie afgemeten, foo foude het feer felfaem fijn dat nu te ras en dan weder te langhfaem gegaen ware, en evenwel de fomme het felfde als een eenparighe gangh foude uijtgebracht hebben.

De reden dan van de verfcheyde loop der waere Cours, fal voortgekomen fijn uijt eenighe en ongevoelycke vloeden of ftroomen. Men weet datter een gedurighe generale ftroom der zee is van Ooft nae Weften, en het blijckt dat het fchip eenighe ftroom tegen gehadt heeft doordien, dat vanden 19 April tot den 9 Maj. (in welke daghen de meefte kromte in de Cours nae de Horologien voorgevallen is), de gevonden Breedten volgens 't Journael doorgaens kleynder geweeft fijn als de gegifte. Want hier uyt hebben de ftierluyden moeten befluijten dat de ftroom haer noortwaerdt aen

---

[5]) Nous ne possédons plus cette Carte.

[6]) Ce mot est de trop.

ſette, maer hoe veel deſelve haer weſtwaert dreef konden ſij onmoghelijck niet mercken, alhoewel ſulx abuſievelyck bij Willebr. Snellius[1]) en andere gemeent werdt.

Zijnde dan waerſchynelyck de waere Cours langhs de ſwarte linie geweeſt, ſoo ſiet men hier door de noodſaeckelyckheyt[2]) van de Inventie dewijl ſoo groote misrekeningen der Stierluyden als hier voorgevallen ſijn van 5. en 6. ja 8. graden in Lenghde dickwils oorſaeck ſouden ſijn van 't verlies van ſchip en alles.

Dus verre het gepaſſeerde op de heenreys nae de Caep onderſocht hebbende, ſoo ſal ick voorts de redenen aanwijſen waerom de Horologien op de weerreijs A° 1692 geenſins den gewenſchten dienſt hebben konnen doen. Van welcke redenen de voornaemſte en alleen ſuffiſant om ſulx te beletten is geweeſt dat Mr. de Graef bij misverſtandt de horologien niet en heeft opgehangen in 't ſchip Spierdijck gelijck in 't ſchip Brandenburgh op de heenreyſe gedaen hadde volgens den 3e artic. van mijne Inſtructie maer ſoodanigh dat noodſaeckelijck niet alleen ieder in ſich ſelfs moſten ongelyck gaen maer oock malkanders gangh turberen en bederven. Volgens mijn Inſtructie moſten de yſere beugels vande Horologien ieder apart aen 't verdeck of ſolderingh onbeweeghelijck vaſt geſchroeft of geſpijckert werden om de redenen daer bij gevoeght. Maer Mr. de Graef dit niet gedenckende heeft in 't Schip Spierdijck een Hockjen doen timmeren, en de Horologien daer in opgehangen op deſe manier, ſoo hij mij 't ſelve mette pen in 't rouwe afgeteyckent heeft [Fig. 130]. De ſyde van 't hockje, ABDC quam tegen de ſijde van 't ſchip. Het bovenſte ACHF was met ſeyldoeck teogeleijt. De deur was KL. De ribben daer de Horologien P en Q met haer beugels aen hinghen KM, ON. Soo dat als men de deur in quam men aen weer ſijden de wijſers hadde tegen over malkander komende.

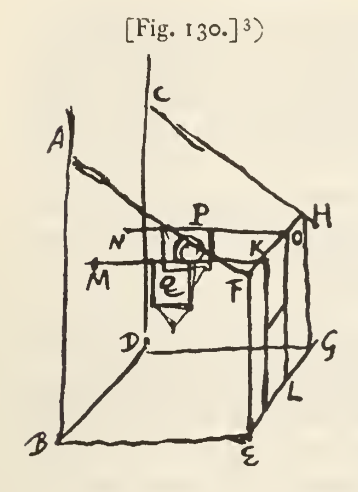
Dit ophanghen hadde geenſins de vaſtigheydt die de ſlingers der horologien vereijſchen, want ſij de kracht hebben, gaende als hier parallel met de linie BD, van aen dit geheele geſtel eenighe bewegingh te geven (alhoewel t eenemael onſienelijck), welcke ick door vele experimenten bevonden hebbe de gelycke gangh der horologien te bederven, en voornamentlijck als deze bewegingh van 't een aen 't ander als hier gecommuniceert kan werden.

Dit abuijs in 't hanghen der horologien heeft Mr. de Graef niet konnen ontkennen, en was hem leet. Sed errare humanum eſt. Alleenlijck verwondert my dat hij de ongewoon groote uytſpoorigheydt der horologien op de reys bemerckende, niet bedacht

[1]) La Prop. XI du Lib. II du „Tiphys Batavus" de 1624 de W. Snellius est ainsi conçue: „Si loxodromiam aliquam et ejus quantitatem, æstimationem tuam secutus, exinde latitudinis evariationem ab observata diversam deprehendas, crure mecodynamico [voir sur cette expression la Prop. XXII du Lib. I] secundum æstimatum cursum retento latitudinem in observatum parallelum transferes, & hinc longitudinis differentiam investigabis".

[2]) Leçon alternative: nuttigheydt.

[Fig. 130.] [3])



heeft dat die een fonderlinghe reden moft hebben, dewijl fomtydts (als tuffchen den 27 Jul. en 9. Aug. ontrent de Linie fijnde) het befte der 2 horologien tot 10 minuten dat is $\frac{1}{6}$ van een ure daeghs te langfaem gegaen heeft, als men de Lengde door t felve berekent compareert met die van de Stierluijden in den tijdt van de felve daghen vertiert [4]). Welcke groote afwijcking van haeren gangh in defe horologien buijten extraordinaire oorfaeck anders gansch onmoghelijck is. Ick hebbe gedacht of den draet van t Pendulum iets doorgefchoten mocht geweeft fijn, en daer door de bewegingh langfamer geworden, maer dat en kan alleen de reden niet geweeft fijn dewijl ick vinde dat het horologie daer nae, te weten van den 9. Aug. tot den 6 Sept. maer 7 min. 8 fec. daeghs verachtert is, en van den 6 Sept. tot den 8 Oct. maer 5 min. 21 fec. daeghs. Want het pendulum kan niet weer korter worden, om 5 minuten in een dagh fijn gangh te verhaeften. Soo dat defe groote ongelyckheydt, voornaementlyck uijt het qualyck hangen voortgekomen is. en ontrent de Linie grooter als elders is geweeft miffchien om dat hoe grooter hitte hoe loffer dat dit geftel van 't hockje geworden is door 't inkrimpen van 't hout. Hier nu bij komende de flechte conftructie van 't Horologie B en het breecken en laffen der veeren, foo kan men niet vreemdt vinden de weynighe correfpondentie tuffchen dit en 't horologie A in de Toevallen [5]) aengemerckt. foo in defe weerreys, als aen de Caep de Bonne Efp.ᵉ, alwaer fe in een diergelijck hockje, en op gelycke wijfe waeren opgehanghen [6]).

Ick hebbe dan bethoont dat de Horologien of met goedt fucces gedient hebben, of niet in ftaet geweeft fijn om fulx te konnen doen.

Voorts is te confidereren dat door de nette uijtkomft der Lengdemetingh tuffchen S. Jago en de Caep nu voor de 2ᵈᵉ mael geconfirmeert werdt de nieuwe Correctie van den loop der Horologien uijt het omdraeyen der aerde fpruijtende, welcke ick te vooren door demonftratie bewefen hadde te moeten foodanigh fijn volgens de Leges Mechanices [7]). Want in de reyfe van 1687 heeft defelve fich mede feer blijcke-

---

[3]) Comparez la figure de la p. 396 du T. X.

[4]) Suivant van Lennep (voir la note 1 de la p. 652) „vertieren" se disait anciennement dans le sens de „voortgaan [avancer]".

[5]) Comparez la l. 8 d'en bas de la p. 642 qui précède.

[6]) A bord du vaisseau de Hoop (p. 642).

[7]) Voir la partie *B* qui précède.

lijck verthoont. Soo dat men nu wel voor vast houden magh dat met wat horologien die met gewight gedreven werden, of daer pendula aen komen, de Lengde metingh t'eenigher tydt sal getenteert werden, noodsaeckelijck dese Correctie moet in acht genomen en gebruyckt werden. Dewijl sonder die te gebruycken veele graden in lenghde konnen gemist werden [1]).

Van gelijcken is de rekeningh vande vereffeningh des Tijdts vanwegen de Sons loop, door deze en de voorgaende voiages genoegsaem bewesen nae behooren te sijn gestelt, waer aen minder konde getwijffelt werden [alinéa biffé].

Aengaende nu dese horologien die tot noch toe geemploieert sijn soo is te weten datse de eerste van dese form sijnde en in 't begin anders met spirale veeren aen den onrust gemaeckt, daernae hermaeckt en 't onderste boven gekeert, geensins soo goedt sijn als mense van nieuws soude konnen maecken. Want oock van grooter en stercker werck souden moeten wesen, dewijl d'Experientie dit genoegh te kennen geeft [2]).

En is nochtans te noteren dat het horologie A maer eens op de heenreys door accident heeft stil gestaen in een storm, sijnde in de buijtenbeugels verwert: t welck licht kan voorkomen werden: en eens in de weerreijs door een onbekende oorsaeck, maer die ick vermoed van 't onvaste gestel daer t in hingh onstaen te sijn. Maer tusschen S. Jago en de Caep is het altydt gaende gebleven. Soo goedt nu als A was, kon B mede gemaeckt werden ja beter.

Een dingh is hier in moeielyck, te weten dat het schijnt dat in de heete Climaten de veeren der horologien soo groote als kleijne niet alleen verslappen, maer oock tot breecken meer als anders subject sijn, waertegens niet wel andere remedie is als eenighe voor provisie mede te nemen, om in plaets van de bedorven of gebroocken in te voegen. t welck op dese laetste reijse is versuijmt [3]).

---

[1]) En marge (et biffé en partie): Correctie geconfirmeert de 2de mael, is in alle Horologien te observeren. Moet soo wesen door noodsaeckelyke reden dewijl seecker genoegh is dat de Eerdkloot om draeijt [Traduction: „Cette correction, confirmée pour la deuxième fois, doit être observée dans toutes les horloges. Il doit nécessairement en être ainsi puisqu'il est bien certain que la Terre tourne". — Dans une des feuilles mentionnées dans la note 1 de la p. 645 Huygens parle aussi de la certitude de la rotation de la Terre].

Rekening oock goedt van de vereffening des Tijds, die men niet kan missen.

Wercken gemaeckt en hermaeckt [comparez la note suivante]. A goedt ergo B kan oock soo goedt sijn. Beyde beter en van grover werck. Veeren schijnen te verslappen. [Traduction: „Les horloges faites et refaites. A est bonne, donc B peut être également bonne. Construire l'une et l'autre mieux et plus solidement. Les ressorts semblent perdre leur force"].

[2]) Traduction: „A propos des horloges employées jusqu'ici, il faut savoir qu'étant les premières de cette forme et ayant été faites d'abord autrement, avec des ressorts spiraux au balancier, puis refaites et tournées sens dessus-dessous, elles ne sont aucunement si bonnes que les neuves qu'on pourrait construire. Elles devraient aussi être construites plus grandes et plus fortes: c'est ce que l'expérience fait bien voir". Comparez le § 6 à la p. 533 qui précède.

Maer 't geen de meeste moeijte geeft in de practijck [4]) van dese Inventie is dat men de Horologien haer gangh van nieuws moet tegens de Son observeren nae dat men die in 't schip opgehangen heeft: twelck niet wel anders kan geschieden als door gespannen draeden in de meridiaen aen Landt. Soo kan dit door donckere lucht, verheydt van Landt, of gebreck van tijdt dickwils belet werden, gelijck in 't nemen van beyde de Proeven gebleecken is [5]).

Om dan dese Inventie te perfectioneren soo moet men middelen uijtvinden waer door dit inconvenient en oock het voorgaende moghen ontgaen werden 't welck niet onmoghelyck is en ick geloof tegenwoordigh niet verre daer van af te sijn, als mede om den tijdt veel netter als door gemelte horologien aftemeten [6]).

Dese en andere inconvenienten van de tot noch toe geemploieerde horologien considererende soo heb ick gedacht op middelen . . . [7]).

E. QUELQUES REMARQUES SUR LA DÉTERMINATION DES LONGITUDES AVEC LES HORLOGES OU PAR L'OBSERVATION DES SATELLITES DE JUPITER; ETC.

Le résultat de l'expédition de 1690—1692 fait bien voir combien Huygens était optimiste [8]) lorsqu'il écrivait (en ou vers 1686) à la p. 207 du Manuscrit F: „Door dit middel der uyrwercken

---

[3]) Traduction: „Il y a ici la difficulté suivante: il semble que dans les climats chauds les ressorts des horloges, grands et petits, ne perdent pas seulement leur force, mais sont aussi plus qu'ailleurs sujets à se briser, à quoi il n'y a pas d'autre remède que d'en prendre quelques-uns avec soi pour pouvoir remplacer par eux les ressorts gâtés ou brisés. Ce qu'on a négligé de faire dans ce dernier voyage".

Remarquons que dans cette expédition les ressorts étaient probablement en acier: voir les dernières lignes de la p. 289 du T. IX.

[4]) Leçon alternative: in t gebruyck.

[5]) Traduction: „Mais ce qui fait le plus de difficulté dans la pratique de cette invention, c'est qu'il faut de nouveau comparer la marche des horloges avec celle du soleil après qu'on les a suspendues à bord; comparaison qui ne peut être bien faite, avec des fils tendus dans le méridien, qu'à terre. À bord elle peut souvent être empêchée par l'obscurité de l'air, par la grande distance de la terre, ou par le manque de temps, comme cela est apparu dans les deux expéditions".

[6]) Traduction: „Pour perfectionner cette invention, il faut donc trouver des moyens pour éviter cet inconvénient et le précédent, ce qui n'est pas impossible; je crois même n'en être pas loin. Il faut aussi tâcher de mesurer le temps beaucoup plus exactement qu'avec les horloges mentionnées".

[7]) Traduction: „Considérant ces inconvénients, et d'autres, des horloges employées jusqu'ici, j'ai songé à des moyens . . . ."

[8]) Nous voulons dire qu'il exagérait les qualités des horloges A et B de 1685.

al waeren die geenſins ſoo perfect als ſe ſijn de lengden te meten, is altijdt veel ſeeckerder als door de gewoone giſſingh. want men ſiet dat door deſe giſſing in 2 of drij daghen de ſtierluyden ſomtydts 10 of 12 mijlen mis rekenen, daer een horloge als 't al 10 ſeconden daeghs miſte, t welck in deſe wercken niet te vreſen is [!], ſoo ſoude het in 3 dagen ten hooghſten maer 2 mijlen faute geven. waer by noch komt, dat de ſtroomen noch het wraecken van 't ſchip [1]), geen dwalingh en kan veroorſaecken".

Quant à la perfection des horloges, notons que de Volder dans ſes remarques de 1689 (T. IX, p. 343) parle de la dilatation du pendule par la chaleur [2]) à laquelle Huygens, comme on ſait, n'attachait pas beaucoup d'importance: comparez la note 2 de la p. 66 du T. XVII et la p. 25 du préſent Tome.

Les cartes, comme la p. 634 le fait voir, laiſſaient encore beaucoup à déſirer [3]). Dans ſon Rapport de 1688 (T. IX, p. 273, 274, 290, 291) Huygens préconiſe, après Galilée, la détermination des longitudes ſur terre par l'obſervation des ſatellites de Jupiter. Les tables de Caſſini de 1668 — elles furent corrigées plus tard — n'étaient cependant pas ſi bonnes qu'il le penſait (T. IX, p. 274): ſuivant les cartes modernes le Cap de Bonne Eſpérance n'eſt pas à l'Eſt de Paris de 18°, comme Guy Tachard l'avait trouvé en ſe ſervant de ces tables, mais ſeulement de 16°10′.

Mais nous ne pouvons nous étendre ici ſur l'hiſtoire de la géographie ni ſur celle des expéditions maritimes, dont traitent un grand nombre d'auteurs [4]).

---

[1]) Il est vrai, comme le dit Huygens, que les courants [stroomen] ne causent pas d'erreur lorsqu'on détermine la longitude avec les horloges (comparez la p. 230 du T. XVII). En est-il de même du „wraecken van het schip"? Le verbe „wraecken" ici employé ne se trouve pas dans le „Middelnederlandsch Woordenboek" de E. Verwijs et J. Verdam. W. à Winschooten („Seeman", Leiden, J. de Vivie, 1681) dit que „wraacken" signifie „se mouvoir irrégulièrement" (sig ongestaadig beweegen), p.e. „de waagen wraeckt in het spoor" = „la voiture balance, heurte" (de wagen slingert, schokt) dans l'ornière. Il s'agirait donc d'un ballottement du vaisseau. Mais J. van Lennep dans son „Zeemanswoordenboek" (Amsterdam, Binger, 1856) écrit: „wraken, afdrijven, van streek gaan. Het schip wraakt of heeft wraak". D'après cet auteur le verbe signifie donc que le vaisseau (quoiqu'il n'y ait pas de courant) n'avance pas seulement dans la direction voulue (comparez sur le mot „streek" la note 1 de la p. 232 du T. XVII), mais prend de plus un mouvement latéral. Il est évident que ce mouvement ne cause pas d'erreur lorsqu'on se sert des horloges.

„Wraecken" se disait aussi de la boussole: ici il ne s'agit pas non plus d'un mouvement irrégulier de l'aiguille mais de sa déclinaison, c.à.d. de l'angle qu'elle fait avec la direction sud-nord. „Ons volck voer aent Lant om te sien hoe veel de naelde van 't Compas wraeckte .. Aengaende de wraeckinge des Compas waerom ons volck aen 't Landt ghevaren waren om dat perfect te meten werde bevonden dattet scheelt 16 graden" (G. de Veer à la p. 18 v. de sa „Waerachtige Beschrijvinghe van 3 Seylagien ter wereld noyt soo vreemt ghehoort etc.", Amstelredam, C. Claesz. 1605; p. 53—54 du T. I de l'édition de 1917, par S. P. l'Honoré Naber, La Haye, M. Nijhoff, des „Reizen van Willem Barents, Jacob van Heemskerck, Jan Cornelisz. Rijp en anderen", publication de la „Linschoten-Vereeniging").

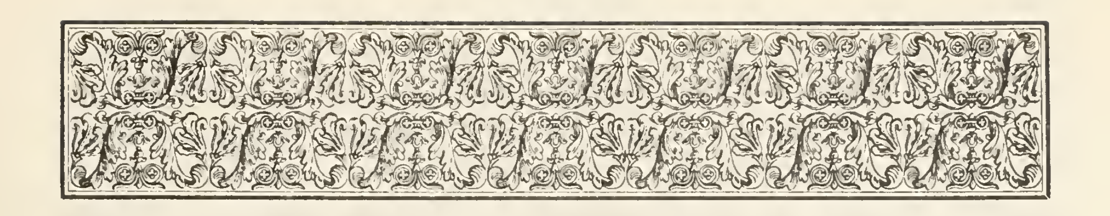
[2]) Le pendule triangulaire de 1685 et des années suivantes était partiellement rigide (voir la p. 514).

[3]) Mentionnons aussi que la „Geographia et Hydrographia reformata" de J. B. Riccioli (Bononiæ, ex typ. hæredis V. Benatij, 1661) donne (p. 407 et 423) pour la différence des longitudes de Candie et de Toulon 51°32′ — 28°36′ = 22°56′.

[4]) Nous avons nommé (p. 371) la „Hakluyt Society"; qu'on nous permette de mentionner aussi les publications de la société correspondante néerlandaise, la „Linschoten-vereeniging" (comparez la fin de la note 1).



ANECDOTA.



Avertiſſement.

Nous terminons ce Tome par la publication des „Anecdota" déjà pluſieurs fois cités dans les Tomes précédents[1]). Il faut bien que ce petit manuſcrit ſoit publié quelque part intégralement et comme à peu près la moitié du texte ſe rapporte aux horloges, et qu'il y eſt auſſi queſtion de la chute des corps et de la force centrifuge par la conſidération de laquelle ſe termine l'„Horologium oſcillatorium", c'eſt ici, nous ſemble-t-il, qu'il faut le placer.

Les „Anecdota" ou „pièces inédites" datent d'une des dernières années de la vie de Huygens, puiſqu'il y eſt queſtion de ſes manuſcrits ſur la relativité du mouvement (voir les p. 195 et 213—231 du T. XVI). Le titre ne ſe rapporte évidemment qu'à ce qui précède le paragraphe ſur Saturne, puiſque les travaux ſur cette planète, ainſi que l'„Horologium" et l'„Horologium oſcillatorium", avaient été publiés.

Nous ne ferons aucune obſervation générale ſur la partie conſacrée aux horloges ni ſur ce que Huygens dit de ſes ouvrages ſur les corps flottants, la dioptrique, la théorie du choc et les phénomènes de Saturne. C'eſt excluſivement ſur la relativité du mouvement et ſur la force centrifuge, ſujet qui s'y rattache, que nous dirons ici quelques mots.

---

[1]) T. VII, XV et XVI.

Le lecteur de ce Tome [1]) a vu qu'en ſeptembre ou octobre 1687, lorſque Huygens eut étudié le rapport de de Graaf ſur le voyage de cette année du Cap de Bonne Eſpérance à Texel, ſes doutes ſur l'exiſtence d'une force centrifuge provenant de la rotation de la terre s'évanouirent. La rotation journalière de la terre, avec une viteſſe angulaire déterminée, devint par là pour lui une réalité inconteſtable. C'eſt ce qu'expriment p.e. l'avant-dernier alinéa de la p. 224 du T. XVI et divers paſſages du livre poſthume, le „Cosmotheoros" [2]). À la p. 647 du T. II des „Opera mechanica etc." (éd. 's Graveſande de 1751) on lit (Lib. I du Cosmotheoros): „Atque erunt quidem, qui cum Geometriam aut Mathematicas nunquam attigerint, omnino vanum ac ridiculum hoc inceptum noſtrum cenſebunt. Incredibile enim iis videtur, ut Siderum diſtantias, aut quæ ſit magnitudo eorum, metiri poſſimus. Tum vero motum huic Terræ aut falſo adſcribi exiſtimant, *aut nequaquam adhuc probatum eſſe* [nous ſoulignons]"; à la p. 651, après avoir dit que la diſtance de l'étoile polaire au pôle eſt variable, Huygens continue: „Ut proinde cælum totum, ſi circumrotari dicatur, ſuper alio atque alio axe id faciat neceſſe ſit, *quod eſt abſurdiſſimum*".

En écrivant: „Motum non alium quam relativum dari. etiam vertiginis motum relativum eſſe. contra Neutonum." Huygens ne veut donc pas dire qu'on pourrait raiſonnablement parler d'une terre immobile. Ce qu'il ſoutient c'eſt que la rotation journalière doit être conſidérée comme une rotation de la terre *ſur elle même* [3]), qu'il ne faut pas l'appeler rotation *par rapport à l'eſpace*: voyez les paſſages cités dans la note 5 de la p. 198 du T. XVI. Aucun mouvement ſelon lui n'eſt un mouvement par rapport à l'eſpace; tout mouvement eſt celui d'un corps par rapport à d'autres corps ou des parties d'un corps les unes par rapport aux autres. „Ut motus circularis ſit relativus partium etc. An autem corpora duo inter ſe relative moveri poſſunt quorum eadem manet diſtantia? Ita ſane etc.". (T. XVI, p. 232).

Il ne s'agit pas ici de diſcuter la queſtion de ſavoir ſi cette opinion de Huygens eſt ſenſée ou non, mais ſeulement d'établir que telle était, dans les dernières années de ſa vie, la manière de voir qu'il oppoſait à celle de Newton. Nous avons déjà dit dans le T. XVI (p. 198, note 5) que, tout en niant le mouvement par rapport à l'eſpace — „nullus eſt mutatio loci reſpectu ſpatij mundani"; „motus inter corpora

---

[1]) Voir les „Résultats de quelques expéditions maritimes".

[2]) Le „Cosmotheoros" fut prêt pour l'impression vers le 1 janvier 1695 (T. X, p. 703).

[3]) Comparez l'expression grecque „ἐν τῷ αὐτῷ στρέφεσθαι" (Platon, Θεαίτητος, XVIII).

relativus tantum eſt" (T. XVI, p. 215 et 232) — Huygens ſemble néanmoins attribuer, ſi non aux directions des mouvements, du moins aux changements de ces directions, un caractère abſolu.

Cette négation du mouvement par rapport à l'eſpace eſt d'ailleurs chez Huygens antérieure à l'apparition (en 1687) des „Principia" de Newton; il ſerait par conſéquent impoſſible de l'attribuer ſimplement au déſir de contredire l'illuſtre anglais. En août 1669 Huygens écrivait (T. VI, p. 481): „Selon moy le repos et le mouuement ne peuvent eſtre conſiderez que relativement, et le même corps qu'on dit eſtre en repos a l'egard de quelques uns, peut eſtre dit ſe mouuoir à l'egard d'autres corps, *et meſme il n'y a pas plus de realitè de mouuement dans l'un que dans l'autre* [nous ſoulignons]", et probablement vers le même temps (T. VI, p. 327) „que le mouvement d'un corps peut eſtre *en meſme temps veritablement egal et veritablement accelerè ſelon qu'on raporte ſon mouvement a d'autres differents corps*" [4]. Il ne s'agit donc pas ſeulement de la relativité des mouvements uniformes, mais auſſi de la relativité des mouvements accélérés. D'ailleurs cette dernière relativité fait ſon apparition déjà en 1659: dans le Traité ſur la Force Centrifuge le petit corps qui ſe détache du bord de la roue tournant uniformément (le peſanteur étant exclue) — T. XVI, p. 260—267 — poſſède un mouvement *uniforme* par rapport au milieu dans lequel la roue tourne, et un mouvement *accéléré* par rapport à un obſervateur attaché à la roue; la tendance à prendre ce mouvement accéléré *relatif* fait que le petit corps exerce ſur la main de l'obſervateur nommé qui le retient une force réelle. Comparez ſur la conception relativiſte les l. 3—2 d'en bas de la p. 518 qui précède.

Nous avons déjà obſervé dans le T. XVI que l'expreſſion *Princip der relativen Bewegung* ſe trouve, pour la première fois croyons-nous, dans la préface de l'édition allemande de 1903 du Traité ſur la Force Centrifuge et nous avons remarqué dans un article récent [5]) que les paroles citées de Huygens ſur le mouvement véritablement

---

[4]) Consultez toutefois le deuxième et le troisième alinéa de la p. 197 du T. XVI, où l'on voit que Huygens n'a pas toujours, nous semble-t-il, nié le mouvement par rapport au „spatium mundanum". On remarque chez lui une certaine hésitation. Aussi écrit-il en 1694 à Leibniz (T. XVI, p. 195) qu'il n'a trouvé le „sentiment plus veritable" que depuis deux ou trois ans.

[5]) „De relativiteit der beweging volgens Chr. Huygens", revue „Hemel en Dampkring", mai 1934.

égal et en même temps véritablement accéléré ont une certaine ressemblance avec la question posée par Einstein: „Wenn dem Begriffe der Geschwindigkeit nur ein relativer Sinn zugeschrieben werden kann, soll man trotzdem daran festhalten, die Beschleunigung als absoluten Begriff festzuhalten? [1])".

Ce parallélisme ne manque pas d'intérêt, et mérite sans doute d'être mis en lumière, puisque nous vivons à une époque où, en Angleterre comme ailleurs, grâce surtout a Einstein, on n'attribue plus aux idées de Newton la valeur absolue que bien des personnes leur attribuaient jadis.

Si Huygens avait vécu plus longtemps, il est possible qu'il aurait fait un effort pour établir comment le principe de la non-existence du mouvement absolu doit s'accorder avec le principe de la conservation des forces (p. 477). Pour Leibniz [2]) la difficulté était moins grande, puisqu'il admettait l'existence d'un mouvement absolu tout en jugeant le physicien incapable de le constater [3]).

Pour faire voir que la notion du mouvement d'un corps par rapport à l'espace immatériel n'est pas claire, Huygens se sert de l'argument philosophique suivant (T. XVI, p. 225): „Cum Ideam motus non aliunde habeamus quam ex mutatione positus corporis alicujus vel partium ejus (ut in motu circulari) ad alia corpora, nullum idcirco motum imaginari possumus quin istam positus mutationem contingere concipiamus, quoniam non potest motus concipi cui non conveniat idea motus". Quoiqu'en parlant de l'„idea motus" [4]) Huygens puisse avoir songé à quelqu' endroit de Platon — comparez la note 11 de la p. 31 qui précède —, il est fort possible qu'il n'aurait pas fait cette réflexion, s'il n'avait pas été en possession de l'„Essay concerning the human understanding" de 1690 de John Locke: comparez la note 4 de la p. 659.

---

[1]) A. Einstein, „Mein Weltbild", 1934, Querido, Amsterdam, p. 249 (dans le Chapitre „Einiges über die Enstehung der allgemeinen Relativitäts-theorie").

[2]) Voir sur Leibniz et le principe de la conservation des forces la note 6 de la p. 359 du T. XVI.

[3]) C'est ce que Leibniz dit clairement dans la dispute avec Clarke dont nous avons parlé dans la note 1 de la p. 237 du T. XVI. Voir en outre les p. 198 et 199 (note 8) du T. XVI.

[4]) Et *peut-être* déjà en 1688 de l'„idea quietis" (T. XVI, p. 223). Nous remarquons qu'il y a un intervalle entre les deux derniers alinéas de la „pièce de 1688" et le texte précédent, et que la couleur de l'encre est différente. Il est donc possible que Huygens n'ait parlé ici de l'„idea quietis" qu'après avoir lu le livre de Locke.

En 1689 il avait rencontré en Angleterre non ſeulement Newton mais auſſi Locke; en 1691 (T. X, p. 212) il écrit être fâché de n'avoir pas aſſez connu ce dernier [5]), qui lui avait envoyé en mars 1690 ſon livre qu'il dit lire „avec beaucoup de plaiſir, y trouvant une grande netteté d'eſprit, avec un ſtyle clair et agréable" (T. IX, p. 393) [6]). Or, Locke parle conſtamment de la nature et de la valeur de nos „ideas". Notons que d'après lui „our idea of ſpace is... diſtinct from that of body" (Livre II, Ch. XIII, § 27; comparez la p. 199 et les deux dernières lignes de la p. 231 de notre T. XVI).

Toutefois Locke ne ſe demande pas ſi l'on peut raiſonnablement parler d'une viteſſe déterminée d'une particule matérielle par rapport à l'eſpace. Le philoſophème de Huygens doit, paraît-il, être conſidéré comme plus ou moins original [7]).

---

5) Il ne l'avait apparemment pas rencontré en Hollande où Locke avait séjourné de 1683 jusqu'en mars 1689.

6) Huygens ajoute: „Je ne manqueray pas de lui écrire etc."; nous ne connaissons toutefois pas de lettre de Huygens à Locke.

7) Mais voyez ce que Huygens dit sur Descartes dans la note 2 de la p. 214 et à la p. 233 du T. XVI.

ANECDOTA.

§ 1. De innatantibus. Exercitij gratia [1]). Archimedis demonſtratio non videtur ſufficere [2]). Meum Theorema de appropinquatione centrorum gravitatis [3]). De Cylindro aliquid, de Cono [4]).

Notavi Archimedem cum per locum poſſet brevius, maluiſſe abſque eo [5]).

Veteres hoc obſervaſſe ut ſimplicioribus rationibus in demonſtrando uterentur, ut in 47 primi Elementorum noluerunt proportiones adhibere [6]).

Dioptrica [7]). prima fere ſtudia in his. adhuc uſque imperfecta nec pænitere. diu promiſſa. fruſtra inveſtigaveram correctionem mutuam ſuperficierum ſphæricarum [8]). quæ ſit optima lens convexa, 6 ad 1 [9]).

Theoremata omnia fere. forſan una demonſtratio teleſcopij. à nemine datam. Carteſium ignoraſſe nec Gregorium, nec Fabrium aut quenquam ſciviſſe [10]).

De Pareliorum et Coronarum cauſſis aliquid extat in Diarijs [11]). radius trans cylin-

---

[1]) Voir sur le traité: „De iis quæ liquido supernatant" les notes 1 et 2 de la p. 93 du T. XI.

[2]) Archimède, „De Corporibus fluitantibus" ou „Περὶ ὀχουμένων".

[3]) Est-ce à son „*Hypothesis I*": „Si Corpus sponte, seu gravitate suâ moveri incipiat, deorsum moveri; id est ut centrum gravitatis propius fiat plano horizonti parallelo" que Huygens donne ici le nom de „Theorema"?

[4]) Voir sur le cône flottant les p. 113—117, sur le cylindre flottant les p. 158—189 du T. XI.

[5]) Nous ne voyons pas où Huygens a noté qu'Archimède eût pu se servir, pour être plus court, d'un lieu géométrique.

[6]) Le Theor. XLVII du premier livre des „Elementa" ou „Στοιχεῖα" d'Euclide est le théorème de Pythagore.

[7]) T. XIII.

[8]) Voir les p. VII—VIII de l'Avertissement du T. XIII.

[9]) Il s'agit de la lentille biconvexe d'aberration minimale; voir le dernier alinéa de la p. 290 du T. XIII.

[10]) Huygens parle de la „Dioptrique" de 1637 de Descartes, de l'„Optica Promota" de 1663 de J. Gregory et de la „Synopſis optica" de 1667 de H. Fabry. Consultez sur ces livres le T. XIII.

[11]) Huygens parle de sa publication de 1667 („Relation d'une Observation faite à la Bibliothèque du Roy"), sur laquelle on peut consulter la note 10 de la p. 162 du T. VI, ainsi que les notes 3 de la p. 498 et 2 de la p. 513 du T. XVII. Cette Pièce a été publiée par nous, avec quelques variantes, aux p. 498—507 du T. XVII. Mais le traité „De Coronis et Parheliis" ne fut publié (en traduction latine) que dans les „Opuscula postuma" de 1703. Le texte hollandais a été publié pour la première fois en 1932 dans notre T. XVII.

drum refractus. ejus projectio seu vestigium in basi, tanquam major proportio refractionis esset [1]). cylindrus glacialis a stellula pendens Keplero observatus [2]).

Tabula aperturarum [3]).

Amplificatio ex sphærulis et lenticulis [4]).

Quam difficile sphæricæ superficies perficiantur. quantum hic operæ impenderim [5]).

Metium non esse primum inventorem [6]).

Addidissem libellam errori non obnoxiam. extat in Diarijs [7]). meretur conservari.

Quid binis telescopijs alij effecerint [8]).

De animalculis in semine præcipua observatio. non pridem facta, a Lewenhoekio exculta [9]). De circulatione. De animalculis in aqua pipere mista. quæ puto ex aere allabi [10]).

De motu ex collisione seu impulsu. dedi regulas quæ exstant in Diarijs [11]). Quid Angli, ad quos 4 regulas priores miseram cum demonstrationibus. Wallisius non habebat antea sed meam sibi usurpat, sed obscurè tamen. quæ vis ejus demonstrationis non viderunt [12]). eam et in mollibus adhibui. quid invenerim [13]). Mariottus plagiator [14]).

---

[1]) Voir ce que nous disons aux p. 487—488 du T. XVII sur l'indice de réfraction apparent N.

[2]) T. XVII, p. 387 et 516.

[3]) Voir les p. 350—353 et 496—499 du T. XIII, ainsi que la note 5 de la p. 14 du T. XV.

[4]) Consultez sur les „Microscopes simples à boulettes sphériques" et les „Microscopes simples à lentilles" la p. 895 du T. XIII.

[5]) Voir la p. 889 du T. XIII („Fabrication des lentilles"), la p. 601 du T. XV (idem), et les p. 248—258 et 287—304 du T. XVII, ainsi que les „Commentarii de formandis poliendisque vitris ad telescopia" publiés pour la première fois (en latin) en 1703 dans les „Opuscula Postuma"; le texte original hollandais (voir toutefois la note 5 de la p. 243 du T. XVII) paraîtra dans un des Tomes suivants de la présente édition.

[6]) Voir les p. 436, 586, 588 et 591—593 du T. XIII. Descartes („Discours de la méthode") avait attribué l'invention du télescope à Jacob Metius.

[7]) „Nouvelle invention d'un niveau à lunette" (Journal des Sçavans du 29 janvier 1680). „Démonstration de la justesse du niveau" (J. d. Sc. du 26 février 1680).

[8]) Nous ne savons pas à quelle pièce Huygens fait allusion.

[9]) Voir sur Leeuwenhoek la note 16 de la p. 315 du T. VII, et plusieurs passages du T. XIII.

[10]) Voir sur les observations microscopiques de Huygens les p. CXXXIX—CXLII et 698—732 du T. XIII.

[11]) „Extrait d'une lettre de M. Huygens sur les regles du mouvement dans la rencontre des corps" (Journal des Sçavans du 18 mars 1669). Voir les p. 169—181 du T. XVI. Le traité „De motu corporum ex percussione" ne fut publié qu'en 1703 dans les „Opuscula Postuma" Nous l'avons publié dans le T. XVI.

[12]) T. XVI, p. 172—178 (Avertissement).

[13]) Consultez sur la „Percussion des corps mous" la p. 592 du T. XVI.

[14]) T. XVI, p. 207—209.

[15]) Voir sur cet alinéa, déjà cité dans la note 5 de la p. 198 du T. XVI, l'Avertissement qui précède.

Motum non alium quam relativum dari. etiam vertiginis motum relativum esse. contra Neutonum[15]).

De vi centrifuga exstant, sed non demonstrata[16]). præcipuum theorema (forsan demonstrabo) quo vis ea exæquatur gravitati[17]). Galileus deceptus[16]). Libera per vacuum &c.[18]). Neutonus applicuit feliciter ad motus ellipticos Planetarum. hinc quanti sit hæc vis centrifugæ cognitio apparet[16]). Borellus aliquid prius. sed vis centrifugæ mensuram ignorabat[19]).

Mirabile de turbine se sustinente, nec adhuc perspectum.

---

§ 2. De[20]) phænomenis Saturni. et lunula. quale primum telescopium meum, lens superficierum alteram planam ex speculo habebat. exili apertura[21]). tanto mirabilius[22]) annulum fuisse repertum. Diligentia mira in observando per hyemem, tertia post mediam noctem, vigente gelu[23]). Ex Neuræi epistola, de Gassendo qui moriens delegabat amicis hanc de Saturno disquisitionem[24]). De lunula mea Gassendo dixeram[25]). Quid Cardinalis Mediceus et Itali, quorum scripta servo[26]). Quid Eustachius cum Fabro[27]). sed hic sententiam veriorem postea amplexus ut in dialogis[28]). quid Jo[29])

---

[16]) Ces trois passages sont cités dans la note 3 de la p. 251 du T. XVI, où nous avons indiqué où Galilée s'était trompé.

[17]) Comparez le premier alinéa de la p. 46 du présent Tome.
Voir aussi le dernier alinéa de la p. 303 du T. XVI et la Prop. V à la p. 275 du même Tome.

[18]) T. XVI, p. 302.

[19]) Comparez les p. 250—251 du T. XVI.

[20]) Tout ce qui suit se rapporte à des traités que Huygens avait publiés.

[21]) Passage déjà cité à la p. 11 du T. XV, dans lequel nous avons publié la „De Saturni lunâ observatio nova" de 1656, ainsi que le „Systema Saturnium" de 1659.

[22]) Leçon alternative: majus.

[23]) Passage cité à la p. 8 du T. XV.

[24]) C'est ce que de Neuré ou Neuræus (voir sur lui la note 1 de la p. 373 du T. III) dit dans la lettre à J. Chapelain du 15 mai 1660 que nous avons publiée à la p. 375 du T. III.

[25]) Huygens avait rencontré Gassendi, qui mourut le 24 octobre 1655, à Paris en cette même année, comme il l'écrit à son père le 6 août (T. I, p. 341).

[26]) Huygens avait dédié son „Systema Saturnium" au prince Leopoldo de Medicis. Voir aussi les deux premiers alinéas de la p. 187 du T. XV.

[27]) Voir les p. 389—472 du T. XV.

[28]) T. XV, p. 401, 402.

[29]) Lisez: Giuseppe.

Campanus, qui laureolam in mustaceo, quod Romæ videndum præbuerit [1]). Alij quaterni Satellites a Caffino inventi [2]). Correctio inclinationis annuli [3]). Wallisij aftus in anagrammate [4]). Wrennij hypothefis, eademque Freniclij de qua hic decertat. Riccioli fere eadem. Mira affectatio vel ingenij tarditas, poft cognitam veram tali fe venditantis [5]). Hevelius ceffit [6]).

---

§ 3. De Horologio ofcillatorio. quomodo primum invenerim ex hodometro [7]). Conatus plurium præripere cupientium. ut in Experimentis Florentinis [8]). Poft noftrum libellum in Italiam dimiffum, figuras per Bullialdum a Cardinali Mediceo miffas quarum Galilei alteram. fed difficili machinatione, ut non mirum non fucceffiffe [9]). Hevelius fibi occeptum [10]). Germanus quidam ciniflo [11]) volebat Tychonem Brahe mihi præiviffe. Daniæ legatus Craghe habebat vetus horologium Tychonis nequaquam affabre elaboratum cui pendulum inerat, et contendebat ita olim fabricatum fuiffe. fed Ol. Romerus qui huc iter tunc forte habebat fraudem coarguit, optime fe meniffe [lisez: meminiffe] dicens a quo et quando pendulum illud ipfum appenfum foret [12]).

---

[1]) L'expression „laureolam in mustaceo quærere" (le „mustaceum" est une tarte où entrent des feuilles de laurier) se trouve chez Cicéron („Epistolæ ad Atticum", Lib. V, Ep. XX, § 4) et signifie: vouloir tirer gloire de choses peu importantes. Or, il nous semble que la gloire de Campani était bien méritée: voir p.e. la note 1 de la p. 117 du T. V et la p. 14 du T. XV. Sans doute Huygens veut dire simplement que Campani n'avait vu l'anneau de Saturne qu'après lui (voir la p. 96 du T. V).

[2]) Voir sur la découverte du deuxième et du troisième satellite de Saturne la p. 35 qui précède. Cassini découvrit encore deux satellites en mars 1684 (T. VIII, p. 492—494).

[3]) Voir la note 2 de la p. 206, ainsi que la p. 208, du T. XV.

[4]) Voir sur l'„astus" de Wallis la p. 458 du T. I.

[5]) Voir sur les hypothèses de Wren, de Frenicle et de Riccioli la note 7 de la p. 381 du T. XV, où nous avons déjà cité ce passage des „Anecdota".

[6]) Passage cité dans la note 10 de la p. 184 du T. XV.

[7]) Passage cité à la p. 36 du T. XVII.

[8]) Voir le deuxième alinéa de la p. 60 du présent Tome.

[9]) Voir les p. 8 et 14 du T. III, la note 2 de la p. 38 du T. XVII et le troisième alinéa de la p. 65 du présent Tome.

[10]) Voir la note 9 de la p. 11 du T. XVII.

[11]) Ciniflo = cinerarius. Le mot, qui se trouve dans les Satires d'Horace (I, 2, 98) désigne un individu de bas étage.

[12]) À la p, 238 du Manuscrit F datant de 1686 Huygens écrit:

„Tychonis Brahei Mechanica edita a° 1602.

A° 1586 auctor erat annorum 40. In defcriptione quadrantis muralis magni

Sed præcipuum longè hic eſt Cycloidis inventum. utinam vidiſſet Galileus. Brounkerus tentavit Anglis vel ſibi hic aliquid decerpere, edita demonſtratione, abſque mei mentione, ſed falſâ, cum et ante aliam quoque falſam ad me miſiſſet [13]). Pardies etiam, ſed noſtræ non comparanda, in qua tempus definitur [14]).

Quale horologium ad longitudines metiendas paraverim, fere ut in libro edito, ſed additum ut ſingulis horæ ſcrupulis ſexageſimis eadem omnia reverterentur, una rota perennem motum habente, reliquis quieſcentibus, niſi cum huic novæ vires conciliandæ [15]). qui ſucceſſus. et de variatione ſecundum distantias ab æquatore. Voldero examinatum [16]).

De Evolutione nova Theoria et lucem adferens geometricis rebus [17]).

De centro oſcillationis, cujus particulam quandam aliter demonſtrare nonnulli exiſtimarunt aliquid eſſe [18]).

---

meminit horologiorum quibus utitur, quæ ad ſcrupula ſecunda indicent. In his magnum unum fuiſſe ſcribit in quo rota una 1200 denticulorum. huic duorum cubitorum diameter. Omnium iſtorum horologiorum compoſitionem alias ſe daturum pollicetur. Pendulorum nulla hic mentio. Horologio D[i] Kragij Danici legati inſcriptus eſt annus 1576 ſi bene memini. Quod ſi illo jam tempore Penduli uſum reperiſſet Tycho, qui fieri potuit ut toto 24 annorum ſpatio, quos poſtea vixit (obijt enim a° 1601 menſe Oct.) nullum in ſcriptis ſuis, inventi tam egregij tamque exoptati mentionem fecerit! Itaque exiſtimo Di Kragij horologio Tychonico pendulum poſtea adjectum, idque ea induſtria ut videretur jam olim ita fabricatum eſſe. Atque hoc ita ſe habere teſtatus eſt Cl. Romerus cum e Dania Hagam Comitis veniſſet ac ſe certo ſcire quando ita immutatum fuerit". La dernière phrase a apparemment été ajoutée plus tard (autre couleur d'encre). Römer visita la Hollande en 1687.

[13]) Voir sur la première démonstration de Brouncker, celle de 1662, la p. 349 du T. XVI; sur une deuxième datant de 1673, la p. 304 du T. VII; et sur une troisième la p. 314 du T. VII, où nous avons cité le présent texte.

[14]) Voir sur la démonstration de Pardies les p. 487—488 qui précèdent.

[15]) À la p. 179 du T. XVII il est parlé (en 1665) d'un remontage qui aurait lieu toutes les 15 secondes. Dans le „liber editus", c.à.d. dans l'„Horologium oscillatorium", il est question (p. 118 qui précède) d'un remontoir se remontant toutes les demi-minutes. Mais le remontoir de 1685 (déjà construit plus tôt; voir la note 8 de la p. 533) se remontait toutes les minutes (voir le N° XXVII à la p. 542 qui précède, et la p. 290 du T. IX).

À propos du remontoir de l'„Hor. osc." nous avons dit à la p. 182 du T. XVII que suivant Gould il se remontait toutes les demi-*secondes*. Nous avons remarqué depuis que ce *curiosum* se trouve déjà chez Berthoud („Histoire de la mesure du temps etc.", I, p. 248).

[16]) Voir sur la „variatio" nommée provenant de la rotation de la terre, et sur les remarques de de Volder, les p. 640—641 qui précèdent.

[17]) Voir les p. 40—44, 188—241 et 388—410 qui précèdent.

[18]) Voir les p. 33—34, 46—50, 52—58, 242—359, 413—436 et 441—466 qui précèdent.

15 ped. cum uncia ſpatium cadendo peractum in ſcrupulo horæ ſecundo [1]).

Penduli ſecundorum longitudo ante ignota [2]). Merſenni [3]). Mirum nec ipſi nec qui ipſius libellum legiſſet non veniſſe in mentem ut horologio pendulum aptaret [4]).

Horologium portatile cum involuto elatere. Fraus plagiarij Pariſienſis induſtriæ non vulgaris. non potuit ſe continere [5]). Omitte de Privilegio [6]).

Vitium Elateris ex mutatione caloris. alioqui tentaſſem itinere in Indiam [7]).

Omnia horologia portatilia poſtea hoc invento correcta. ubi tot mechanici continuo ſe exercuerint dico talia mirum non fuiſſe animadverſa.

Hookij ineptiæ, ſuſpiciones, injuriæ, alias ſatis ingenioſi. literæ Brounkeri. ipſis Anglis moleſtus Hookius. Hevelio iniquus [8]).

Horologium ex circulari pendulo. quid incommodi [9]).

---

[1]) Voir les p. 354—359 qui précèdent.

[2]) Voir la note 2 de la p. 354 du T. XVII et les p. 431 et 571 du présent Tome.

[3]) Voir sur Mersenne la note 1 de la p. 70 et la note 9 de la p. 279 du T. XVII.

[4]) Le „libellum" est peut-être celui de 1639, „Les nouvelles pensées de Galilée".

[5]) Il s'agit de I. Thuret; voir la p. 504 qui précède.

[6]) Voir la p. 504.

[7]) Voir la p. 508.

[8]) Voir sur Hooke les notes 2 de la p. 502, 4 de la p. 504 et 1 de la p. 605 du présent Tome. Sur Hooke et Hevelius on peut consulter les p. 395, 431 et 432 du T. VII.

[9]) Voir sur les horloges à pendule conique les p. 360—365 et 437—438 qui précèdent. Nous ignorons à quels inconvénients de ces horloges Huygens fait allusion.

TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

II. PERSONNES ET INSTITUTIONS MENTIONNÉES.

Dans cette liſte on a rangé les noms ſans avoir égard aux particules *de*, *a*, *van* et autres. Les chiffres gras déſignent les pages où l'on trouve des renſeignements biographiques [1]).

---

[1]) Le lecteur trouvera dans la liste des chiffres gras — voir p. e. Harrison — qui ne se rapportent pas à des renseignements biographiques proprement dits: mais ne peut-on pas dire que, pour un horloger p.e., l'histoire de ses ouvrages constitue la partie la plus importante de sa biographie?

Dans le T. XVII nous avons omis par mégarde le nom de Rijnaerts (Christiaen). **12**.

III. OUVRAGES CITÉS.

Les chiffres gras déſignent les pages où l'on trouve une deſcription de l'ouvrage.

Les chiffres ordinaires donnent les pages où il eſt queſtion de l'ouvrage, ou qui contiennent dans le cas de Huygens la reproduction de l'ouvrage.

Jean Bernoulli, Difcours fur les loix de la communication du mouvement, 1727, **459**, 466.
„ Lectiones mathematicæ de methodo integralium, 1691 & 1692, **43**.
„ Opera Omnia, 1752, 41, **43**.
„ Voyez G. G. Leibniz.
F. Berthoud, Hiftoire de la mefure du temps par les horloges, 1802, 506, 519, 547—549, 667.
J. B. Biot, Dell' orologio à pendolo di Galileo Galilei, differtation de M. Eugenio Albèri, 1858, **61**, 62.
W. J. Blaeu, De groote zeefpiegel, 1655, **371**.
„ Globe, 634, **701**, 702.
J. Bodeker, Manufcrit de 1587, **66**.
P. du Bois, Hiftoire de l'horlogerie, 1849—1850, **520**.
Tycho Brahe, Aftronomiæ inftauratæ mechanica, 1602, 666.
F. J. Britten, Old clocks and watches and their makers, 1911, 1933, **520**.
Brook Taylor, Of the motion of a ftretcht ftring, 1713, **485**, 486.
Harcourt Brown, Scientific organizations in feventeenth century France (1620-1680), 1934, 4, **698**.
H. L. Brugmans, Le féjour de Chr. Huygens à Paris et fes relations avec les milieux fcientifiques français, fuivi de fon Journal de voyage à Paris en 1660 et 1661 et de fon Journal à Londres en 1663, 1935, 3, **698**.
M. Cantor, Vorlefungen über Gefchichte der Mathematik, 1901, **41**, 43, 226.
R. des Cartes, Difcours de la méthode, 1637, 664.
„ La Dioptrique, 1637, 663.
„ La Géométrie, 1637, 232, 388, 393, 402, 403, 406, 407.
„ Lettres (éd. *Clerselier*), Vol. III, 1667, 52, 388.
„ Oeuvres (éd. *Adam* et *Tannery*), 1897—1913, 52, 232, 389.
„ Voyez F. de Beaune.
„ Voyez F. van Schooten.
G. D. (ou *J. D.*) *Caffini*, Ephemerides bononienfes Mediceorum fiderum ex hypothefibus et tabulis J. D. Caffini etc. deductæ, 1668, 652.
J. Caftillioneus. Voyez I. Newton.
Catelan. Examen mathematicum centri ofcillationis, 1681—1682, 457.
„ Exceptio ad refponfionem Hugenii, 1682, 457.
„ Objectio contra motum pendulorum in cycloidibus, 1682—1683, 457.
„ Obfervationes in propofitionem, quæ fundamentum eft 4ᵉ partis tractatus de pendulis Hugenii, 1681—1682, 457.
„ Principe de la fcience générale des lignes courbes ou principaux élémens de la géométrie univerfelle, 1691, **459**.
„ Refponfio ad litteras D.ⁿⁱ Bernoulli de controverfia fua cum D.ⁿᵒ Hugenio de centro ofcillationis, 1684, 457.
„ Refponfio ad objectiones Hugenii adverfus methodum Abbatis Catelani de determinando centro ofcillationis, 1682—1683, 457.
„ Témoignage que rendent les mathématiques à la gloire du Roi, 1681, 17, **459**.
Catelan et Mlle Catelan la cadette, Infcriptions en vers latins et françois pour les basreliefs de la ftatue du Roy, 1686, 459.

M. Merſenne, Les nouvelles penſées de Galilei, 1639, 668.
„ Les méchaniques de Galilée, 1634, 141.
„ Novarum obſervationum phys. math. T. III, 1647, 445, 446.
„ Univerſæ geometriæ mixtæque mathematicæ synopſis, 1644, 41.
P. C. Molhuyſen, Bronnen tot de geſchiedenis der Leidſche Univerſiteit [1572—1811], 1913—1924, 19, **519**.
G. Ubaldi del Monte, Mechanicorum liber, 1577, 54.
P. Mouſnerius, Tractatus phyſicus de motu locali etc., cuncta excerpta ex prælectionibus P. P. Honorati Fabry S. J., 1646, **53**, 54—58, 443—447.
G. Mouton, Obſervationes diametrorum ſolis et lunæ apparentium, etc. 1670, **59**, 353.
I. Newton, Lectiones opticæ in Academia Cantabrigienſi annis 1669, 1670 & 1671 in ſcholis publicis habitæ, 1729, **44**.
„ Method of fluxions and infinite ſeries with application to the geometry of curved lines (traduit du latin) (éd. J. Colſon), 1736, 43.
„ Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum, 1744, **43**.
„ Opuſcula mathematica, philoſophica et philologica (éd. *J. Caſtillioneus*), 1744, **43**, 44.
„ Philoſophiæ naturalis principia mathematica, 1687, 45, 400, 484—486, 554, 636, 659.
„ Tractatus de quadratura curvarum, 1704, 387.
L. M. L. Nix, Das fünfte Buch der Conica des Apollonios van Perga in der arabiſchen Ueberſetzung des Thabit ibn Corrah, 1889, **394**.
E. Noel, Oeuvres, 1646 et 1658, 53.
A. von Oettingen. Voyez Chr. Huygens.
Pappos, Συναγωγή, 49, 276.
I. G. Pardies, La ſtatique ou ſcience des forces nouvantes, 1673, 487, 488.
Bl. Paſcal, Hiſtoire de la roulette, 1658, 203.
„ Lettre de A. Dettonville à M. Huygens de Zulichem, 1659, 203.
„ Oeuvres (éd. *Brunſchvicg*, *Boutroux* et *Gazier*), 1914, 511.
J. Picard, Meſure de la terre, 1671, **25**.
Voyage d'Uranibourg, 1671, **18**, 25.
Platon, Θεαίτητος, 658.
„ Πολιτεία, 31.
W. Ploeg, Conſtantijn Huygens en de natuurwetenſchappen, 1934, **516**.
Cl. Ptolemæus, Harmonika (éd. *J. Wallis*), 1682 et 1699, 486.
„ „ (éd. *I. Düring*), 1930, 486.
A. Rambaud. Voyez E. Laviſſe.
G. B. Riccioli, Geographiæ et hydrographiæ reformatæ libri XII, 1661, **653**.
J. Richer, Obſervations aſtronomiques et phyſiques faites [en 1672-1673] en l'iſle de Caïenne, 1679, 636.
„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1729, **18**, 636.
G. P. de Roberval, Diſcours (perdu) à l'Académie des Sciences ſur les centres de percuſſion, 1671 (?), 443, 455.

G. P. de Roberval, Obfervations fur la compofition du mouvement, et fur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes, 1693, **453**, 454.
„ Propofition qui fert à trouver le centre de gravité (manufcrit), **451**.
„ Theorema lemmaticum ad invenienda centra gravitatis mire inferviens, 1645, (manufcrit), **451**.
„ Traité de mécanique (manufcrit perdu), 442, 447.
„ Traité des pendules ifochrones (manufcrit perdu), 55, 443.
„ Voyez Ch. Henry.
„ Voyez C. de Waard.
O. Roemer, Difcours (perdu) fur la forme épicycloïdale des dents des roues, 1675, 602.
„ Triduum obfervationum Tufculanarum, 1735, 600.
H. D. J. van Schevichaven, De St. Stephenskerk te Nijmegen, 1900, **602**.
„ Penfchetfen van Nijmegens verleden, 1898, **602**.
F. van Schooten, In Geometriam Renati des Cartes Commentarii, 1649 et 1659, 52, 209, 389, 393, 401, 402, **407**.
„ Exercitationes mathematicæ, 1656, 408.
F. Schuh, Sur quelques formules approximatives pour la circonférence du cercle et fur la cyclométrie de Huygens, 1914, **39**, 40.
W. Shakefpeare, Hamlet, prince of Denmark, 31.
W. Snellius, Tiphys Batavus, 1624, 648.
E. Somerfet. Voyez Worcefter.
S. Stevin, Beghinfelen der Weeghconft, 1586, 476.
H. Sully, Abrégé de quelques règles pour faire un bon ufage des montres, 1711, 520, **701**.
„ Defcription abrégée d'une horloge d'une nouvelle invention, 1726, **520**, 522, 547.
„ Lettre à G. Graham, 1724, 548, 549.
„ Règle artificielle du temps etc., 1717, **503**, 519, 599.
J. H. van Swinden, Verhandeling over Huygens als uitvinder der flingeruurwerken, 1817, 702.
P. Tannery, Les fciences en Europe, 1924, **36**, **443**.
„ Pafcal et Laloubère, 1890, **511**.
Thabit ibn Corrah. Voyez L. M. L. Nix.
E. Torricelli, Trattato del moto dei gravi, 1641, 442.
„ Voyez Viviani.
G. Ubaldi. Voyez del Monte.
P. J. Uylenbroek, Chr. Hugenii aliorumque feculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philofophicæ, 1833, **400**, 520.
G. Vallerius, Obfervatio et experimentum de funependulorum vibrationibus, 1731, **387**.
Vallius. Voyez van der Walle.
G. de Veer, Waerachtighe Befchrijvinghe van drie Seylagien etc., 1605, **653**.
Veltman, Handfchriftliche Aufzeichnungen über einige alte jetzt verfchwundene Uhrwercke der Stadt Osnabrück, 1890, **66**.
E. Verwijs & J. Verdam, Middelnederlandfch woordenboek, 1916, 652.

IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Comme dans le T. XVII, nous ne donnons pas de table alphabétique de toutes les matières traitées. Elle ferait double emploi avec la liste des Pièces et Mémoires. Nous nous bornons à mentionner certains sujets qu'on ne trouve pas, ou pas en détails, dans cette liste.

Nous avons de nouveau relié entre elles, autant que possible, les notes qui traitent d'un même sujet. Parfois — p.e. dans la note 6 de la p. 17 — nous renvoyons le lecteur aux Additions et Corrections. Dans quelques autres cas — p.e. dans celui de la note 1 de la p. 477 — on y trouve la page à laquelle la note fait allusion, sans que celle-ci renvoye expressément aux Additions.

Il n'entre pas dans nos habitudes d'exprimer à la fin d'un Tome des remercîments aux bibliothécaires, archivistes et autres personnes qui ont eu l'amabilité de nous aider [1]). Il est vrai que nous mentionnons parfois un collaborateur dans le texte — Monf. P. P. Bruna à la p. 51 — et que nous indiquons parfois dans une note — note 5 de la p. 4, note 2 de la p. 400 — de qui nous tenons un renseignement. De même nous aurions pu dire p.e. que la Requête de la p. 20 nous a été signalée par Monf. H. L. Brugmans et que nous devons les données sur I. Thuret — note 9 de la p. 505 — à Monf. J. M. Faddegon, bibliothécaire de l'Union centrale des arts décoratifs à Paris.

Les chiffres indiquent les pages de ce Volume.

---

[1]) Exceptionnellement nons avons exprimé des remercîments à Mons. J. Drummond Robertson — voir aussi la p. 61 du présent Tome —, ainsi qu'à Mons. H. L. Brugmans et à M. le Directeur de la Bibliothèque Nationale à Paris, dans les Additions et Corrections du T. XVII (p. 546, 547 et 550).

[1]) Voir aussi à ce sujet la note 1 de la p. 349.

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Page	*Au lieu de*	*lifez*
3 *note* 2	Au moment de l'apparition de ce Tome (décembre 1934) la publication des Journaux de Voyage de Huygens par Monf. H. L. Brugmans n'a pas encore eu lieu. Son travail (thèfe de doctorat) paraîtra à Paris au commencement de 1935. Nous en donnons le titre complet à la p. 686.	
4 *note* 5	Le travail (thèfe de doctorat) de Monf. Harcourt Brown, intitulé „Scientific Organizations in Seventeenth Century France (1620—1680)" (Baltimore, the Williams & Wilkins C.y) a paru en mars 1934. Le Ch. V („The Montmor Academy and England") contient plufieurs paffages inédits du Journal de Voyage de 1660—1661 de Huygens.	
7 *note* 3	D'après van Swinden (ouvrage cité à la p. 692) le „membre de la famille" eft A. J. Royer (comparez fur lui la p. 519).	
12 *note* 3	note 3 de la p. 14	note 4 de la p. 122
17 „ 2	Voir fur la réintroduction de la fufée dans les horloges marines la p. 513, ainfi que les notes 8 et 11 de la p. 533. À la p. 542 (l. 6) nous avons traduit „dubbele ontfluijtingh" par „double déclenchement".	
17 *note* 5	Voir fur les horloges marines de Sully la p. 520 qui fuit.	
„ „ 6	Le fil de foie rouge eft mentionné dans la première note de la p. 544.	
19 *ligne* 7 et fuiv.	Voir auffi fur l'horloge aftronomique de Leiden, la note 6 de la p. 601 et le premier alinéa de la p. 602.	
21 *note* 2	Confultez encore fur le rapport de de la Voye les p. 633—635.	
30 „ 2	Adrianus, ou Hadrianus, van der Walle fut inferit comme étudiant en droit à Leiden en 1641. „Mr. Adriaan van der Wal" fut enterré à Delft dans la vieille églife réformée le 25 mars 1684. Sa bibliothèque, que Huygens, au début de fon Journal de Voyage de 1660—1661, dit avoir vifitée à Delft, fut vendue publiquement à Leiden le 23 octobre 1684 et jours fuivants chez P. vander Meerfche. Cette vente eft mentionnée dans notre T. VIII aux p. 543, 549 et 552; la p. 604 du T. VIII parle toutefois par erreur d'*Antonius* van der Wall. Le catalogue de la vente appelle Adr. v. d. Walle „juris utriusque doctor". La bibliothèque contenait 467 libros juridicos, 950 libros	

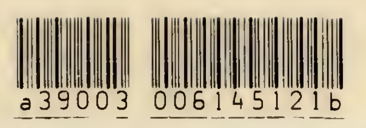
Page	*Au lieu de*	*liſez*
	mathematicos, cosmographicos, geographicos et topographicos, 689 libros medicos, 1284 libros theologicos et 3848 libros miscellaneos. Voir auſſi ſur v. d. Walle la p. 591 du T. XIII.	
32 *note* 9	Huygens parle du modèle conſtruit pour van Ceulen à la p. 532, § 4.	
34 „ 2	quelque	quelques
41 *ligne* 7	nommée	nommé
„ *note* 8	Voir encore ſur Apollonios, Golius et Huygens la note 2 de la p. 393.	
59—66	Monſ. A. C. de Kock a publié en novembre et décembre 1933 dans la revue „Hemel en Dampkring" un article intitulé „De uitvinding van het ſlingeruurwerk", dans lequel il traite du livre de Monſ. Drummond Robertſon („The Evolution of Clockwork") de novembre 1931 et de la brochure (partie de notre T. XVII) de janvier 1932 „L'horloge à pendule de 1656 à 1666, rédigé par J. A. Vollgraff". Ceci nous a amenés à notre tour à écrire deux articles, publiés en janvier et février 1934 dans la même revue, intitulés: „Heeft Vincenzio Galilei op zijn ſterfdag zijne uurwerken vernield?" et „Heeft Prins Leopold gezegd dat in 1656 te Florence een ſlingeruurwerk is geconſtrueerd?" Comme l'Avertiſſement de l'„Horologium oſcillatorium" était déjà imprimé en ce temps, nous en avons cité dans ces articles quelques parties, ſavoir la note 2 de la p. 62, le deuxième alinéa de la p. 64 et le troiſième alinéa de la p. 65. M. Drummond Robertſon nous a fait ſavoir enſuite qu'il reconnaiſſait que ſa traduction, reproduite dans l'article de M. de Kock, d'un paſſage de la lettre de Viviani, traduction citée par nous dans le premier alinéa de la note 2 de la p. 62, eſt erronée. Dans l'article de février, nous avons remarqué que d'après les „Novelle Fiorentine" de 1774, citées dans la note 1 de la p. 470 de notre T. III, il y avait à Florence un nommé *Marco* Treffler, horloger du grand-duc Ferdinand II, mais qu'il nous ſemble probable qu'il y a ici une erreur dans le prénom, puiſque les „Novelle Fiorentine" diſent emprunter cette nouvelle à la lettre non encore publiée de Viviani qui ne parle que de Philippe Treffler, horloger du grand-duc Léopold. Van Swinden dit que Treffler s'appelait Johannes Philippus, mais que d'autres l'appellent auſſi Johannes Marcus ou ſimplement Marcus.	
66	À propos des horloges à pendule conique, nous pouvons encore obſerver que Leibniz ne connaiſſait apparemment pas d'horloges publiques de ce genre: dans ſes Remarques de ± 1715 il écrit: „Il y a des Horloges à Pendule d'une eſpece toute particuliere, où le Poids vibrant ne va pas en allant et retournant, mais toujours d'un même	

Page	*Au lieu de*	*liſez*
	côté. Ces Horloges ont cela de particulier, qu'elles vont ſans bruit, et ont été recherchées quelquesfois par ceux, qui manquent de ſommeil et veulent avoir des Horloges dans leurs Chambres qui ne les empêchent pas de dormir. Mr. Huguens en a fait un diſcours, qui n'a pas été imprimé [?], où au lieu de Cycloide il a employé une eſpece de Solide parabolique pour en rendre les vibrations égales".	
84 *ligne* 2	par la grave de Dieu de Roy	par la grace de Dieu Roy
116 2ième *alinéa*	Voir ſur deux autres voyages de de la Voye avec les horloges, non mentionnés ici, la p. 633.	
218 *ligne* 11	en autre	en outre
364 „ 21	la friction	le frottement
„ „ 22	petite qu'elle	petit qu'il
371 *note* 4	Les figures de Huygens (dernière ligne de la note) ſont celles des „Inſtruments nautiques" des p. 627—629.	
378 *note* 2 *ligne* 1	pas	par
384 „ 5 „ 16	l'à	l'a
„ „ „ „ 18	infèrieure	inférieure
386 *ligne* 4 *d'en bas*	$\frac{n}{n+1}\int^{1}\frac{y^{n-1}dy}{\sqrt{1-}}$	$\frac{n}{n+1}\int_{0}^{1}\frac{y^{n-1}dy}{\sqrt{1-y^2}}$
400 *notes ligne* 11	la note 000 de la p. 000	la note 4 de la p. 484
409 *ligne* 9	rectifianda	rectificanda
454 „ 1	Cum	Cur
455 „ 6	affaber	affabre
470 „ 4	queſton	queſtion
471 „ 9 *d'en bas*	déſigne	déſigne
474 „ 12	Rien indique	Rien n'indique
482 „ 2 *d'en bas*	précédent	précèdent
486 *notes ligne* 6	Dans ſes Remarques de ± 1715 Leibniz écrit, après avoir dit que Huygens dans ſon ouvrage de 1673 „rend raiſon de la Cycloide": „Mais il y auroit encore quelque choſe à dire de la Nature des Vibrations des Reſſorts, dont l'égalité eſt vérifiée par celle des Cordes touchées, qui rendent toujours le même ſon, quand elles ſont également tendues". Il ignorait ſans doute que Huygens s'était déjà occupé de ce ſujet.	
497 *lign e*9	fi	ſi
505 *note* 6	Après 1675 Huygens ne mentionne plus jamais Thuret en ſa qualité d'horloger (ſi ce n'eſt dans les „Anecdota", p. 668), mais il parle en 1678 (T. XIII, p. 704) de l'eau de poivre donnée par Thuret à Römer.	

Page	*Au lieu de*	*liſez*
513 *ligne* 7 *d'en bas*	des l'horloges	des horloges
515 *note* 6	La dernière page du Manuſcrit 15 porte une note, écrite au crayon, où Huygens parle de Willem van der Duſſen à Dordrecht. Nous ſaiſiſſons cette occaſion pour mentionner auſſi les horlogers Meyboſch et van Laer qui prirent part à l'expédition de 1690—1692 (voir ſur eux les T. IX et X).	
520 *ligne* 13	Le „British Muſeum" à Londres poſſède un exemplaire de l'ouvrage de 1711 de Sully. Il eſt intitulé: „Abrégé de quelques Regles pour faire un bon uſage des Montres, avec des Réflexions utiles ſur la maniere de les bien raccommoder, & ſur les abus qui s'y commettent. par Henry Sully, Horloger de Londres à Leide. Metior et Emendo [vignette]. Imprimé pour l'Auteur, à qui l'on peut s'addreſſer. A LEIDE 1711". Sully ne viſita donc pas ſeulement la Hollande; il s'y établit. Une fille de lui fut baptiſée à la Pieterskerk le 30 novembre 1710; la mère étant décédée, deux tuteurs furent nommés le 18 ſeptembre 1711 (archives communales de Leiden).	
522—523 *note* 2	Voir auſſi ſur des horloges à double balancier la p. 6 du T. XVII.	
525 *ligne* 3	troiſième	deuxième
537 *note* 1	de la p. 556	la p. 556
547 *ligne* 3	pendule 5).	pendule 5)".
„ „ 5	s'il eſt ici vraiment original	ſi cette idée n'eſt venue qu'à lui
558 „ 19	qnod	quod
577 „ 14 *d'en bas*	queſton	queſtion
593 „ 1 „ „	Nous publions ici deux petites figures de Huygens qui accompagnent la Fig. 94 dans le Manuſcrit I, quoique nous ignorions abſolument ſi elles ont quelque choſe à faire avec le „conusje" [petit cône] et le „langwerp" [pièce oblongue].	
600 *ligne* 3	(1655—1710)	(1644—1710)
607 „ 3 *d'en bas*	par	per
613 *note* 5 *ligne* 6	$\frac{AB}{MD}$	$\frac{AB}{M\Delta}$
616 *notes* „ 4	Fig. 11	Fig. 111
„ *note* 1 „ 2	p. 516	p. 615
634 „ 1	Dans le „Scheepvaartmuſeum" à Amſterdam il y a un grand globe	

Page	*Au lieu de*	*liſez*
	de W. J. Blaeu, œuvre poſthume qu'on juge dater de 1650 environ. La différence des longitudes de Toulon et de Candie y eſt de 24° ou un peu plus, ce qui s'accorde aſſez bien avec les 24°30′ de la p. 211 du Manuſcrit F. Huygens était en poſſeſſion d'un globe de Blaeu „de la nouvelle impreſſion" probablement depuis 1671 (T. VIII, p. 82).	
634 *note* 2	Le „Scheepvaartmuſeum" poſſède une fort belle carte de F. de Wit, datée 1672, et intitulée „Nova et accurata totius Europæ Tabula". La différence Toulon-Candie y eſt de 22°20′. C'eſt ſans doute la carte conſultée par Huygens qui donne 22°30′ pour la dite différence. On peut conſulter ſur F. de Wit la p. 67 du T. VI.	
635 *note* 7	à 4°36′	à 4°56′
642 *ligne* 23	où	ou
„ „ 24	Quoiqu'il	Quoi qu'il
658 *lignes* 3—5 *et* 12	En 1670 Huygens écrivait à J. de Witt (T. VII, p. 52): „Nec magis ex motibus ſupra Terra contingentibus colligere licet utrum immobilis ſit an moveatur diurno annuoque motu, etc."	
666 § 3	Ce paragraphe, ainſi que la remarque de Huygens qui conſtitue notre note 12, ont déjà été publiés par J. H. van Swinden — quelques mots ont été mal lus — dans ſon article de 1817 (ou plutôt de 1814): „Verhandeling over Huygens als uitvinder der ſlingeruurwerken" (voir la p. 13 du T. XVII).	
666 *ligne* 5 *d'en bas*	D'après van Swinden, qui a apparemment raiſon, le „Germanus" eſt J. J. Becher „qui ciniflo vocatur quoniam Chemiæ operam dabat". Nous avons mentionné ſon livre aux p. 6—7 du T. XVII. Huygens avait connu Becher perſonnellement vers le temps où parut l'„Horologium". Il lui en avait fait parvenir un exemplaire (T. II, p. 209). Becher n'était pas ſeulement chimiſte, mais auſſi économiſte diſtingué. Voir p.e. A. Hulshof „Een Duitſch econoom in en over ons land omſtreeks 1670" (dans la revue „Onze Eeuw", Harlem, Bohn, 1910) et F. M. Jaeger „Over Johan Joachim Becher en zijne relaties met de Nederlanden" (dans le „Economiſch-hiſtoriſch Jaarboek", la Haye, Nijhoff, 1919).	
667 *note* 18	précédent	précèdent
681	Mercator (Nicolaus)	Mercator (Gerhard)
684	Willem III, Stadhouder, 523	522

SOMMAIRE.


3 9003 00614512 6